

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Mayores de 25 y 45 años Castilla y León	MATEMÁTICAS	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	--------------------	--

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada ejercicio se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m :

$$\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + (m - 2)z = 0 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $m = 6$. (1 punto)

E2.- Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + 3z = 6$ y $\pi_2 \equiv x - z = 0$, calcular:

a) El plano paralelo a π_1 que pasa por el origen de coordenadas. (0,5 puntos)

b) La recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $(1, 2, 3)$. (0,5 puntos)

c) El plano perpendicular a π_1 y π_2 , que pasa por el punto $(3, -1, 2)$. (1,5 puntos)

E3.- Consideramos la función $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular a y b para que f sea derivable en $\mathbb{R}$, indicando cuánto vale la derivada en cada punto de $\mathbb{R}$. (2,5 puntos)

E4.-

a) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$. (1,5 puntos)

b) Calcular $\int xe^x dx$. (1,5 puntos)

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular AB y BA .

(1 punto)

b) Calcular las inversas de las matrices A , AB y ABA .

(1,5 puntos)

E2.- Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ y $r_2 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{3}$,

a) Razona si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1 .

(1 punto)

b) Calcular la recta cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de r_1 y r_2 , y que contiene el punto $(1, -1, 2)$.

(1,5 puntos)

E3.- Dada la función $f(x) = xe^x$, determinar: dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Dibujar su gráfica.

(2,5 puntos)

E4.-

a) Calcular el valor de a , siendo $a > 0$, para que el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = ax$ y $g(x) = x^2$ sea 36.

(1,5 puntos)

b) Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{e^x - 1}$.

(1 punto)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

E1.- a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m :

$$\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + (m-2)z = 0 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $m = 6$. (1 punto)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & m-2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & m-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Buscamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & m-2 \end{vmatrix} = m - 2 - 2 + 0 - \cancel{m} + \cancel{m} - 2 - 0 = m - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 6}$$

Se nos plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq 6$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 6$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Como la matriz ampliada tiene añadida una columna de ceros el rango de la matriz A y el de la ampliada será el mismo, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado. No es necesario, pero hallamos el rango de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 4 \\ -1 \quad 1 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \\ -1 \quad 1 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 0 \quad 2 \quad -4 \\ 0 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2.

Conclusión: Si $m \neq 6$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $m = 6$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $m = 6$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 2). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x - y + 6z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 6z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x = -4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4z - y + 6z = 0 \\ -4z + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y - 2z = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Para $m = 6$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

E2.- Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + 3z = 6$ y $\pi_2 \equiv x - z = 0$, calcular:

- a) El plano paralelo a π_1 que pasa por el origen de coordenadas. **(0,5 puntos)**
 b) La recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $(1, 2, 3)$. **(0,5 puntos)**
 c) El plano perpendicular a π_1 y π_2 , que pasa por el punto $(3, -1, 2)$. **(1,5 puntos)**

- a) Un plano paralelo a $\pi_1 \equiv 2x + y + 3z = 6$ tiene ecuación $\pi_3 \equiv 2x + y + 3z = D$, determinamos el valor de D para que contenga el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_3 \equiv 2x + y + 3z = D \\ O(0, 0, 0) \in \pi_3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 + 0 + 3 \cdot 0 = D \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi_3 \equiv 2x + y + 3z = 0$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi_3 \equiv 2x + y + 3z = 0$.

- b) La recta perpendicular a π_1 tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi_1 \equiv 2x + y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, 1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1, 2, 3) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n}_1 = (2, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{La recta buscada tiene ecuación } r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- c) El plano perpendicular a π_1 y π_2 tiene como vectores directores a los vectores normales de ambos planos.

$$\pi_1 \equiv 2x + y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, 1, 3)$$

$$\pi_2 \equiv x - z = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (1, 0, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} (3, -1, 2) \in \pi_4 \\ \vec{u} = \vec{n}_1 = (2, 1, 3) \\ \vec{v} = \vec{n}_2 = (1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_4 \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 3 + 3(y+1) + 0(z-2) - (z-2) + 2(y+1) - 0(x-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 3 + 3y + 3 - z + 2 + 2y + 2 = 0 \Rightarrow -x + 5y - z + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_4 \equiv x - 5y + z - 10 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi_4 \equiv x - 5y + z - 10 = 0$.

