

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**INDICACIONES**

- El examen consta de 3 apartados, todos ellos obligatorios. Cada apartado contiene una o dos opciones. Cuando en un apartado haya dos opciones, se escogerá únicamente una.
- En caso de resolver más de una opción en algún apartado, se corregirá únicamente la que aparezca en primer lugar en el cuadernillo del examen.
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- Se permitirá el uso de reglas y calculadoras que no sean programables, ni gráficas o con capacidad para almacenar y/o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

Apartado 1 [3 puntos].**Opción 1.**

Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.1A [1 PUNTO]. Estudie para qué valores del parámetro a la matriz M tiene inversa.

Tarea 1.1B [2 PUNTOS]. Para $a = 1$, obtenga la matriz X de la siguiente ecuación:

$$MX = 2N$$

Opción 2.

Un pastelero dispone de un máximo de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas. Para la elaboración de cada sobao se requieren 45 minutos y 200 gramos de mantequilla, y para la elaboración de cada quesada se requieren 90 minutos y 100 gramos de mantequilla. Por limitaciones logísticas, la cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades y se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla. El beneficio que se obtiene por cada sobao es de 1,5€ y el que se obtiene por cada quesada es de 2€. La intención del pastelero es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos sobaos y cuántas quesadas se deben fabricar para maximizar el beneficio total?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden dicho beneficio?

Apartado 2 [4 puntos].

Dada la función $f(x)$:

$$f(x) = (x+2)(x-3)^2$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función e identifique los extremos relativos.

Tarea 2.1B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ con los ejes coordenados. A continuación, represente gráficamente $f(x)$ señalando dichos puntos de corte y los extremos relativos.

Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas OX .

Apartado 3 [3 puntos].**Opción 1.**

Se sabe que el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses sigue una distribución normal con desviación estándar $\sigma = 5$. Para una muestra de 225 usuarios, seleccionados aleatoriamente, se obtiene una media de 21 viajes por mes. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para la media de los viajes mensuales.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de dicha media, con un nivel de confianza del 97%, sea de 1 viaje al mes.

Opción 2.

En una compañía de seguros de automóviles, el 17% de los clientes tiene menos de 30 años, el 60% tiene entre 30 y 60 años, y el resto es mayor de 60 años. El historial de partes de accidente del último año indica lo siguiente:

- entre los menores de 30 años, 3 de cada 5 no presentaron ningún parte;
- entre los clientes de 30 a 60 años, 9 de cada 10 no presentaron ningún parte;
- entre los mayores de 60 años, 3 de cada 4 no presentaron ningún parte.

Se selecciona al azar un cliente de la compañía. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente seleccionado presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga 30 años o más y no presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si se sabe que el cliente presentó un parte de accidente el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 30 años?

Tabla de la distribución normal $N(0,1)$

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

SOLUCIONES**Apartado 1 [3 puntos].****Opción 1.**

Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.1A [1 PUNTO]. Estudie para qué valores del parámetro a la matriz M tiene inversa.**Tarea 1.1B [2 PUNTOS].** Para $a=1$, obtenga la matriz X de la siguiente ecuación:

$$MX = 2N$$

1.1A Para que la matriz M tenga inversa su determinante debe tener un valor distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de M .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5a + 0 + 0 - a^2 - 0 - 6 = -a^2 + 5a - 6$$

$$|M| = 0 \Rightarrow -a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)(-6)}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-5-1}{-2} = \boxed{3=a} \\ \frac{-5+1}{-2} = \boxed{2=a} \end{cases}$$

La matriz M tiene inversa para cualquier valor de " a " distinto de 2 y 3.

1.1B Para $a=1$ la matriz M queda $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ y hemos visto que es invertible.

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$MX = 2N \Rightarrow X = M^{-1}2N = 2M^{-1}N$$

Obtenemos la inversa de M y terminamos de hallar la expresión de la matriz X .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 - 6 = -2 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2M^{-1}N = 2 \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} -1-1 & 12+1 & -1-1 \\ 1-1 & 8+1 & 1-1 \\ -1+1 & -12-1 & -1+1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 & 13 & -2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -13 & 2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial $MX = 2N$ tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 2 & -13 & 2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$.

