



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS
2026

185–MATEMÁTICAS II

IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases}$$

- a) [0,75 p.] Determine para qué valores de a el sistema es compatible determinado.
- b) [0,75 p.] Determine para qué valores de a el sistema es compatible indeterminado y para qué valores de a el sistema es incompatible.
- c) [1 p.] Resuélvalo para $a = 1$.

1B) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) [1 p.] Compruebe que la matriz $A + B$ es regular (o invertible) y calcule su matriz inversa.
- b) [1,5 p.] Resuelva la ecuación matricial $2A - AX = BX$.

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Se quiere construir un depósito cilíndrico sin tapa que debe tener volumen 500 m^3 . El material de la base cuesta $4€/m^2$ y el material lateral cuesta $2€/m^2$. Sea r el radio de la base (en metros), h la altura del depósito (en metros).

- a) [0,75 p.] Compruebe que el coste total en función del radio es $C(r) = 4\pi r^2 + \frac{2000}{r}$.
- b) [1 p.] Halle el valor de r que minimiza el coste.
- c) [0,75 p.] Calcule el valor de h que minimiza el coste.

2B) Considere la función $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$.

- a) [1,5 p.] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$.
- b) [1 p.] Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 3$.

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) Considere las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1} \text{ y } s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

a) [1,5 p.] Estudie su posición relativa.

b) [1 p.] Encuentre la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a r y es perpendicular a s .

3B) Considere el cuadrilátero formado por los puntos del espacio de coordenadas $A(1,0,2)$, $B(3,1,4)$, $C(6,3,5)$, y $D(4,2,3)$, siendo los vértices B y D adyacentes a A .

a) [1 p.] Compruebe que el cuadrilátero es un paralelogramo.

b) [0,5 p.] Calcule el área de dicho paralelogramo.

c) [1 p.] Calcule el punto de corte de las dos diagonales de dicho paralelogramo.

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) Un estudio analiza el uso de una plataforma de música. Se sabe que el 70% de los usuarios utiliza la plataforma desde el móvil. El 30% la usa desde ordenador. El 40% de los que usan móvil tiene suscripción premium. El 20% de los que usan ordenador tiene suscripción premium.

a) [0,75 p.] Calcule la probabilidad de que un usuario elegido al azar tenga suscripción premium.

b) [1 p.] Calcule la probabilidad de que un usuario use el móvil sabiendo que tiene suscripción premium.

c) [0,75 p.] Estudie si los sucesos “usar móvil” y “tener suscripción premium” son independientes.

4B) Un examen tipo test consta de ocho preguntas. Cada pregunta presenta cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si se contesta a todas las preguntas al azar, calcule la probabilidad de:

a) [0,5 p.] Acertar todas las preguntas. Dé el resultado con 8 decimales.

b) [0,5 p.] Fallar todas las preguntas. Dé el resultado con 4 decimales.

c) [1,5 p.] Acertar más de cuatro preguntas. Dé el resultado con 4 decimales.

SOLUCIONES

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases}$$

- a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de a el sistema es compatible determinado.
 b) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de a el sistema es compatible indeterminado y para qué valores de a el sistema es incompatible.
 c) **[1 p.]** Resuélvalo para $a = 1$.

Discutimos el sistema y después respondemos a lo planteado en cada apartado.

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & a \\ 3 & 2 & -a & 4 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{vmatrix} = a - 3 + 4 + 3 - 2a - 2 = -a + 2$.

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 2 \quad -2 \quad 4 \\ -3 \quad 3 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 5 \quad -5 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{A/B} & & \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \underbrace{0 & 0}_A & 0 & 1 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son diferentes.

El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

- a) El sistema es compatible determinado para cualquier valor de a distinto de 2.
- b) El sistema nunca es compatible indeterminado. El sistema es incompatible para $a = 2$.
- c) Lo resolvemos para $a = 1$. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1).

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - x + y \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 - x + y = 1 \\ 3x + 2y - 1 + x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 4x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow 4 \cdot 0 + y = 5 \Rightarrow \boxed{y=5} \Rightarrow \boxed{z=1-0+5=6}$$

La solución del sistema para $a = 1$ es $x = 0$, $y = 5$, $z = 6$.

1B) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que la matriz $A + B$ es regular (o invertible) y calcule su matriz inversa.

b) **[1,5 p.]** Resuelva la ecuación matricial $2A - AX = BX$.

a) Calculamos el determinante de la matriz $A + B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$$

El determinante de la matriz $A + B$ es distinto de cero y existe la matriz inversa.