E3.- Consideramos la función $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular a y b para que f sea derivable en $\mathbb{R}$, indicando cuánto vale la derivada en cada punto de $\mathbb{R}$. **(2,5 puntos)**

Para que sea derivable la función debe ser continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= a \cdot 0 + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} ax + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(0) = 0 \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b=0}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

La función debe ser derivable en $x = 0$, por lo que deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) = \cos(0) = 1 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Los valores buscados son $a=1$ y $b=0$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

La expresión de la derivada es $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

E4.-

a) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$. **(1,5 puntos)**

b) Calcular $\int xe^x dx$. **(1,5 puntos)**

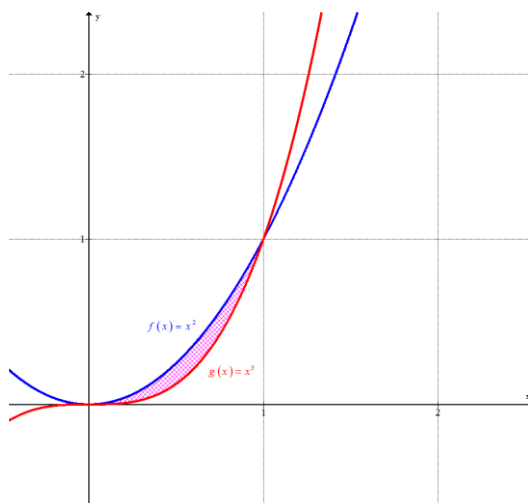
a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^3 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = x^3 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

El área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ es el valor absoluto de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones.

Como $f(0.5) = 0.5^2 = 0.25 > g(0.5) = 0.5^3 = 0.125$ tomaremos $f(x) - g(x) = x^2 - x^3$.

$$\text{Área} = \int_0^1 f(x) - g(x) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{1}{12} \approx 0.0833 u^2$$



b) Calculamos la integral pedida.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular AB y BA .

(1 punto)

b) Calcular las inversas de las matrices A , AB y ABA .

(1,5 puntos)

a) Calculamos la expresión de la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 & 2-2 \\ -2+2 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$$

Calculamos la expresión de la matriz BA .

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 & -2+2 \\ 2-2 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$$

b) Comprobamos si la matriz A es invertible.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$$

Al tener determinante no nulo existe la inversa de A . Determinamos su expresión.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si la matriz AB es invertible.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 0 = 9 \neq 0$$

Al tener determinante no nulo existe la inversa de AB . Determinamos su expresión.

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{Adj}((AB)^T)}{|AB|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si la matriz ABA es invertible.

$$ABA = 3I_3 A = 3A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|ABA| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 36 = -27 \neq 0$$

Al tener determinante no nulo existe la inversa de ABA . Determinamos su expresión.

$$(ABA)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((ABA)^T\right)}{|ABA|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}}{-27} = \frac{1}{-27} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 & 2/9 \\ 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

E2.- Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ y $r_2 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{3}$,

- a)** Razona si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1 . **(1 punto)**
b) Calcular la recta cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de r_1 y r_2 , y que contiene el punto $(1, -1, 2)$. **(1,5 puntos)**

a) Estudiamos la posición relativa de ambas rectas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P_1(2, 0, 3) \in r_1 \\ \vec{u}_1 = (1, 2, 2) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{3} \Rightarrow \begin{cases} Q_2(0, 3, 2) \in r_2 \\ \vec{v}_2 = (3, -2, 3) \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 2, 2) \\ \vec{v}_2 = (3, -2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{2}{-2} \neq \frac{2}{3}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$ para decidir su posición relativa.

$$\left. \begin{array}{l} P_1(2, 0, 3) \\ Q_2(0, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_2} = (0, 3, 2) - (2, 0, 3) = (-2, 3, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 2, 2) \\ \vec{v}_2 = (3, -2, 3) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (-2, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 12 + 18 - 8 + 6 - 9 = -3 \neq 0$$

El producto mixto tiene un valor distinto de cero y las rectas se cruzan.

Para que sea posible la existencia de un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1 las rectas deben ser perpendiculares y para ello el producto escalar de sus vectores directores debe ser nulo. Calculamos el valor de este producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 2, 2) \\ \vec{v}_2 = (3, -2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1, 2, 2) \cdot (3, -2, 3) = 3 - 4 + 6 = 5 \neq 0$$

Las rectas no son perpendiculares y el plano pedido no existe.

- b) Hallamos el producto vectorial de los vectores directores de r_1 y r_2 . Este vector es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y será el vector director de la recta que buscamos.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 2, 2) \\ \vec{v}_2 = (3, -2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6i + 6j - 2k - 6k - 3j + 4i = 10i + 3j - 8k = (10, 3, -8)$$

Hallamos la ecuación de la recta con vector director $\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = (10, 3, -8)$ que pasa por $(1, -1, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = (10, 3, -8) \\ (1, -1, 2) \in r_3 \end{array} \right\} \Rightarrow r_3 \equiv \begin{cases} x = 1 + 10\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - 8\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta buscada tiene ecuación $r_3 \equiv \begin{cases} x = 1 + 10\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - 8\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$