Opción 2.

Un pastelero dispone de un máximo de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas. Para la elaboración de cada sobao se requieren 45 minutos y 200 gramos de mantequilla, y para la elaboración de cada quesada se requieren 90 minutos y 100 gramos de mantequilla. Por limitaciones logísticas, la cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades y se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla. El beneficio que se obtiene por cada sobao es de 1,5€ y el que se obtiene por cada quesada es de 2€. La intención del pastelero es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos sobaos y cuántas quesadas se deben fabricar para maximizar el beneficio total?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden dicho beneficio?

1.2A Llamamos “x” = número de sobaos que elabora e “y” = número de quesadas que elabora. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Minutos	Mantequilla (gramos)	Beneficio
Nº sobaos (x)	45x	200x	1.5x
Nº quesadas (y)	90y	100y	2y
TOTAL	45x + 90y	200x + 100y	1.5x + 2y

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios obtenidos por la venta de los sobaos y quesadas, que vienen expresados como $B(x, y) = 1.5x + 2y$.

Las restricciones son:

“La cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades” $\rightarrow x + y \leq 11$

“Se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla y de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas” $\rightarrow 200x + 100y \leq 1600; 45x + 90y \leq 810$

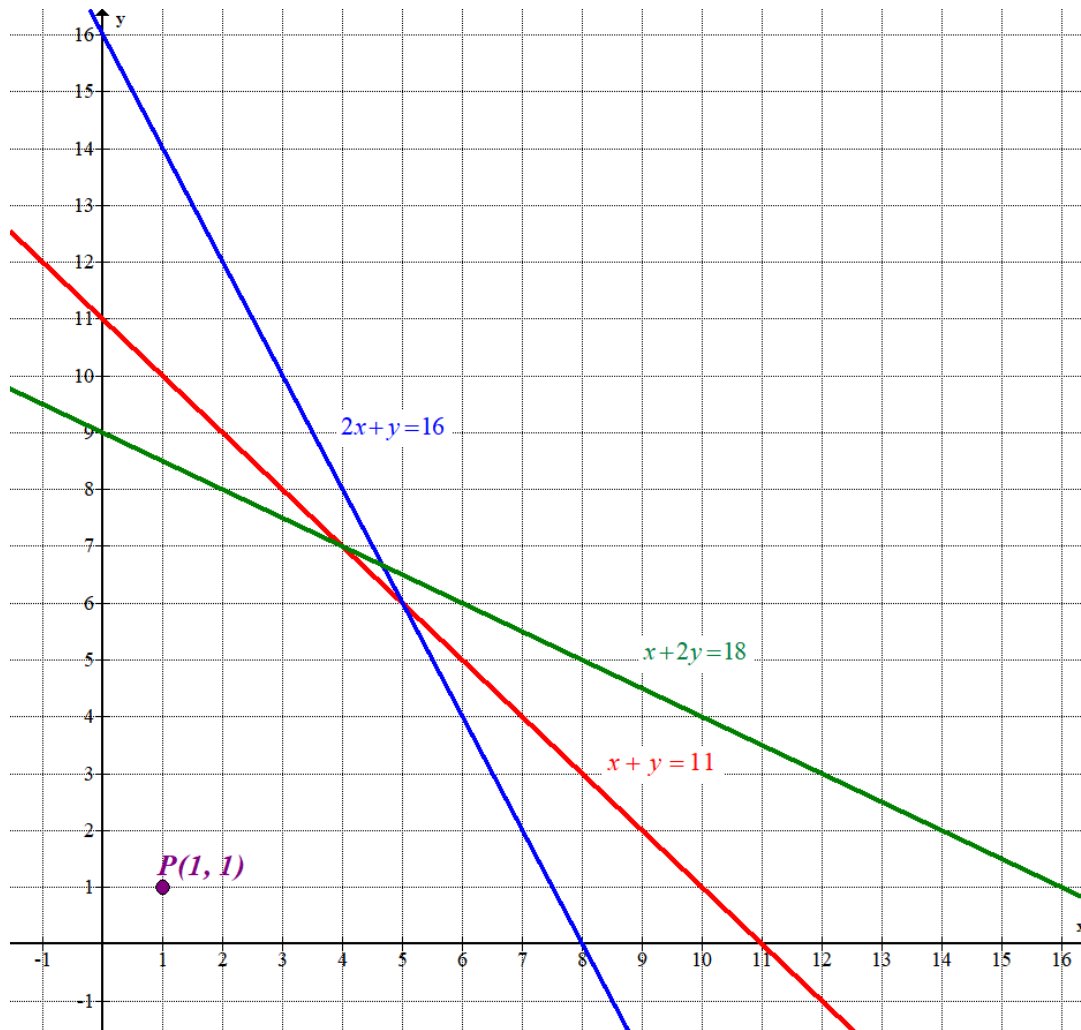
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 11 \\ 200x + 100y \leq 1600 \\ 45x + 90y \leq 810 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 11 \\ 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

