



PAU (MAIORES DE 25 ANOS)
2026

Código: 31

MATEMÁTICAS

El examen consta de dos partes y siete preguntas obligatorias. En la Parte 1 las tres preguntas son problemas, valorados con 2 puntos. En la Parte 2 las cuatro preguntas son tipo test, valoradas con 1 punto las correctas, 0 puntos las no contestadas y -0,5 las incorrectas.

PARTE 1

PREGUNTA 1. Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 4 & m & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde m es un número real. Se pide:

a) Obtenga los valores de m para los que A tiene inversa y resuelva, si es posible, el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en el caso en que } m = 0.$$

b) Diga, justificadamente, si el sistema $AA^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es compatible determinado cuando $m = -1$.

(2 puntos)

PREGUNTA 2. Si $\pi : ax + 2y + 3z = 12$, calcule α para que la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 3 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$, esté

contenida en el plano π .

(2 puntos)

PREGUNTA 3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$,

a) Determine su dominio de definición y, de haberlos, sus extremos (es decir, máximos y mínimos relativos)

b) Calcule el área limitada por la gráfica de f , las rectas $x = 3$ y $x = 4$, y el eje de abscisas.

(2 puntos)

PARTE 2

PREGUNTA 4. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) tiene inversa con determinante igual a 1.

b) no se puede invertir porque tiene un 0 en la segunda fila.

c) tiene inversa igual a la propia A .

(1 punto)

PREGUNTA 5. Si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ que definen un paralelepípedo, entonces

a) el producto mixto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ es igual al volumen del paralelepípedo.

- b) el valor absoluto del producto mixto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ es igual al volumen del paralelepípedo.
c) tres vectores no son suficientes para definir un paralelepípedo.

(1 punto)

PREGUNTA 6. El único plano π que tiene vector normal $\vec{n}_\pi = (0, 0, 1)$ y pasa por el origen es

- a) $\pi : x = 0$. b) $\pi : y = 0$. c) $\pi : z = 0$.

(1 punto)

PREGUNTA 7. El valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x + 1 - e^x}$ es

- a) $1/2$. b) 0 . c) 2 .

(1 punto)

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 4 & m & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde m es un número real. Se pide:

a) Obtenga los valores de m para los que A tiene inversa y resuelva, si es posible, el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en el caso en que } m = 0.$$

b) Diga, justificadamente, si el sistema $AA^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es compatible determinado cuando $m = -1$.

(2 puntos)

a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 4 & m & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 0 + 0 - 3m - 4 - 0 = m^2 - 3m - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = \boxed{4 = m} \\ \frac{3-5}{2} = \boxed{-1 = m} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 4 y -1 .

Intentamos resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en el caso en que $m = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 1 \\ 4x = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 1 \\ \boxed{x = 0} \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 1 \\ 0 + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 1 \\ \boxed{z = 0} \end{cases} \Rightarrow y + 3 \cdot 0 = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Para $m = 0$ la solución del sistema es $x = 0$; $y = 1$; $z = 0$.

b) He visto en el apartado anterior que para $m = -1$ la matriz A tiene determinante nulo.

La matriz de coeficientes asociada al sistema $AA^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es AA^T . Calculamos su determinante.

$$|AA^T| = |A||A^T| = 0 \cdot 0 = 0$$

Al ser el determinante de la matriz de coeficientes nulo su rango no es 3, por lo que el rango será menor que 3, y por tanto menor que el número de incógnitas. El sistema no puede ser compatible determinado.

PREGUNTA 2. Si $\pi : ax + 2y + 3z = 12$, calcule a para que la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 3 + \lambda, \end{cases}$ esté contenida en el plano π . **(2 puntos)**

Para que la recta esté contenida en el plano deben cumplirse dos cosas: el vector director de la recta y el normal del plano debe ser perpendiculares, por lo que su producto escalar debe ser nulo, además debemos comprobar que un punto cualquiera de la recta pertenece al plano.

El producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta debe ser nulo.

$$\pi : ax + 2y + 3z = 12 \Rightarrow \vec{n} = (a, 2, 3)$$

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + \lambda, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases}$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, -1, 1)(a, 2, 3) = 0 \Rightarrow a - 2 + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Para $a = -1$ la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos que el punto $P_r(1, 2, 3)$ perteneciente a la recta también pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(1, 2, 3) \in \pi? \\ a = -1 \rightarrow \pi : -x + 2y + 3z = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 12? \Rightarrow \text{¿} -1 + 4 + 9 = 12? \Rightarrow \text{¡¡SI!!}$$

Se cumple que cualquier punto de la recta r está en el plano. Podemos afirmar que para $a = -1$ la recta está contenida en el plano.

PREGUNTA 3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$,

a) Determine su dominio de definición y, de haberlos, sus extremos (es decir, máximos y mínimos relativos)

b) Calcule el área limitada por la gráfica de f , las rectas $x = 3$ y $x = 4$, y el eje de abscisas.

(2 puntos)

a) El denominador de la función se anula para $x = 1$ y $x = 2$. El dominio de definición de la función es $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x-1)(x-2) - 1 \cdot [1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (x-1)]}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-[x-2+x-1]}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2} = 0 \Rightarrow -2x+3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

El único punto crítico de la función es $x = \frac{3}{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de este valor y los dos valores excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{-2 \cdot 0 + 3}{(0-1)^2(0-2)^2} = \frac{3}{4} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 1).$$

- En el intervalo $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ tomamos $x = 1.25$ y la derivada vale

$$f'(1.25) = \frac{-2 \cdot 1.25 + 3}{(1.25-1)^2(1.25-2)^2} = \frac{0.5}{+} > 0. \text{ La función crece en } \left(1, \frac{3}{2}\right).$$

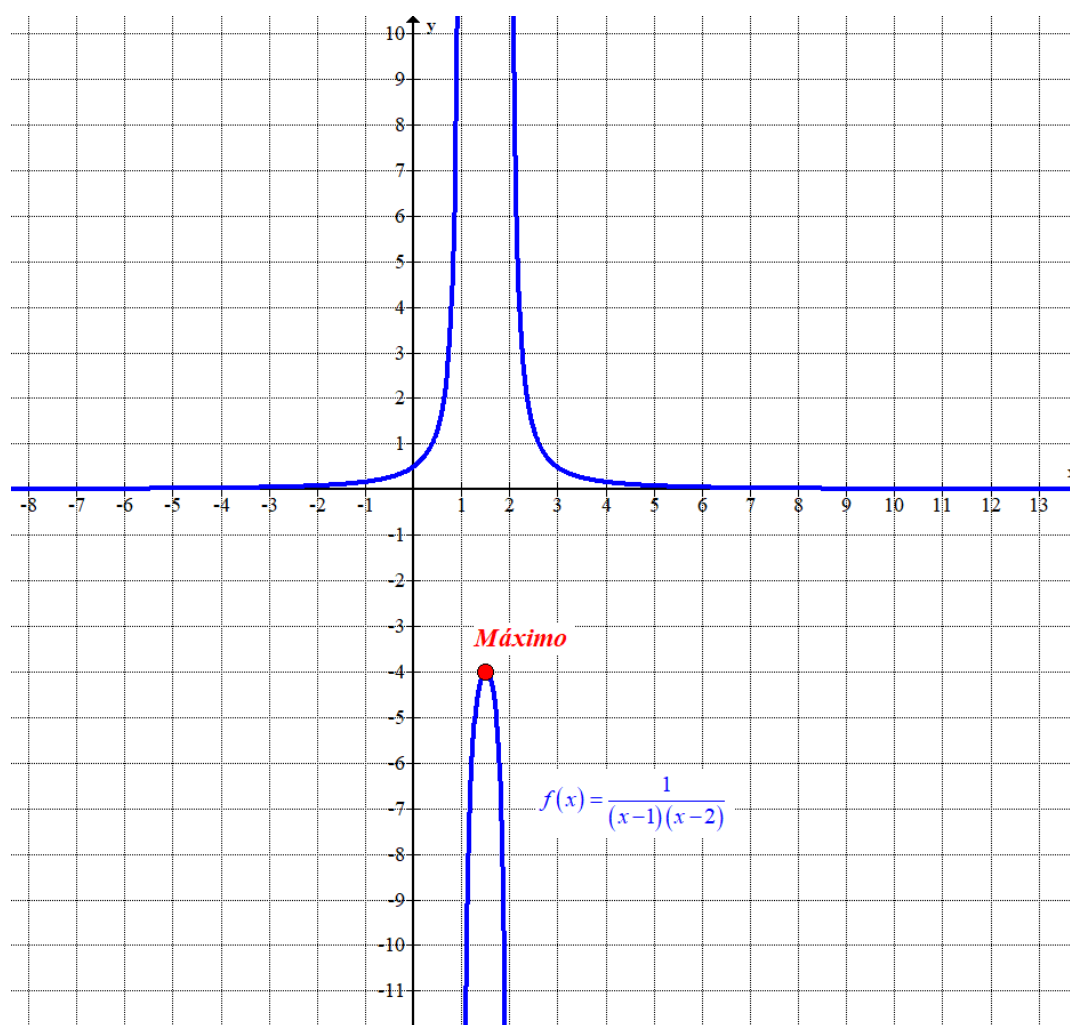
- En el intervalo $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ tomamos $x = 1.75$ y la derivada vale