E3.- Dada la función $f(x) = xe^x$, determinar: dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Dibujar su gráfica. **(2,5 puntos)**

La función no presenta ningún problema de definición. El dominio de la función es $\mathbb{R}$.
Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x+1)e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

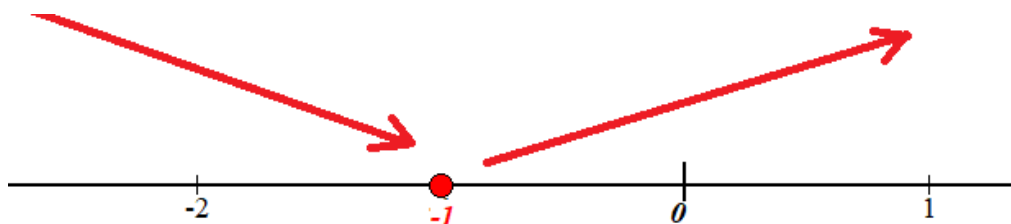
Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto crítico $x = -1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -5$ y la derivada vale

$$f'(-5) = (-5+1)e^{-5} = \frac{-4}{e^5} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = (0+1)e^0 = 1 > 0$. La función crece en $(-1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo relativo en $x = -1$. No tiene máximo relativo.

La función decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en $(-1, +\infty)$.

Para obtener los posibles puntos de inflexión averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f''(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x+2)e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $x = -2$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -5$ y la derivada segunda vale

$$f''(-5) = (-5+2)e^{-5} = \frac{-3}{e^5} < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = (0+2)e^0 = 2 > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (-2, +\infty).$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = -2$.

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, -2)$ y convexa ($\cup$) en $(-2, +\infty)$.

Asíntota vertical $x = a$

Como el dominio de la función son todos los números reales podemos afirmar que no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

Dada la expresión de la función $f(x) = xe^x$ calculamos los límites de la función cuando x tiende a $-\infty$ y a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

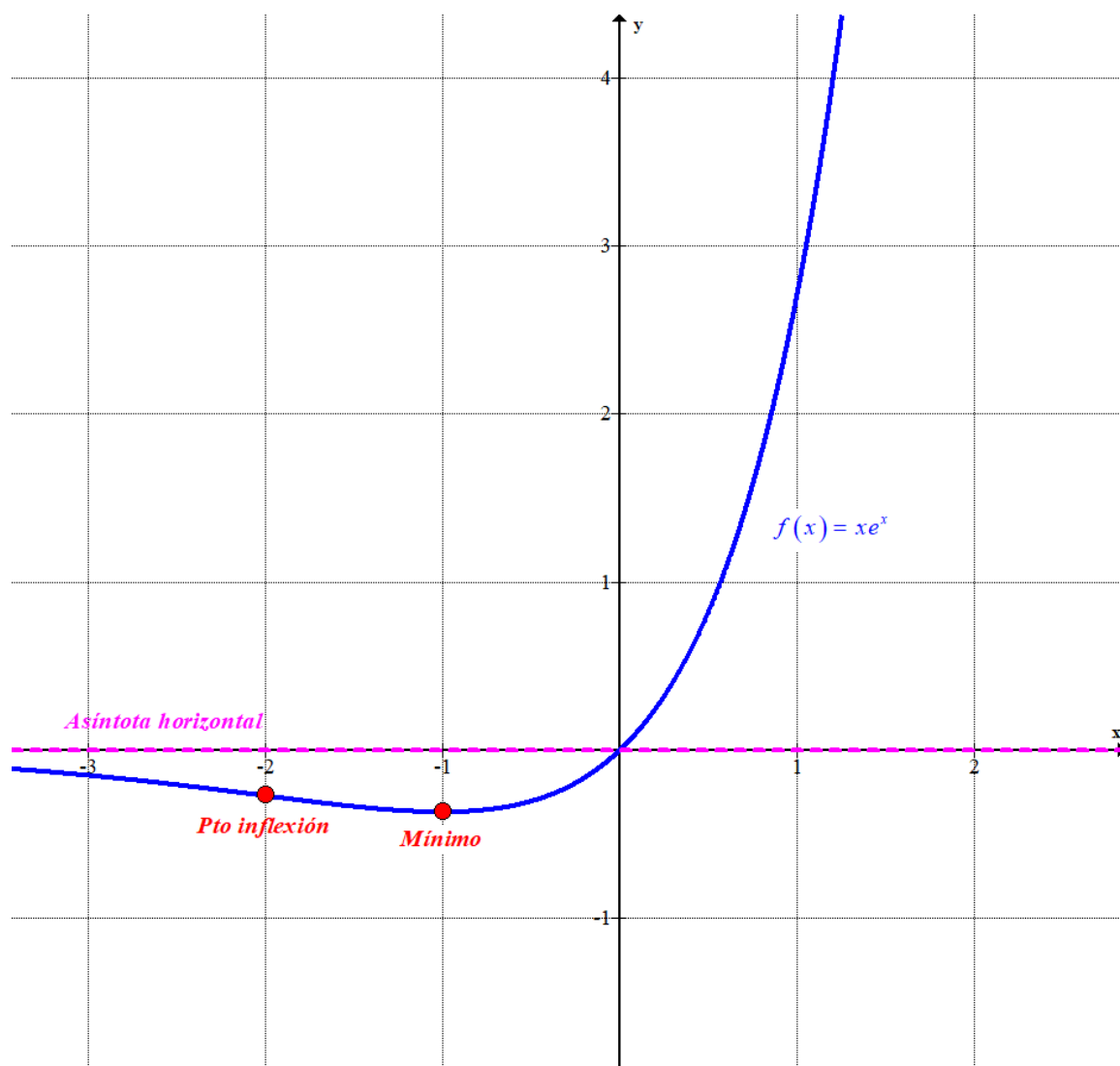
Como la función tiene una asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$ solo puede existir asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$$