1.2B Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 11$	$2x + y = 16$	$x + 2y = 18$	$x \geq 0; y \geq 0$																										
<table> <tr><td>x</td><td>y = 11 - x</td></tr> <tr><td>0</td><td>11</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>11</td><td>0</td></tr> </table>	x	y = 11 - x	0	11	4	7	5	6	11	0	<table> <tr><td>x</td><td>y = 16 - 2x</td></tr> <tr><td>0</td><td>16</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>0</td></tr> </table>	x	y = 16 - 2x	0	16	5	6	8	0	<table> <tr><td>x</td><td>y = $\frac{18-x}{2}$</td></tr> <tr><td>0</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>18</td><td>0</td></tr> </table>	x	y = $\frac{18-x}{2}$	0	9	4	7	18	0	Primer cuadrante
x	y = 11 - x																												
0	11																												
4	7																												
5	6																												
11	0																												
x	y = 16 - 2x																												
0	16																												
5	6																												
8	0																												
x	y = $\frac{18-x}{2}$																												
0	9																												
4	7																												
18	0																												

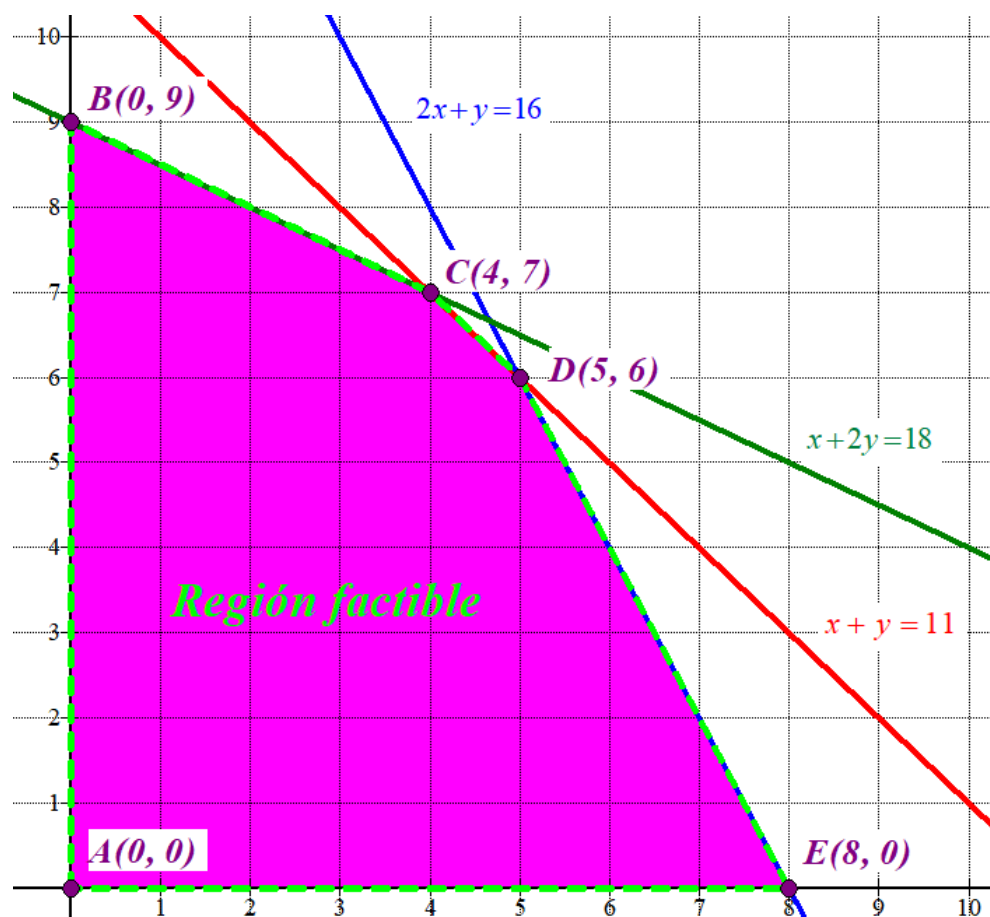


Como las restricciones del problema son
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 11 \\ 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, verde y roja.}$$

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 1 \leq 11 \\ 2 + 1 \leq 16 \\ 1 + 2 \leq 18 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \begin{cases} x+2y=18 \\ x+y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=18 \\ x=11-y \end{cases} \Rightarrow 11-y+2y=18 \Rightarrow y=7 \Rightarrow x=11-7=4 \Rightarrow \boxed{C(4,7)}$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=16 \\ x+y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=16 \\ y=11-x \end{cases} \Rightarrow 2x+11-x=16 \Rightarrow x=5 \Rightarrow y=11-5=6 \Rightarrow \boxed{D(5,6)}$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 9); C(4, 7), D(5, 6) y E(8, 0).