Calculamos la expresión de la matriz $(A + B)^{-1}$.

$$(A + B)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A + B)^t\right)}{|A + B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$2A - AX = BX \Rightarrow 2A = AX + BX \Rightarrow 2A = (A + B)X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A + B)^{-1} 2A = X \Rightarrow X = 2(A + B)^{-1} A$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} X &= 2(A + B)^{-1} A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2-0 & 1+0 \\ -1+3/2 & -1/2+1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

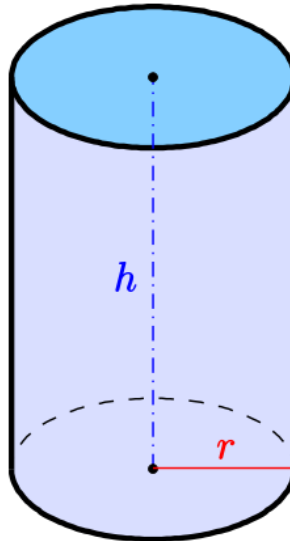
La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2A) Se quiere construir un depósito cilíndrico sin tapa que debe tener volumen 500 m^3 . El material de la base cuesta 4 €/m^2 y el material lateral cuesta 2 €/m^2 . Sea r el radio de la base (en metros), h la altura del depósito (en metros).

a) [0,75 p.] Compruebe que el coste total en función del radio es $C(r) = 4\pi r^2 + \frac{2000}{r}$.

b) [1 p.] Halle el valor de r que minimiza el coste.

c) [0,75 p.] Calcule el valor de h que minimiza el coste.



a) La base es un círculo de radio r que tiene una superficie de $\pi r^2 \text{ m}^2$ que a un precio de 4 €/m^2 nos costaría $4\pi r^2$ euros.

El lateral es un rectángulo de base la longitud de una circunferencia de radio r y de altura h , es decir, $2\pi r h$, que a un precio de 2 €/m^2 nos costaría $4\pi r h$ euros.

En total nos costaría el material del cilindro sin tapa $4\pi r h + 4\pi r^2$ euros.

El volumen del cilindro es el producto del área de la base por la altura: $\text{Volumen} = \pi r^2 \cdot h$.

Además, sabemos que el depósito cilíndrico sin tapa debe tener un volumen de 500 m^3 , por lo que debe ser $\pi r^2 h = 500$ y despejando tenemos que $h = \frac{500}{\pi r^2}$. Sustituimos lo obtenido en el

coste total y obtenemos la expresión del coste total en función del radio de la base.

$$\left. \begin{array}{l} C(r, h) = 4\pi r h + 4\pi r^2 \\ h = \frac{500}{\pi r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow C(r) = 4\pi r \frac{500}{\pi r^2} + 4\pi r^2 = \frac{2000}{r} + 4\pi r^2$$

b) Derivamos la función coste obtenida y averiguamos cuando se anula su derivada (puntos críticos).

$$C(r) = 4\pi r^2 + \frac{2000}{r} \Rightarrow C'(r) = 8\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$C'(r) = 0 \Rightarrow 8\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 8\pi r = \frac{2000}{r^2} \Rightarrow 8\pi r^3 = 2000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{2000}{8\pi} = \frac{250}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$$

La función tiene un punto crítico en $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4.3$ tomamos $r=1$ y la derivada vale

$$C'(1) = 8\pi - \frac{2000}{1^2} = 8\pi - 2000 < 0. \text{ La función coste decrece antes de } r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}.$$

- Después de $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4.3$ tomamos $r=10$ y la derivada vale

$$C'(10) = 80\pi - \frac{2000}{10^2} = 80\pi - 20 \approx 231 > 0. \text{ La función coste crece después de } r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}.$$

El coste decrece antes y crece después, por lo que para $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ el coste es mínimo.

