



**Universidad de
Castilla-La Mancha**

Prueba de Acceso para mayores de 25 y 45 años

Materia: Matemáticas

Instrucciones:

Se deberá contestar a **CINCO** ejercicios, dos de los cuales presentan opcionalidad. En esos ejercicios hay que elegir solo **UNA OPCIÓN**. Si se aportaran más de cinco ejercicios resueltos, en aquellos con opcionalidad se tomará únicamente **LA PRIMERA DE LAS OPCIONES RESUELTA**. La resolución de los ejercicios debe redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Sólo se permite el uso de calculadoras de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntúa 2 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

1. (2 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcula los parámetros a y b , de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x=1$

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y - z = a \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$$

a) (1,25 puntos) Discute el sistema en función del valor del parámetro a .

b) (0,75 puntos) Resuelve, de manera razonada, el sistema para $a=1$.

3. Se considera el plano $\pi \equiv 2x + 3y - z + 5 = 0$ y el punto $A(-1, 2, 1)$

a) (0,50 puntos) Determina la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A

b) (0,75 puntos) Halla el punto P, intersección de π con la recta obtenida en el apartado anterior.

c) (0,75 puntos) Determina el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (a, -a, 1)$ y $\vec{v} = (3, a, -2)$ sean ortogonales.

4. CONTESTE SOLO UNA DE LAS SIGUIENTES OPCIONES, OPCIÓN A U OPCIÓN B.

OPCIÓN A. La probabilidad de que sea defectuosa la producción de un cierto modelo de televisor es de 0,05. Si se eligen al azar 10 televisores de ese modelo, halla la probabilidad de que:

A.1) (0,5 puntos) No haya ninguno defectuoso

A.2) (0,5 puntos) Haya tres defectuosos

A.3) (1 punto) Haya al menos dos defectuosos

OPCIÓN B. Se sabe que en una ciudad el 65% de la población consume aceite del tipo I, el 40% del tipo II y el 25% consume ambos aceites. Se elige al azar una persona y se desea saber:

B.1) (1 punto) Si consume aceite de tipo I, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también del tipo II?

B.2) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite?

5. CONTESTE SOLO UNA DE LAS SIGUIENTES OPCIONES, OPCIÓN A U OPCIÓN B.**OPCIÓN A**

A.1) (1,25 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos.

A.2) (0,75 puntos) Resuelve la siguiente integral indefinida $\int x^2 e^x dx$

OPCIÓN B

B.1) (1,25 puntos) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + a$. Obtener los valores de los parámetros a , b y c para que la gráfica de f pase por el punto (0,1) y tenga un mínimo en el punto (1,1).

B.2) (0,75 puntos) Resuelve, razonadamente, el siguiente límite. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

p r	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
9	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0260	.0207	.0101	.0046	.0023	.0020
1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1171	.1004	.0605	.0339	.0202	.0176
2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2688	.2341	.2162	.1612	.1110	.0776	.0703
3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2731	.2716	.2508	.2119	.1739	.1641
4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2048	.2194	.2508	.2600	.2506	.2461
5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1024	.1181	.1672	.2128	.2408	.2461
6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0341	.0424	.0743	.1160	.1542	.1641
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0073	.0098	.0212	.0407	.0635	.0703
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0013	.0035	.0083	.0153	.0176
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0020
10	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0173	.0135	.0060	.0025	.0012	.0010
1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0867	.0725	.0403	.0207	.0114	.0098
2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1951	.1757	.1209	.0763	.0495	.0439
3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2601	.2522	.2150	.1665	.1267	.1172
4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2276	.2377	.2508	.2384	.2130	.2051
5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1366	.1536	.2007	.2340	.2456	.2461
6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0596	.0689	.1115	.1596	.1966	.2051
7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0163	.0212	.0425	.0746	.1080	.1172
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0030	.0043	.0106	.0229	.0389	.0439
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0005	.0016	.0042	.0083	.0098
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0010

SOLUCIONES

1. (2 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcula los parámetros a y b , de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x=1$

Para que la función sea continua en $x=1$ deben de coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 + b \cdot 1 + 3 = b + 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + bx + 3 = b + 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + 1 = a \cdot 1^2 + 1 = a + 1 \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + 4 = a + 1 \Rightarrow \boxed{b = a - 3}$$

Para el valor obtenido la función queda $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + (a-3)x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Esta función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ y su derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ 2x + a - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Para que la función sea derivable en $x=1$ deben coincidir las derivadas laterales en dicho valor.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2ax = 2a \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + a - 3 = 2 + a - 3 = a - 1 \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - 1 = 2a \Rightarrow \boxed{-1 = a}$$

Para $a = -1$ tenemos que $b = -1 - 3 = -4$. Los valores que hacen continua y derivable la función en $x=1$ son $a = -1$ y $b = -4$.