1.2C Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 1.5x + 2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 9) \rightarrow B(0, 9) = 1.5 \cdot 0 + 2 \cdot 9 = 18$$

$$C(4, 7) \rightarrow B(4, 7) = 1.5 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 20 \text{ Máximo}$$

$$D(5, 6) \rightarrow B(5, 6) = 1.5 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 19.5$$

$$E(8, 0) \rightarrow B(8, 0) = 1.5 \cdot 8 + 2 \cdot 0 = 12$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(4, 7). El máximo beneficio se obtiene fabricando 4 sobaos y 7 quesadas.

1.2D El beneficio máximo que se pueden obtener es de 20 €.

Apartado 2 [4 puntos]. Dada la función $f(x)$:

$$f(x) = (x+2)(x-3)^2$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función e identifique los extremos relativos.

Tarea 2.1B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ con los ejes coordenados. A continuación, represente gráficamente $f(x)$ señalando dichos puntos de corte y los extremos relativos.

Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas OX .

2.1A Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = (x+2)(x-3)^2 \Rightarrow f'(x) = (x-3)^2 + 2(x+2)(x-3) = (x-3)(x-3+2(x+2)) =$$

$$= (x-3)(x-3+2x+4) = (x-3)(3x+1) = 3(x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \rightarrow \boxed{x=3} \\ x+\frac{1}{3}=0 \rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 3$.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = 3(-2-3)\left(-2+\frac{1}{3}\right) = 25 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 3(0-3)\left(0+\frac{1}{3}\right) = -3 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\frac{1}{3}, 3\right).$$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 3(4-3)\left(4+\frac{1}{3}\right) = 13 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función crece en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = -\frac{1}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

Como $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}+2\right)\left(-\frac{1}{3}-3\right)^2 = \frac{500}{27} \approx 18.52$ y $f(3) = (3+2)(3-3)^2 = 0$ las coordenadas

