

Pruebas de Acceso a la Universidad. Mayores de 25 años

Unibersitatean sartzeko probak 25 urtez gorakoentzat

CURSO/IKASTURTEA: 2025/2026

ASIGNATURA/IRAKASGAIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES



EJERCICIO 1:

Opción A)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, responda a

las siguientes cuestiones:

- i) Despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $AX + B + I = C$, siendo I la matriz identidad. (6 puntos)
- ii) Calcule el producto $AD^T E$. (4 puntos)

Opción B)

Un empresario vende tres tipos de productos (P1, P2 y P3), con un valor unitario de 2 €, 4 € y 10 €, respectivamente. Una determinada semana, dispone en inventario 160 productos, con un valor total de 840 €. Sabiendo que el número de productos P1 es igual al número de productos P2 y P3 juntos, calcule cuántos productos de cada tipo dispone esa semana en inventario. (10 puntos)

EJERCICIO 2:

Opción A)

Dada la función $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$, calcule:

- i) Dominio y puntos de corte con los ejes. (1 punto)
- ii) Asíntotas. (2 puntos)
- iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. (2 puntos)
- iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. (2 puntos)
- v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica. (3 puntos)

Opción B)

La función $B(x) = -x^2 + 130x + 3000$ representa el beneficio, en euros, que una empresa obtiene por la fabricación de x unidades de un producto. Responda a las siguientes cuestiones:

- i) ¿Cuántas unidades han de fabricarse para que no haya pérdidas? (3 puntos)
- ii) ¿Cuántas unidades deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (4 puntos)
- iii) Calcule la derivada de la función $\frac{B(x)}{x} + 4\sin(5x^3)$. (3 puntos)

EJERCICIO 3:**Opción A)**

En un concurso, una caja contiene doce boletos y sólo cuatro de ellos tienen premio. El concursante extrae tres boletos de forma sucesiva y sin devolverlos a la caja.

- i) Calcule la probabilidad de que los tres boletos extraídos no tengan premio. (2 puntos)
- ii) Calcule la probabilidad de que al menos un boleto de entre los tres extraídos tenga premio. (4 puntos)
- iii) Calcule la probabilidad de que únicamente un boleto de entre los tres extraídos tenga premio. (4 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Opción B)

En una región se selecciona una muestra de 500 jóvenes y se observa que 400 de ellos son conductores habituales.

- i) Construya un intervalo de confianza para la proporción poblacional de jóvenes no conductores habituales, con un nivel de confianza del 93%. (5 puntos)
- ii) Construya un intervalo de confianza para la proporción poblacional de jóvenes conductores habituales, con un nivel de confianza del 97%. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

El estudiante elegirá una opción de cada uno de estos tres ejercicios. La nota final será la media aritmética simple de las puntuaciones obtenidas en las tres opciones elegidas.

Tabla de la distribución normal estándar $Z = N(0, 1)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0012	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

$$P(Z < k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-t^2/2} dt$$



SOLUCIONES

EJERCICIO 1:

Opción A)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, responda a

las siguientes cuestiones:

i) Despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $AX + B + I = C$, siendo I la matriz identidad.
(6 puntos)

ii) Calcule el producto $AD^T E$. (4 puntos)

i) Comprobamos que la matriz A tiene determinante no nulo y por tanto, tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$$

La matriz A es invertible.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX + B + I = C \Rightarrow AX = C - I - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - I - B)$$

Hallamos la inversa de A y la expresión de la matriz X .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - I - B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1-8 \\ -2+5 & -2+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$.

ii) Calculamos el producto $AD^T E$.

$$AD^T E = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+0 & 5+4 & 0-2 \\ 2+0 & 2+2 & 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+0-2 \\ -2+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1 \longrightarrow 2 \times 1$$

EJERCICIO 1:**Opción B)**

Un empresario vende tres tipos de productos (P1, P2 y P3), con un valor unitario de 2 €, 4 € y 10 €, respectivamente. Una determinada semana, dispone en inventario 160 productos, con un valor total de 840 €. Sabiendo que el número de productos P1 es igual al número de productos P2 y P3 juntos, calcule cuántos productos de cada tipo dispone esa semana en inventario. (10 puntos)

Llamamos “x”, “y”, “z” al número de productos P1, P2 y P3 que hay en el inventario.

Dispone en inventario 160 productos $\rightarrow x + y + z = 160$

Dispone en inventario 160 productos, con un valor total de 840 € $\rightarrow 2x + 4y + 10z = 840$

El número de productos P1 es igual al número de productos P2 y P3 juntos $\rightarrow x = y + z$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 160 \\ 2x + 4y + 10z = 840 \\ x = y + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z + y + z = 160 \\ 2(y + z) + 4y + 10z = 840 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 160 \\ 2y + 2z + 4y + 10z = 840 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 80 \\ 6y + 12z = 840 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 80 \\ y + 2z = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 80 - z \\ y + 2z = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow 80 - z + 2z = 140 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 60} \Rightarrow \boxed{y = 80 - 60 = 20} \Rightarrow \boxed{x = 20 + 60 = 80}$$

En el inventario de esa semana hay 80 productos P1, 20 productos P2 y 60 productos P3.

