

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes puntuen igual i cada un val deu punts. La nota final serà el resultat de dividir entre tres la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema. Heu de justificar totes les respostes.

P1) a) Determinau els valors de t per als quals la matriu $A = \begin{pmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ admet matriu inversa. (5 punts)

b) Determinau la solució del sistema d'equacions: (5 punts)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

P2) a) Determinau els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (3 punts). Calculeu els punts on aquesta funció aconsegueix els seus valors màxims i mínims (1,5 punts). Quant val el pendent de la recta tangent a la funció f en el punt $x = 2$? (0,5 punts)

b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del recinte limitat per la funció $g(x) = x + a$, l'eix x i les rectes $x = 1$ i $x = 2$ sigui $\frac{5}{2}u^2$. (5 punts)

P3) a) Calculeu les coordenades del punt de tall del pla d'equació $x + y + z = 0$ i la recta $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{2}$. (5 punts)

b) Se sap que un pla π és perpendicular al vector $\vec{v} = (2, 3, -1)$ i que passa pel punt mitjà dels punts $P = (2, 1, 3)$ i $Q = (2, -3, 3)$. Determineu l'equació del pla π . (5 punts)

P4) S'elegeix un nombre natural entre l'1 i el 25, de manera que tots tenguin la mateixa probabilitat de ser escollits. Responen les preguntes següents, descrivint en cada apartat el succés corresponent, i feu servir, en els apartats de càlcul de probabilitats, les propietats de la probabilitat.

- a)** Descriuiu i determinau l'espai mostral i els successos següents: el nombre escollit és divisible per 2, el nombre escollit és divisible per 3, i el nombre escollit és divisible per 2 i per 3. (2 punts)
- b)** Quina és la probabilitat que el nombre escollit no sigui divisible per 2? (1,5 punts)
- c)** Quina és la probabilitat que el nombre escollit sigui divisible per 2 o per 3? (2 punts)
- d)** Quina és la probabilitat que el nombre escollit no sigui divisible per 2 ni per 3? (2 punts)
- e)** Quina és la probabilitat que el nombre escollit sigui divisible per 3, però no per 5? (2,5 punts)

Criteris específics de correcció

Cada problema val deu punts. La nota final serà el resultat de dividir entre tres la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema. Totes les respostes han d'estar justificades.

P1)

- a)** Càlcul correcte del determinant de A : 2 punts.
Resolució correcta de l'equació $\det(A) = 0$ i obtenció dels valors de t : 2 punts.
Indicar que la matriu A admet inversa si t és diferent de -4 i 1 : 1 punt.
- b)** Solució, per qualsevol mètode, correcta i amb justificació del sistema d'equacions: 5 punts.
Si tan sols apareix la solució sense cap explicació: 1 punt.
Qualsevol altra situació: 0 punts.

P2)

- a)** Càlcul correcte de la derivada: 0,25 punts.
Plantejar i resoldre correctament l'equació $f'(x) = 0$: 0,75 punts.
Estudiar i indicar correctament els intervals de creixement i decreixement: 2 punts (0,5 punts per cada interval).
Càlcul correcte dels punts on s'aconsegueixen els extrems, indicant les dues coordenades: 1,5 punts (0,5 punts per cada extrem).
Càlcul correcte de la derivada a $x = 2$, indicant que és aquest el pendent: 0,5 punts.
- b)** Escriptura correcta de l'equació que s'ha de resoldre: 1 punt.
Càlcul correcte de la primitiva o de les primitives: 2 punts.
Aplicació de la regla de Barrow i càlcul correcte del valor de a : 2 punts.

P3)

- a)** Resolució correcta del sistema d'equacions associat al punt de tall: 4 punts.
Indicació que el punt de tall és $(1,0, -1)$: 1 punt.
- b)** Indicació del vector normal del pla: 1 punt.
Càlcul correcte del punt mitjà: 2 punts.
Determinació correcta de l'equació del pla: 2 punts.

P4)

- a)** Descripció i determinació de l'espai mostral: 0,5 punts.
0,5 punts per la descripció i determinació de cadascun dels successos indicats.
- b)** Identificar el succés: 0,5 punts. Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 1 punt.
- c)** Identificar el succés: 0,5 punts. Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 1,5 punts.
- d)** Identificar el succés: 0,5 punts. Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 1,5 punts.
- e)** Identificar el succés: 0,5 punts. Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

Solucions

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes puntuen igual i cada un val deu punts. La nota final serà el resultat de dividir entre 3 la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema. Heu de justificar totes les respostes.

P1) a) Determinau els valors de t per als quals la matriu $A = \begin{pmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ admet matriu inversa. (5 punts)

b) Determinau la solució del sistema d'equacions: (5 punts)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solució:

a) Sabem que una matriu quadrada admet inversa si el seu determinant és no nul. Aleshores, com que $\det(A) = -4 - 3t - t^2$, tenim que $\det(A) = 0$ implica que $4 - 3t - t^2 = 0$, d'on $t = -4$ i $t = 1$. Per tant, la matriu A admet inversa per a qualsevol valor de t que no sigui -4 o 1 .

b) La solució demanada és: $(x, y, z) = \left(-\frac{3}{4}, 4, -1\right)$.