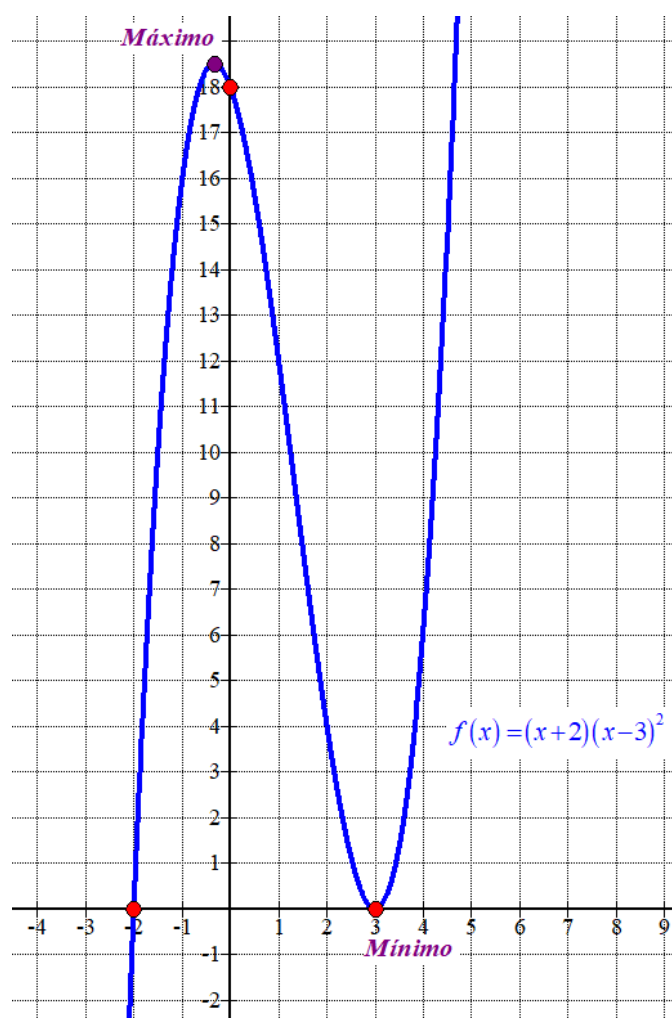
del máximo relativo son $\left(-\frac{1}{3}, \frac{500}{27}\right)$ y las del mínimo relativo son $(3, 0)$.

2.1B Hallamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x+2)(x-3)^2 \\ \text{Eje } X \Rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x+2)(x-3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow A(-2, 0) \\ x = 3 \rightarrow B(3, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x+2)(x-3)^2 \\ \text{Eje } Y \Rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = (0+2)(0-3)^2 = 18 \Rightarrow C(0, 18)$$

Los puntos de corte con los ejes son A(-2, 0), B(3, 0) y C(0, 18).



2.1C Los puntos de corte de la gráfica con el eje OX son A(-2, 0) y B(3, 0). El área del recinto delimitado por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas OX es el valor de la integral definida de la función entre -2 y 3.

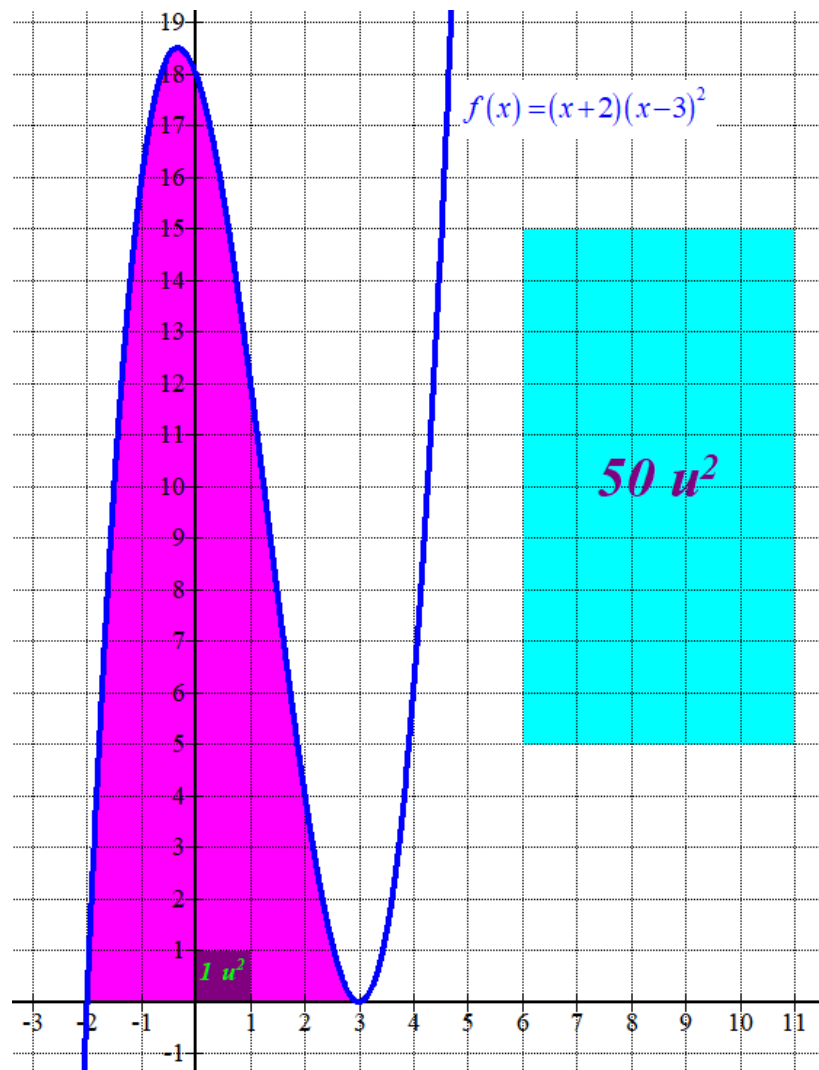
$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^3 (x+2)(x-3)^2 dx = \int_{-2}^3 (x+2)(x^2 + 9 - 6x) dx =$$