La función no presenta asíntota oblicua.

Hacemos una tabla de valores y usando la información obtenida dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = xe^x$
-5	$-5 \cdot e^{-5} \approx -0.034$
-2	$-2 \cdot e^{-2} \approx -0.27$ <i>Punto de inflexión</i>
-1	$-e^{-1} \approx -0.36$ <i>Mínimo</i>
0	0
2	$2 \cdot e^2 \approx 14.8$



E4.-

a) Calcular el valor de a , siendo $a > 0$, para que el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = ax$ y $g(x) = x^2$ sea 36. **(1,5 puntos)**

b) Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{e^x - 1}$. **(1 punto)**

a) Determinamos el punto de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow ax = x^2 \Rightarrow ax - x^2 = 0 \Rightarrow x(a - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a - x = 0 \rightarrow x = a \end{cases}$$

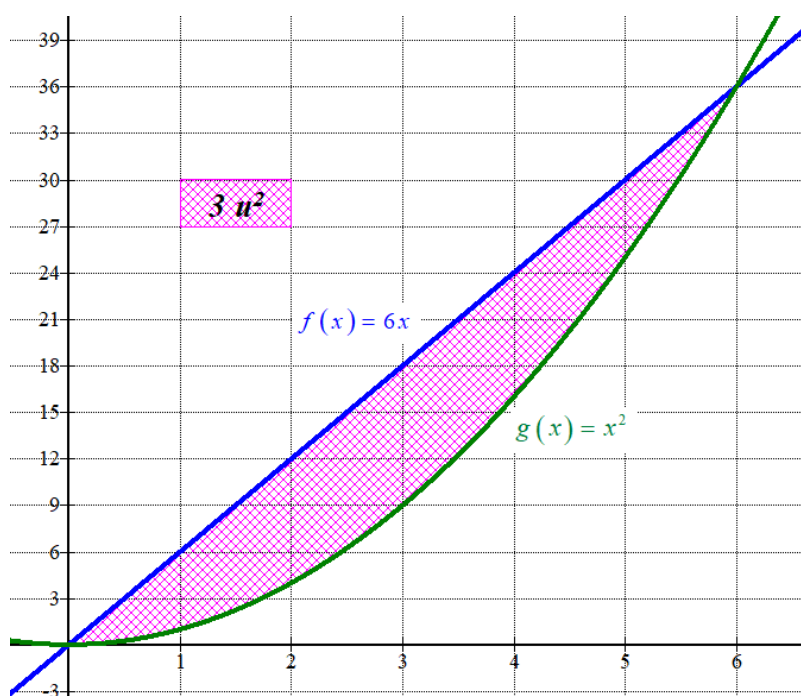
Como nos dicen que $a > 0$ el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = ax$ y $g(x) = x^2$ es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y a de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^a f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_0^a ax - x^2 dx \right| = \left| \left[a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a \right| = \\ &= \left| \left[a \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right] - \left[a \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] \right| = \left| \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right| = \left| \frac{3a^3 - 2a^3}{6} \right| = \left| \frac{a^3}{6} \right| = \{a > 0\} = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

Averiguamos cuando el área vale 36.

$$\text{Área} = 36 \Rightarrow \frac{a^3}{6} = 36 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = \sqrt[3]{216} = 6$$

Para $a = 6$ el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = 6x$ y $g(x) = x^2$ vale 36.



b) Calculamos el valor del límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{\sin(0)} - 1}{e^0 - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)}{e^x} = \frac{e^{\sin(0)} \cdot \cos(0)}{e^0} = \frac{1 \cdot 1}{1} = \boxed{1}$$