$$f'(1.75) = \frac{-2 \cdot 1.75 + 3}{(1.75-1)^2(1.75-2)^2} = \frac{-0.5}{+} < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{-2 \cdot 3 + 3}{(3-1)^2(3-2)^2} = \frac{-3}{4} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 1).$$

La función crece antes de $x = \frac{3}{2}$ y decrece después. La función tiene un máximo relativo en este valor. Como $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)} = -4$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$. La función no presenta mínimo relativo.



- b) La función $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ no corta el eje de abscisas pues nunca se anula. El área limitada por la gráfica de f , las rectas $x = 3$ y $x = 4$, y el eje de abscisas es el valor de la integral definida de la función entre 3 y 4. En ese intervalo la función es continua. Hallamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 1 = 0 + B(2-1) \rightarrow B=1 \\ x=1 \rightarrow 1 = A(1-2) + 0 \Rightarrow A=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

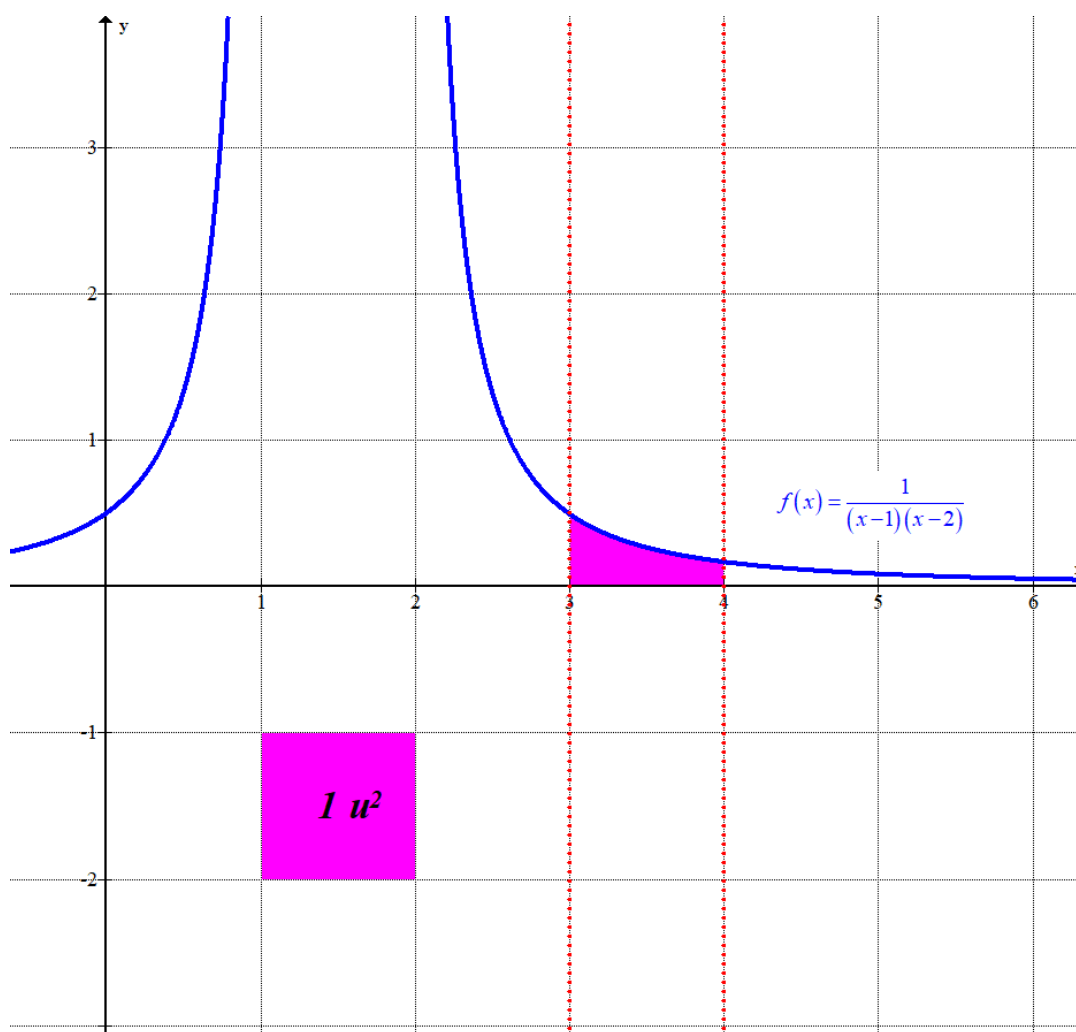
$$\dots = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$$

Aplicamos lo obtenido al cálculo del área.

$$\int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| \right]_3^4 = \left[\ln\left|\frac{4-2}{4-1}\right| \right] - \left[\ln\left|\frac{3-2}{3-1}\right| \right] =$$

$$= \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\ln\frac{4}{3} \simeq 0.2877 u^2}$$

el área limitada por la gráfica de f , las rectas $x=3$ y $x=4$, y el eje de abscisas tiene un valor aproximado de 0.29 unidades cuadradas.



PREGUNTA 4. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) tiene inversa con determinante igual a 1.
- b) no se puede invertir porque tiene un 0 en la segunda fila.
- c) tiene inversa igual a la propia A.

(1 punto)

- a) Calculamos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Al tener determinante igual a 1 distinto de cero la matriz A tiene inversa. La afirmación es correcta.

- b) Falso. La matriz no se podría invertir si toda la segunda fila estuviese formada por 0.

- c) Para que la inversa de la matriz A sea la propia A se debe cumplir que $AA = I_2$.