$$= \int_{-2}^3 x^3 + 9x - 6x^2 + 2x^2 + 18 - 12x dx = \int_{-2}^3 x^3 - 4x^2 - 3x + 18 dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 18x \right]_{-2}^3 =$$

$$= \left[\frac{3^4}{4} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 18 \cdot 3 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{4(-2)^3}{3} - \frac{3(-2)^2}{2} + 18(-2) \right] =$$

$$= \frac{81}{4} - \cancel{36} - \frac{27}{2} + 54 - 4 - \frac{32}{3} + 6 + \cancel{36} = \boxed{\frac{625}{12} \approx 52.0833 u^2}$$

El área tiene un valor de $\frac{625}{12} \approx 52.0833$ unidades cuadradas.



Apartado 3 [3 puntos].**Opción 1.**

Se sabe que el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses sigue una distribución normal con desviación estándar $\sigma = 5$. Para una muestra de 225 usuarios, seleccionados aleatoriamente, se obtiene una media de 21 viajes por mes. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para la media de los viajes mensuales.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de dicha media, con un nivel de confianza del 97%, sea de 1 viaje al mes.

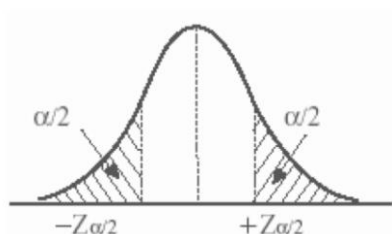
X = el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses.

$X = N(\mu, 5)$

Tamaño de muestra = $n = 225$. Media muestral = $\bar{x} = 21$ viajes.

3.1A Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.81$$



z	0.00	0.01	0.02
0.0	0.5000	0.5040	0.5080
0.1	0.5398	0.5438	0.5478
0.2	0.5793	0.5832	0.5872
0.3	0.6179	0.6217	0.6255
0.4	0.6554	0.6591	0.6628
0.5	0.6915	0.6950	0.6985
0.6	0.7257	0.7291	0.7324
0.7	0.7580	0.7611	0.7642
0.8	0.7881	0.7910	0.7939
0.9	0.8159	0.8186	0.8213
1.0	0.8413	0.8438	0.8461
1.1	0.8643	0.8665	0.8686
1.2	0.8849	0.8869	0.8888
1.3	0.9032	0.9049	0.9066
1.4	0.9192	0.9207	0.9222
1.5	0.9332	0.9345	0.9357
1.6	0.9452	0.9463	0.9474
1.7	0.9554	0.9564	0.9573
1.8	0.9641	0.9649	0.9656

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{5}{\sqrt{225}} = 0.603 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (21 - 0.603, 21 + 0.603) = (20.397, 21.603)$$

3.1B Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850

Igualemos el error a 1 viaje y despejamos “n”.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 2,17 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 10,85 \Rightarrow n = (10,85)^2 = 117,7225$$

Como el tamaño mínimo debe ser entero y superior al “n” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 118 usuarios.