El valor que minimiza el coste del depósito cilíndrico sin tapa con 500 m^3 de capacidad es un depósito de radio $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4.3$ metros.

b) Para un radio de $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ obtenemos el valor de la altura del cilindro.

$$h = \frac{500}{\pi r^2} = \frac{500}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \right)^2} \approx 8.6$$

El valor que minimiza el coste del depósito cilíndrico sin tapa con 500 m^3 de capacidad es un depósito de altura $h = \frac{500}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \right)^2} \approx 8.6$ metros

$$\pi \left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \right)^2$$

2B) Considere la función $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$.

a) [1,5 p.] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$.

b) [1 p.] Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=3$.

a) Calculamos la integral pedida.

$$\int f(x) dx = \int x\sqrt{x^2+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2+1=t \rightarrow 2x dx = dt \rightarrow dx = \frac{1}{2x} dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int x\sqrt{t} \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2} \int t^{1/2} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{1+1/2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{3} \sqrt{t^3} = \boxed{\frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C}$$

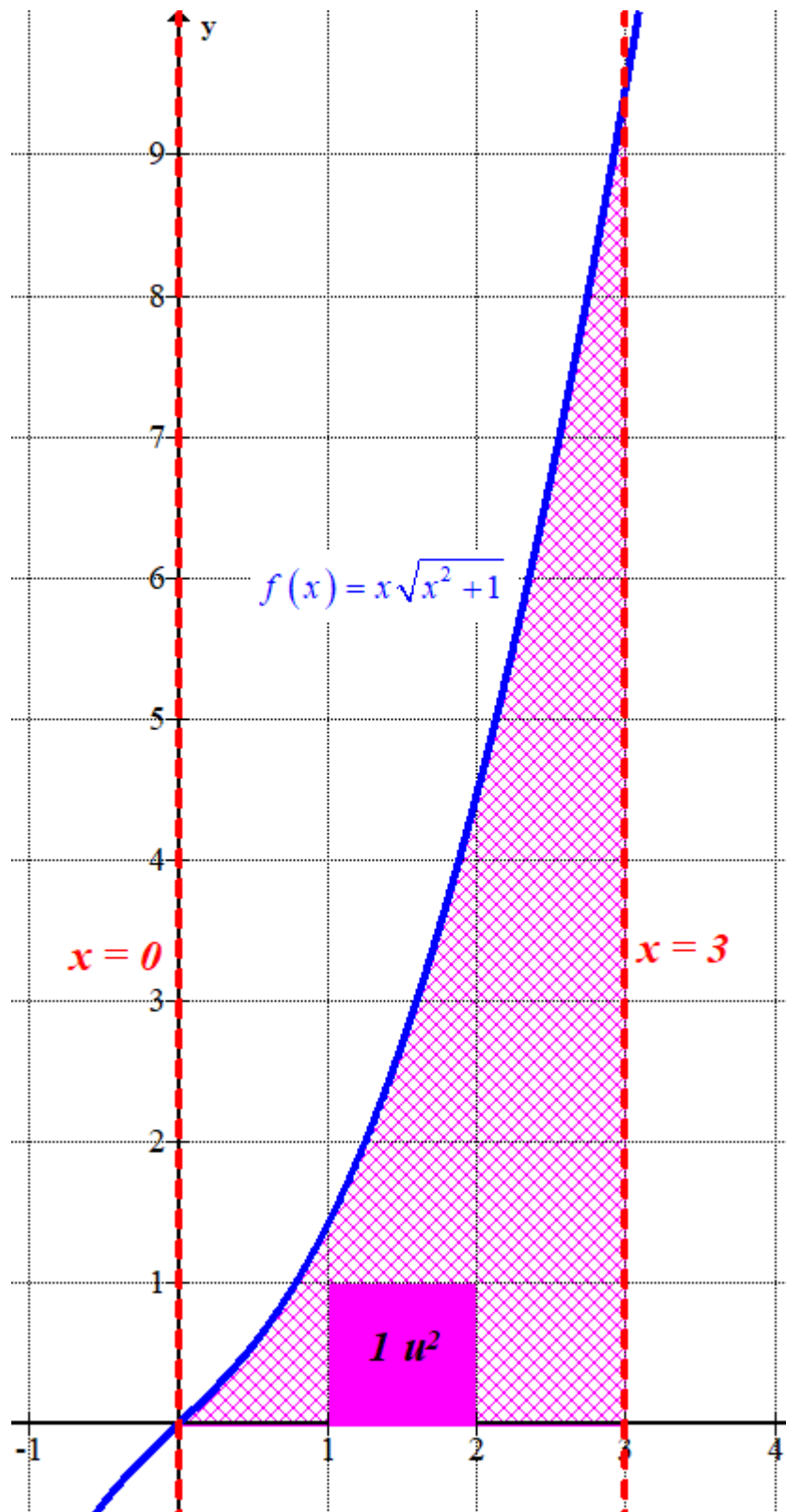
b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x\sqrt{x^2+1} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x\sqrt{x^2+1} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x=0} \\ x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=\sqrt{-1} \text{ ¡Imposible!} \end{array} \right.$$

El único punto de corte de la gráfica con el eje OX está en $x=0$.