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y - z = a \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$$

a) (1,25 puntos) Discute el sistema en función del valor del parámetro a .

b) (0,75 puntos) Resuelve, de manera razonada, el sistema para $a = 1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = -a + 4 - 1 - 2 - a - 2 = -1 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -1 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Distinguimos dos casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -\frac{1}{2}$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = -\frac{1}{2}$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad -1/2 \quad 0 \\ -2 \quad -2 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3/2 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1/2 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 3 \quad 3/2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & -2 & 3 & 3/2 \\ 0 & -1 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad -2 \quad 3 \quad 3/2 \\ 0 \quad 2 \quad -3 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1/2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & & \overbrace{A/B} & \\ 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & -2 & 3 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

Resumiendo: Si $a \neq \frac{-1}{2}$ el sistema es compatible determinado (1 única solución) y si

$a = \frac{-1}{2}$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z - x \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 - z + x + 2z = 1 \\ 2x + 1 + z - x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 2 \\ x + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 2 - 2x \\ x + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow x + 2(2 - 2x) = -1 \Rightarrow x + 4 - 4x = -1 \Rightarrow -3x = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{z = 2 - 2 \cdot \frac{5}{3} = 2 - \frac{10}{3} = \frac{-4}{3}} \Rightarrow \boxed{y = 1 - \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = 1 - \frac{9}{3} = -2}$$

La solución del sistema es $x = \frac{5}{3}$, $y = -2$, $z = \frac{-4}{3}$.

3. Se considera el plano $\pi \equiv 2x + 3y - z + 5 = 0$ y el punto $A(-1, 2, 1)$

a) (0,50 puntos) Determina la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A

b) (0,75 puntos) Halla el punto P, intersección de π con la recta obtenida en el apartado anterior.

c) (0,75 puntos) Determina el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (a, -a, 1)$ y $\vec{v} = (3, a, -2)$ sean ortogonales.

a) La recta perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 2x + 3y - z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 3, -1) \\ A(-1, 2, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A es $r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Hallamos el punto de corte de plano y recta resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + 3y - z + 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-1 + 2\lambda) + 3(2 + 3\lambda) - (1 - \lambda) + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + 4\lambda + 6 + 9\lambda - 1 + \lambda + 5 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 8 = 0 \Rightarrow 14\lambda = -8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-8}{14} = \frac{-4}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\frac{-4}{7} = \frac{-15}{7} \\ y = 2 + 3\frac{-4}{7} = \frac{2}{7} \\ z = 1 - \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{11}{7} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{-15}{7}, \frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

El punto de corte del plano π con la recta r es $P\left(\frac{-15}{7}, \frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right).$

c) Para que dos vectores sean ortogonales su producto escalar debe ser 0.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (a, -a, 1) \\ \vec{v} = (3, a, -2) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, -a, 1)(3, a, -2) = 0 \Rightarrow 3a - a^2 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = \boxed{1=a} \\ \frac{-3-1}{-2} = \boxed{2=a} \end{cases}$$

Los vectores $\vec{u} = (a, -a, 1)$ y $\vec{v} = (3, a, -2)$ son ortogonales para $a = 1$ y para $a = 2$.

4. OPCIÓN A. La probabilidad de que sea defectuosa la producción de un cierto modelo de televisor es de 0,05. Si se eligen al azar 10 televisores de ese modelo, halla la probabilidad de que:

A.1) (0,5 puntos) No haya ninguno defectuoso

A.2) (0,5 puntos) Haya tres defectuosos

A.3) (1 punto) Haya al menos dos defectuosos

Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de televisores defectuosos en una cadena de producción. Esta variable es una binomial siendo $p = 0.05$ la probabilidad de que un televisor sea defectuoso y $n = 10$ las repeticiones del experimento. $X = B(10, 0.05)$.

A.1) Nos piden calcular $P(X = 0)$. Mirando en la tabla sabemos que esta probabilidad vale 0.5987.

n	p r	.01	.05	.10	.15	.20	.25
9	0	.9135	.6002	.3874	.2316	.1342	.0751
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031

A.2) Nos piden calcular $P(X = 3)$. Mirando en la tabla vemos que esta probabilidad vale 0.0151.

n	p r	.01	.05	.10	.15	.20	.25
9	0	.9135	.6002	.3874	.2316	.1342	.0751
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584

A.3) Nos piden calcular $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = \dots$$

n	p r	.01	.05	.10	.15	.20
9	0	.9135	.6002	.3874	.2316	.1342
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	0	.3770	.5987	.3487	.1969	.1074
	1	.0014	.3151	.3874	.3474	.2684
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264

Mirando en la tabla sabemos que esta probabilidad vale $1 - [0.5987 + 0.3151] = 0.0862$.

4. OPCIÓN B. Se sabe que en una ciudad el 65% de la población consume aceite del tipo I, el 40% del tipo II y el 25% consume ambos aceites. Se elige al azar una persona y se desea saber:
 B.1) (1 punto) Si consume aceite de tipo I, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también del tipo II?
 B.2) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite?

Llamamos A al suceso “la persona consume aceite del tipo I” y B al suceso “la persona consume acetite del tipo II”. Nos dicen que $P(A) = 0.65$, $P(B) = 0.40$ y $P(A \cap B) = 0.25$.