Opción 2.

En una compañía de seguros de automóviles, el 17% de los clientes tiene menos de 30 años, el 60% tiene entre 30 y 60 años, y el resto es mayor de 60 años. El historial de partes de accidente del último año indica lo siguiente:

- entre los menores de 30 años, 3 de cada 5 no presentaron ningún parte;
- entre los clientes de 30 a 60 años, 9 de cada 10 no presentaron ningún parte;
- entre los mayores de 60 años, 3 de cada 4 no presentaron ningún parte.

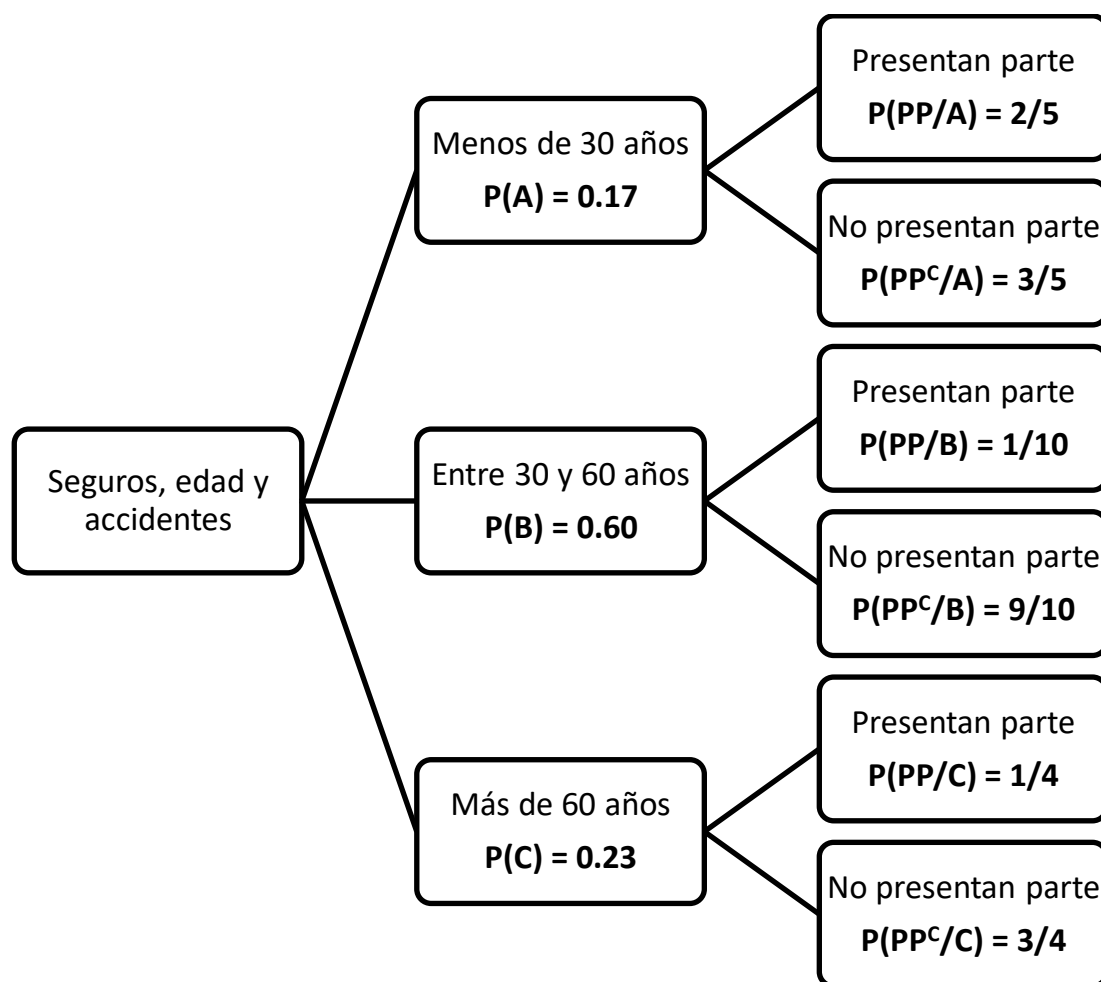
Se selecciona al azar un cliente de la compañía. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente seleccionado presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga 30 años o más y no presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si se sabe que el cliente presentó un parte de accidente el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 30 años?