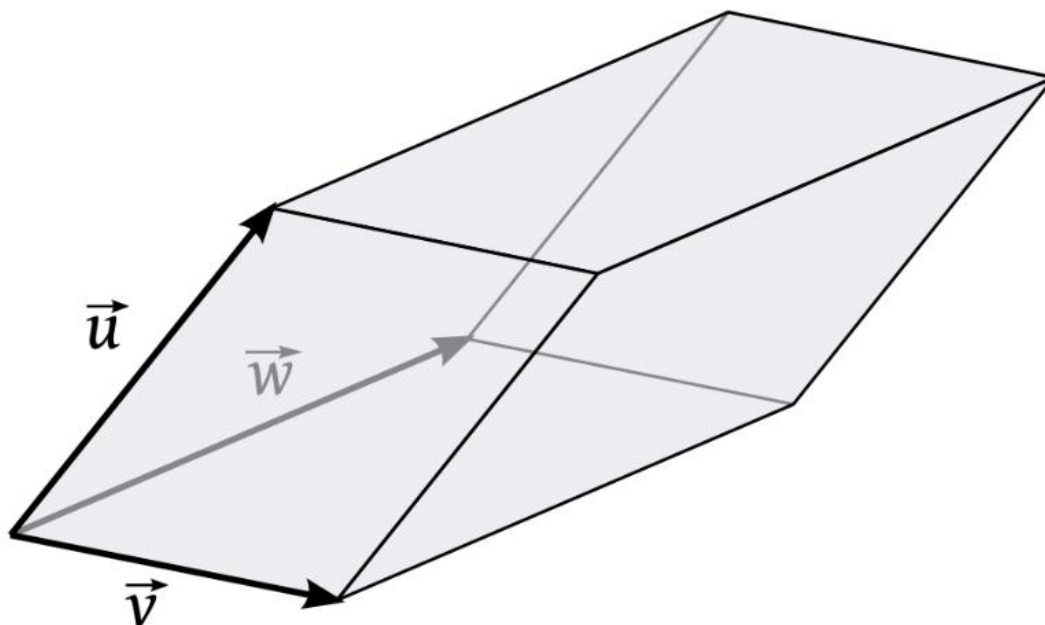
$$AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El elemento de la primera fila y primera columna del producto AA no es 0. Es falsa la afirmación. La inversa de la matriz A no es la propia A

- PREGUNTA 5.** Si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ que definen un paralelepípedo, entonces
- a) el producto mixto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ es igual al volumen del paralelepípedo.
 - b) el valor absoluto del producto mixto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ es igual al volumen del paralelepípedo.
 - c) tres vectores no son suficientes para definir un paralelepípedo.

(1 punto)

- a) No es cierto. El producto mixto puede tener un valor positivo o negativo, y el volumen del paralelepípedo no puede ser negativo. La afirmación correcta es: el valor absoluto del producto mixto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ es igual al volumen del paralelepípedo.
- b) Es correcta.
- c) No es correcta. Tres vectores son suficientes para definir un paralelepípedo, el resto de aristas del paralelepípedo son paralelas a los vectores y con la misma longitud.



PREGUNTA 6. El único plano π que tiene vector normal $\vec{n}_\pi = (0,0,1)$ y pasa por el origen es
a) $\pi : x = 0$. b) $\pi : y = 0$. c) $\pi : z = 0$.

(1 punto)

Si el vector normal de un plano es $\vec{n}_\pi = (0,0,1)$ la ecuación del plano es $\pi : 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + D = 0$ que simplificando es $\pi : z + D = 0$. Si además pasa por el origen $O(0,0,0)$ podemos determinar el valor de D obligando a que el punto O cumpla la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : z + D = 0 \\ O(0,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : z = 0}$$

La ecuación del plano que cumple lo pedido es $\pi : z = 0$.

La afirmación del apartado a) y del b) son falsas. Es cierta la afirmación del apartado c).

PREGUNTA 7. El valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x+1-e^x}$ es

- a) 1/2. b) 0. c) 2.

(1 punto)

Calculamos el valor del límite planteado.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x+1-e^x} = \frac{\sin 0}{3 \cdot 0 + 1 - e^0} = \frac{0}{0+1-1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L.Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3 - e^x} = \frac{\cos 0}{3 - e^0} = \frac{1}{3-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

La afirmación correcta es la a). Las afirmaciones de los apartados b) y c) son falsas.