P2) a) Determinau els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (3 punts). Calculau els punts on aquesta funció aconsegueix els seus valors màxims i mínims (1,5 punts). Quant val el pendent de la recta tangent a la funció f en el punt $x = 2$? (0,5 punts)

b) Calculau el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del recinte limitat per la funció $g(x) = x + a$, l'eix x i les rectes $x = 1$ i $x = 2$ sigui $\frac{5}{2}u^2$. (5 punts)

Solució:

a) Per calcular els intervals de creixement i decreixement de la funció f , hem de calcular els zeros de la primera derivada d'aquesta funció.

$$f'(x) = -4x + 4x^3 = 4x(-1 + x^2) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(-1 + x^2) = 0$$

d'on $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
<i>Signe $f'(x)$</i>		-		+		-		+	
$f(x)$		decreixent		creixent		decreixent		creixent	
			Punt mínim		Punt màxim		Punt mínim		

La funció és decreixent als intervals $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ i creixent als intervals $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$.

El punt on s'aconsegueix el valor màxim és el punt $(0, f(0)) = (0, 1)$. Els mínims d'aquesta funció s'aconsegueixen als punts: $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ i $(1, f(1)) = (1, 0)$.

El pendent de la recta tangent a $x = 2$ ve donat pel valor de la primera derivada en aquest punt, és a dir, per $f'(2) = 24$.

- b)** Ens demanen calcular el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del recinte limitat per la funció $g(x) = x+a$, l'eix x i les rectes $x = 1$ i $x = 2$ sigui $\frac{5}{2}u^2$. El que ens diuen és que

$$\int_1^2 (x+a)dx = \frac{5}{2}.$$

D'on, calculant la integral, hem de resoldre l'equació següent per trobar el valor de a :

$$\frac{3}{2} + a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 1.$$

P3) a) Calculeu les coordenades del punt de tall del pla d'equació $x + y + z = 0$ i la recta $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{2}$. (5 punts)

b) Se sap que un pla π és perpendicular al vector $\vec{v} = (2, 3, -1)$ i que passa pel punt mitjà dels punts $P = (2, 1, 3)$ i $Q = (2, -3, 3)$. Determineu l'equació del pla π . (5 punts)

Solució:

- a) Per trobar les coordenades del punt de tall del pla i de la recta donades, hem de resoldre el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \frac{x-1}{2} = y, \\ y = \frac{z+1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - 2y = 1, \\ 2y - z = 1. \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 0, z = -1.$$

El punt de tall és: $(1, 0, -1)$.

b) El punt mitjà del segment $\overline{PQ}$ és:

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{(2,1,3)+(2,-3,3)}{2} = (2, -1, 3).$$

Com que la recta és perpendicular al pla, el vector director de la recta és el vector normal del pla: $\vec{n} = (2, 3, -1)$. Per tant, la seva equació tindrà la forma $2x+3y-z+D = 0$. Per determinar D hem de tenir en compte que el pla ha de passar pel punt $(2, -1, 3)$, per tant: $4-3-3+D = 0$, d'on $D = 2$. Per tant, el pla demanat té per equació $2x+3y-z+2 = 0$.

P4) S'elegeix un nombre natural entre l'1 i el 25, de manera que tots tenguin la mateixa probabilitat de ser escollits. Responen les preguntes següents, descrivint en cada apartat el succés corresponent, i feu servir, als apartats de càlcul de probabilitats, les propietats de la probabilitat.

- a) Descriviu i determinau l'espai mostral i els successos següents: el nombre escollit és divisible per 2, el nombre escollit és divisible per 3 i el nombre escollit és divisible per 2 i per 3. (2 punts)
- b) Quina és la probabilitat que el nombre escollit no sigui divisible per 2? (1,5 punts)
- c) Quina és la probabilitat que el nombre escollit sigui divisible per 2 o per 3? (2 punts)
- d) Quina és la probabilitat que el nombre escollit no sigui divisible per 2 ni per 3? (2 punts)
- e) Quina és la probabilitat que el nombre escollit sigui divisible per 3 però no per 5? (2,5 punts)

Solució:

a) L'espai mostral ve donat pels nombres de l'1 al 25, és a dir:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}.$$

Sigui A el succés «el nombre escollit és divisible per 2»,

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}.$$

Sigui B el succés «el nombre escollit és divisible per 3»,

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}.$$

El succés $A \cap B$ és el succés «el nombre escollit és divisible per 2 i per 3»,

$$A \cap B = \{6, 12, 18, 24\}.$$

- b) Sigui A el succés «la bola extreta té un nombre parell», aleshores $\bar{A}$ és el succés «el nombre escollit no sigui divisible per 2», per tant:

$$p(A) = \frac{12}{25} = 0,48.$$

$$\text{Així: } p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} = 0,52.$$

- c) Ens demanen la probabilitat del succés $A \cup B$, aleshores

$$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25} = 0,64.$$

- d) El succés «el nombre escollit no és divisible per 2 ni per 3» coincideix amb $\bar{A} \cap \bar{B}$. Ens demanen la probabilitat de $\bar{A} \cap \bar{B}$:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} = 0,36.$$

- e) Sigui C el succés «que el nombre escollit sigui divisible per 3 però no per 5», donat per
 $C = \{3, 6, 9, 12, 18, 21, 24\}.$

Per tant:

$$p(C) = \frac{7}{25} = 0,28.$$