Como la función $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ es positiva en el intervalo $(0, 3)$ el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=3$ es el valor de la integral definida de 0 a 3 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 x\sqrt{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} \right]_0^3 = \\ &= \left[\frac{1}{3} \sqrt{(3^2+1)^3} \right] - \left[\frac{1}{3} \sqrt{(0^2+1)^3} \right] = \boxed{\frac{\sqrt{1000}}{3} - \frac{1}{3} \approx 10.21 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



3A) Considere las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1} \text{ y } s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

a) [1,5 p.] Estudie su posición relativa.

b) [1 p.] Encuentre la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a r y es perpendicular a s .

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, -1, 3) \\ \vec{u}_r = (2, 1, -1) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(2, 3, 1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{cases}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes, pues las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ para determinar en qué posición relativa están las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, -1, 3) \\ Q_s(2, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (2, 3, 1) - (1, -1, 3) = (1, 4, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 4, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 4 - 1 + 2 - 8 = -6 \neq 0$$

El producto mixto tiene un valor distinto de cero y las rectas se cruzan.

b) Para que sea posible la existencia de un plano perpendicular a s que contenga a r las rectas deben ser perpendiculares y para ello el producto escalar de sus vectores directores debe ser nulo. Comprobamos que las rectas son ortogonales y existe el plano pedido.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = (2, 1, -1) \cdot (1, -1, 1) = 2 - 1 - 1 = 0$$

Se cumple lo necesario para la existencia del plano pedido. Hallamos este plano como el plano perpendicular a s (tiene como vector normal el vector director de la recta) que contiene un punto cualquiera de la recta r .

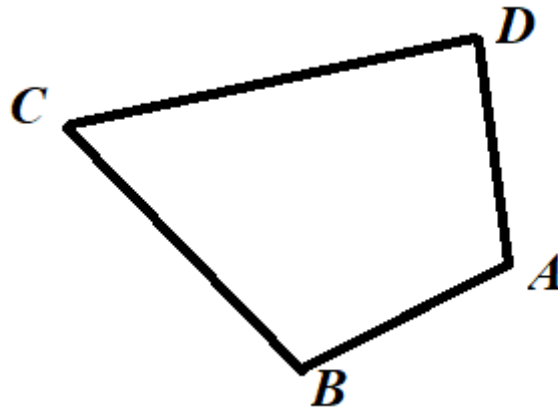
$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_s = (1, -1, 1) \\ P_r(1, -1, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x - y + z + D = 0 \\ P_r(1, -1, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - (-1) + 3 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y + z - 5 = 0}$$

La ecuación del plano π que contiene a r y es perpendicular a s es $\pi: x - y + z - 5 = 0$.

- 3B)** Considere el cuadrilátero formado por los puntos del espacio de coordenadas $A(1,0,2)$, $B(3,1,4)$, $C(6,3,5)$, y $D(4,2,3)$, siendo los vértices B y D adyacentes a A .
- a) [1 p.]** Compruebe que el cuadrilátero es un paralelogramo.
- b) [0,5 p.]** Calcule el área de dicho paralelogramo.
- c) [1 p.]** Calcule el punto de corte de las dos diagonales de dicho paralelogramo.

Dibujamos la situación planteada.



- a) Para que sea un paralelogramo debe ser los lados BC y AD paralelos y de la misma longitud. Esto se comprueba viendo si los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son iguales.

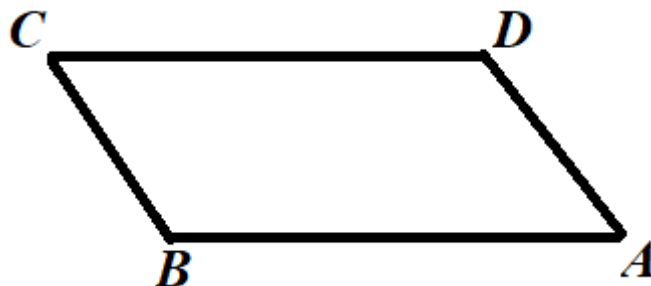
$$\left. \begin{array}{l} B(3,1,4) \\ C(6,3,5) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (6,3,5) - (3,1,4) = (3,2,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \\ D(4,2,3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (4,2,3) - (1,0,2) = (3,2,1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (3,2,1)$$

El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

- b) Calculamos el área del paralelogramo como el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ que lo definen.