B.1) Nos piden el valor de $P(B/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.25}{0.65} = \boxed{\frac{5}{13} \approx 0.3846}$$

B.2) Nos piden el valor de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - [0.65 + 0.40 - 0.25] = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2} \end{aligned}$$

5. OPCIÓN A

A.1) (1,25 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos.

A.2) (0,75 puntos) Resuelve la siguiente integral indefinida $\int x^2 e^x dx$

A.1) Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4 = 0 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Tenemos un punto crítico en $x = 0$ y otro en $x = \frac{4}{3}$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) = 3 + 4 = 7 > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

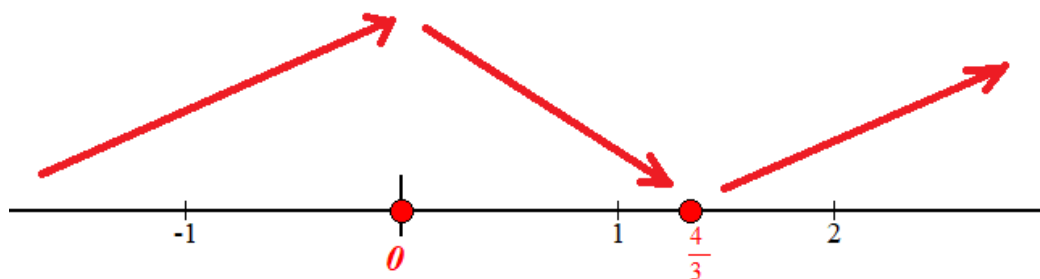
- En el intervalo $(0, \frac{4}{3})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 3 - 4 = -1 < 0. \text{ La función decrece en } (0, \frac{4}{3}).$$

- En el intervalo $(\frac{4}{3}, +\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(10) = 3 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 = 300 - 40 = 260 > 0. \text{ La función crece en } (\frac{4}{3}, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(0, \frac{4}{3})$ y crece en $(-\infty, 0) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$.

Como $f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$ la función presenta un máximo relativo en $(0, 1)$.

Como $f(\frac{4}{3}) = (\frac{4}{3})^3 - 2 \cdot (\frac{4}{3})^2 + 1 = \frac{-5}{27}$ la función presenta un mínimo relativo en $(\frac{4}{3}, \frac{-5}{27})$.

A.2) Resolvemos la integral indefinida pedida usando el método de integración por partes.

$$\int x^2 e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - \int e^x 2x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right] =$$

$$= x^2 e^x - 2 \left[x e^x - e^x \right] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x = \boxed{e^x (x^2 - 2x + 2) + C}$$

5. OPCIÓN B

B.1) (1,25 puntos) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + a$. Obtener los valores de los parámetros a , b y c para que la gráfica de f pase por el punto $(0,1)$ y tenga un mínimo en el punto $(1,1)$.

B.2) (0,75 puntos) Resuelve, razonadamente, el siguiente límite. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

B.1) Si la gráfica de f pasa por el punto $(0,1)$ se debe cumplir que $f(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + a \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + a \Rightarrow \boxed{1 = a}$$

La función queda $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$.

Si la función tiene un mínimo en el punto $(1, 1)$ significa que pasa por el punto y por tanto se debe cumplir que $f(1) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + 1 \Rightarrow 1 = 1 + b + c + 1 \Rightarrow \boxed{-1 = b + c}$$

Por tener un mínimo en el punto $(1, 1)$ la derivada se anula para $x = 1$, es decir, $f'(1) = 0$.

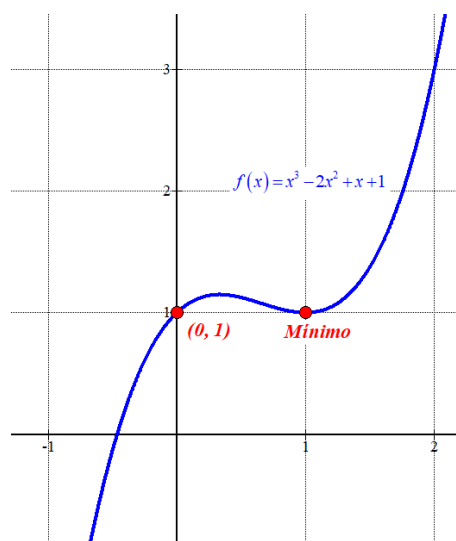
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c \Rightarrow \boxed{2b + c = -3}$$

Reunimos las dos igualdades obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} b + c = -1 \\ 2b + c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = -1 - b \\ 2b + c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2b - 1 - b = -3 \Rightarrow \boxed{b = -2} \Rightarrow \boxed{c = -1 - (-2) = 1}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$. La función queda $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

Comprobamos el resultado obtenido dibujando la gráfica de esta función.



B.2) Hallamos el valor de límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3^2 - 9}{3^2 - 5 \cdot 3 + 6} = \frac{0}{0} = \dots$$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 = 0 &\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \Rightarrow x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \\ x^2 - 5x + 6 = 0 &\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-2} = \frac{3+3}{3-2} = \boxed{6}$$