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada.



3.2A Nos piden calcular $P(PP)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(PP) = P(A)P(PP/A) + P(B)P(PP/B) + P(C)P(PP/C) =$$

$$= 0.17 \cdot \frac{2}{5} + 0.6 \cdot \frac{1}{10} + 0.23 \cdot \frac{1}{4} = \boxed{0.1855}$$

3.2B Nos piden calcular $P(A^c \cap PP^c)$.

$$\begin{aligned} P(A^c \cap PP^c) &= P((A \cup PP)^c) = 1 - P(A \cup PP) = 1 - [P(A) + P(PP) - P(A \cap PP)] = \\ &= 1 - [P(A) + P(PP) - P(A) \cdot P(PP/A)] = 1 - \left[0.17 + 0.1855 - 0.17 \cdot \frac{2}{5} \right] = \boxed{\frac{57}{80} = 0.7125} \end{aligned}$$

3.2C Nos piden calcular $P(A/PP)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/PP) = \frac{P(A \cap PP)}{P(PP)} = \frac{P(A)P(PP/A)}{P(PP)} = \frac{0.17 \cdot \frac{2}{5}}{0.1855} = \boxed{\frac{136}{371} \approx 0.3666}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos relativos a datos absolutos. Para ello suponemos que son 6000 los clientes de la compañía de seguros de automóviles.

El 17% de los clientes tiene menos de 30 años $\rightarrow 0.17 \cdot 6000 = 1020$ clientes tienen menos de 30 años, el 60% tiene entre 30 y 60 años $\rightarrow 0.60 \cdot 6000 = 3600$ clientes tienen entre 30 y 60 años, y el resto es mayor de 60 años $\rightarrow 6000 - 1020 - 3600 = 1380$ clientes tienen más de 60 años.

- entre los 1020 menores de 30 años, 3 de cada 5 no presentaron ningún parte $\rightarrow \frac{3}{5} \cdot 1020 = 612$ no presentan parte.
- entre los 3600 clientes de 30 a 60 años, 9 de cada 10 no presentaron ningún parte $\rightarrow \frac{9}{10} \cdot 3600 = 3240$ no presentan parte.
- entre los 1380 mayores de 60 años, 3 de cada 4 no presentaron ningún parte $\rightarrow \frac{3}{4} \cdot 1380 = 1035$ no presentan parte.

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	< 30 años	Entre 30 y 60 años	> 60 años	
Presentan parte				
No presentan parte	612	3240	1035	
	1020	3600	1380	6000

Completamos la tabla.

	< 30 años	Entre 30 y 60 años	> 60 años	
Presentan parte	408	360	345	1113
No presentan parte	612	3240	1035	4887
	1020	3600	1380	6000

Aplicamos la regla de Laplace y obtenemos el valor de cada una de las probabilidades pedidas.

3.2A De los 6000 clientes presentaron parte de accidente 1113 clientes la probabilidad de que al elegir un cliente al azar este haya presentado un parte de accidente vale $\frac{1113}{6000} = \frac{371}{2000} = \boxed{0.1855}$.

3.2B De los 6000 clientes hay 3240 con una edad entre 30 y 60 años que no presentaron parte de accidente y 1035 con más de 60 años que no presentaron parte de accidente. La probabilidad de que el cliente elegido al azar tenga 30 años o más y no presentara un parte de accidente el año pasado vale $\frac{3240+1035}{6000} = \frac{57}{80} = \boxed{0.7125}$.

3.2C Hay 1113 clientes que presentaron parte de accidente y 408 de ellos tienen menos de 30 años. Si elegimos un cliente que presentó parte de accidente la probabilidad de que tenga menos de 30 años vale $\frac{408}{1113} = \frac{136}{371} \approx 0.3666$.