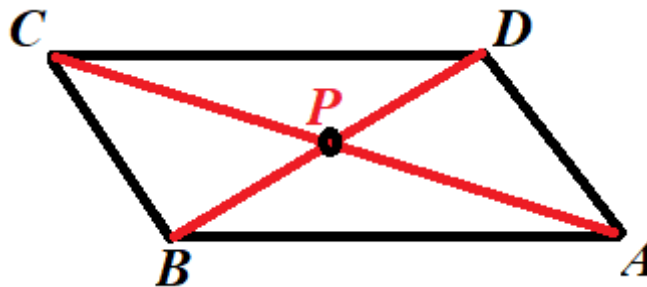
$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \\ B(3,1,4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3,1,4) - (1,0,2) = (2,1,2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = (3,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= i + 6j + 4k - 3k - 2j - 4i = -3i + 4j + k = (-3, 4, 1)$$

$$\text{Área } ABCD = |\overline{AB} \times \overline{AD}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{26} \approx 5.1u^2}$$

- c) El punto de corte de las dos diagonales del paralelogramo es el punto medio de cualquiera de las dos diagonales. Hallamos los dos puntos medios de los segmentos AC y BD comprobando que es el mismo punto y por tanto es el punto de corte de las dos diagonales.



$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \\ C(6,3,5) \end{array} \right\} \Rightarrow PM_{AC} = \frac{(1,0,2) + (6,3,5)}{2} = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} B(3,1,4) \\ D(4,2,3) \end{array} \right\} \Rightarrow PM_{BD} = \frac{(3,1,4) + (4,2,3)}{2} = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow PM_{AC} = PM_{BD} = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right) \end{array} \right\}$$

El punto de corte de las dos diagonales del paralelogramo es el punto $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right)$.

- 4A)** Un estudio analiza el uso de una plataforma de música. Se sabe que el 70% de los usuarios utiliza la plataforma desde el móvil. El 30% la usa desde ordenador. El 40% de los que usan móvil tiene suscripción premium. El 20% de los que usan ordenador tiene suscripción premium.
- a) [0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que un usuario elegido al azar tenga suscripción premium.
- b) [1 p.]** Calcule la probabilidad de que un usuario use el móvil sabiendo que tiene suscripción premium.
- c) [0,75 p.]** Estudie si los sucesos “usar móvil” y “tener suscripción premium” son independientes.

Pasamos estos datos porcentuales a valores absolutos suponiendo que son 100 los usuarios de una plataforma de música.

El 70% de los usuarios utiliza la plataforma desde el móvil, es decir, 70 de los usuarios usan el móvil. El 30% la usa desde ordenador, es decir, 30 de los usuarios usan el ordenador. El 40% de los que usan móvil (70) tiene suscripción premium, es decir, $0.40 \cdot 70 = 28$ usuarios de la plataforma usan móvil y tienen suscripción premium. El 20% de los que usan ordenador (30) tiene suscripción premium, es decir, $0.20 \cdot 30 = 6$ usuarios de la plataforma usan ordenador y tienen suscripción premium.

Ponemos esta información obtenida en una tabla.

	Móvil	Ordenador	
Premium	28	6	
No premium			
	70	30	100

Completamos la tabla.

	Móvil	Ordenador	
Premium	28	6	34
No premium	42	24	66
	70	30	100

Con estos datos y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

- a) De los 100 usuarios hay 34 con suscripción premium. La probabilidad de que un usuario elegido al azar tenga suscripción premium vale $\frac{34}{100} = 0.34$.
- b) Hay 34 usuarios premium y de ellos 28 usan el móvil. La probabilidad de que un usuario use el móvil sabiendo que tiene suscripción premium vale $\frac{28}{34} \approx 0.8235$.
- c) Llamamos $A = \text{“usar móvil”}$ y $B = \text{“tener suscripción premium”}$. Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\text{Usar móvil y ser premium}) = \frac{28}{100} = 0.28 \\ P(A)P(B) &= P(\text{Usar móvil})P(\text{Ser premium}) = \frac{70}{100} \cdot \frac{34}{100} = 0.238 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

- 4B)** Un examen tipo test consta de ocho preguntas. Cada pregunta presenta cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si se contesta a todas las preguntas al azar, calcule la probabilidad de:
- a) [0,5 p.]** Acertar todas las preguntas. Dé el resultado con 8 decimales.
- b) [0,5 p.]** Fallar todas las preguntas. Dé el resultado con 4 decimales.
- c) [1,5 p.]** Acertar más de cuatro preguntas. Dé el resultado con 4 decimales.

A cada pregunta del examen podemos responder A, B, C o D. Respondiendo al azar a las 8 preguntas del examen tenemos que se pueden responder a las preguntas del examen de $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^8 = 65536$ formas diferentes.

- a) Solo existe una forma de responder de forma correcta a todas las preguntas. La probabilidad de acertar en las 8 respuestas a las 8 preguntas vale $\frac{1}{65536} \approx 0.00001525$.

- b) Para fallar a una pregunta se deben responder cualquiera de las 3 opciones erróneas. Para fallar a todas las preguntas se deben elegir las 8 veces una de las 3 opciones erróneas. Hay $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8 = 6561$ formas de responder mal a todas las preguntas del examen. La probabilidad de fallar todas las preguntas vale $\frac{6561}{65536} \approx 0.1001$.

- c) Para acertar más de 4 preguntas se deben acertar 5, 6, 7 u 8 preguntas.
Para acertar las 8 preguntas hay 1 forma de conseguirlo.
Para acertar 7 preguntas se debe fallar solo 1. Hay 3 formas de fallar una pregunta. Hay 8 preguntas que se pueden fallar. En total hay $3 \cdot 8 = 24$ formas distintas de acertar 7 preguntas.
Para acertar 6 preguntas se debe fallar en 2 de las 8 preguntas: Hay $3 \cdot 3 = 3^2$ formas de fallar 2 preguntas cualesquiera. Hay $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ formas de elegir 2 preguntas del examen. En total

hay $\binom{8}{2} \cdot 3^2 = 28 \cdot 9 = 252$ formas distintas de acertar 6 preguntas.

Para acertar 5 preguntas se debe fallar en 3 de las 8 preguntas: Hay $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ formas de fallar 3 preguntas. Hay $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$ formas de elegir 3 preguntas del examen. En total hay

$\binom{8}{3} \cdot 3^3 = 56 \cdot 27 = 1512$ formas distintas de acertar 5 preguntas.

En total hay $1 + 24 + 252 + 1512 = 1789$ formas de acertar más de 4 preguntas.

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de acertar más de 4 preguntas vale $\frac{1789}{65536} \approx 0.0273$.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL EJERCICIO

Sea X = Número de preguntas respondidas correctamente en un examen con 8 preguntas, cada una con 3 respuestas erróneas y 1 correcta. Esta variable es una binomial donde la probabilidad de acertar (al azar) es $\frac{1}{4} = 0.25$, siendo 8 las repeticiones de la elección de respuesta. $X = B(8, 0.25)$.

- a) Nos piden calcular $P(X = 8)$.

$$P(X=8) = \binom{8}{8} 0.25^8 \cdot 0.75^0 = 0.25^8 = \frac{1}{65536}$$

b) Nos piden calcular $P(X=0)$.

$$P(X=0) = \binom{8}{0} 0.25^0 \cdot 0.75^8 = 0.75^8 = \frac{6561}{65536}$$

c) Nos piden calcular $P(X > 4)$.

$$P(X > 4) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) =$$

$$= \binom{8}{5} 0.25^5 \cdot 0.75^3 + \binom{8}{6} 0.25^6 \cdot 0.75^2 + \binom{8}{7} 0.25^7 \cdot 0.75^1 + \binom{8}{8} 0.25^8 \cdot 0.75^0 =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot 0.25^5 \cdot 0.75^3 + \frac{8 \cdot 7}{2} 0.25^6 \cdot 0.75^2 + \frac{8}{1} 0.25^7 \cdot 0.75 + 0.25^8 =$$

$$= 56 \cdot 0.25^5 \cdot 0.75^3 + 28 \cdot 0.25^6 \cdot 0.75^2 + 8 \cdot 0.25^7 \cdot 0.75 + 0.25^8 = \boxed{\frac{1789}{65536}}$$