EJERCICIO 2:**Opción A)**

Dada la función $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$, calcule:

- i) Dominio y puntos de corte con los ejes. (1 punto)
- ii) Asíntotas. (2 puntos)
- iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. (2 puntos)
- iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. (2 puntos)
- v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica. (3 puntos)

i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{4}{x^2 - 4} \\ \text{Eje } X \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow 4 = 0 \text{ ¡Imposible!}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{4}{x^2 - 4} \\ \text{Eje } Y \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{4}{0^2 - 4} = -1 \Rightarrow \boxed{A(0, -1)}$$

El único punto de corte con los ejes es el punto de coordenadas $A(0, -1)$.

ii) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{4}{(-2)^2 - 4} = \frac{4}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{4}{2^2 - 4} = \frac{4}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{4}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.

iii) Hallamos sus extremos usando la derivada.

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 4) - 4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow -8x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La función tiene un punto crítico en $x=0$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=-2$, $x=0$ y $x=2$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x=-3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{-8(-3)}{((-3)^2-4)^2} = \frac{24}{25} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-8(-1)}{((-1)^2-4)^2} = \frac{8}{9} > 0. \text{ La función crece en } (-2, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-8 \cdot 1}{(1^2-4)^2} = \frac{-8}{9} < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-8 \cdot 3}{(3^2-4)^2} = \frac{-24}{25} < 0$.

La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x=0$.

iv) Averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-8(x^2-4)^2 - (-8x) \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \\ &= \frac{-8(x^2-4) + 8x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2-4)^3} = \frac{-8x^2 + 32 + 32x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{24x^2 + 32}{(x^2-4)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3} = 0 \Rightarrow 24x^2 + 32 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-32}{24} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-32}{24}} \text{ ¡Imposible!}$$

La función no presenta puntos de inflexión. Estudiamos el signo de la derivada segunda antes, entre y después de los valores excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la segunda derivada vale

$$f''(-3) = \frac{24(-3)^2 + 32}{((-3)^2 - 4)^3} = \frac{248}{125} > 0. \text{ La gráfica es convexa (U) en el intervalo } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 2)$ tomamos $x = 0$ y la segunda derivada vale

$$f''(0) = \frac{24 \cdot 0^2 + 32}{(0^2 - 4)^3} = \frac{32}{-64} < 0. \text{ La gráfica es cóncava (∩) en el intervalo } (-2, 2).$$

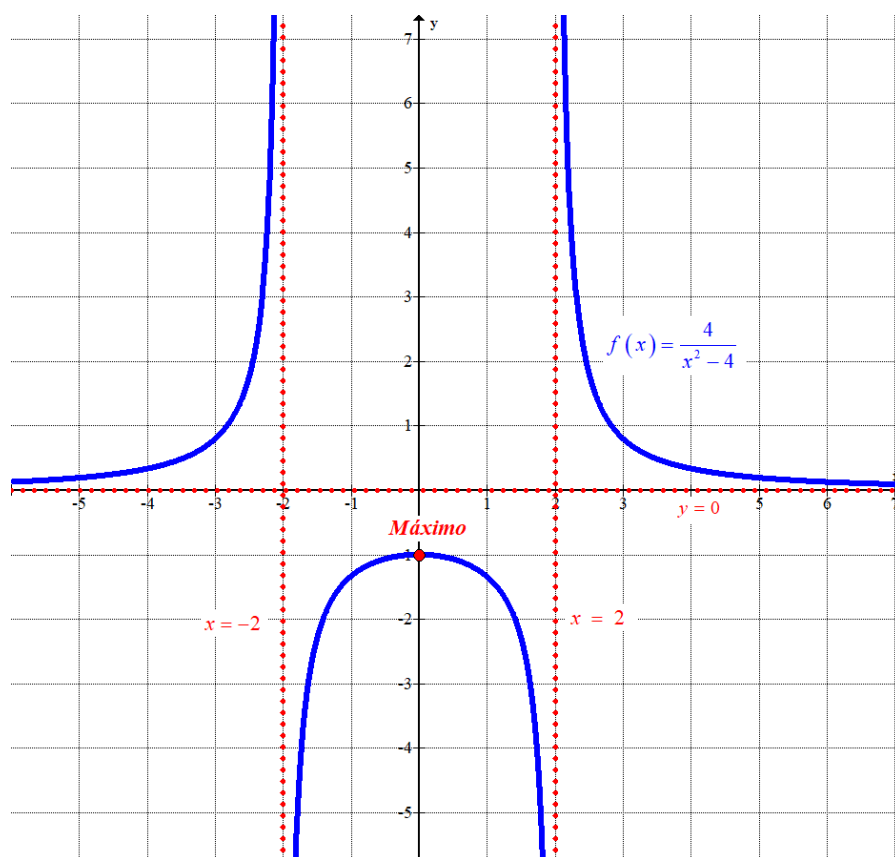
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la segunda derivada vale

$$f''(3) = \frac{24 \cdot 3^2 + 32}{(3^2 - 4)^3} = \frac{248}{125} > 0. \text{ La gráfica es convexa (U) en el intervalo } (2, +\infty).$$

La función es cóncava (∩) en $(-2, 2)$ y convexa (U) en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

v) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica

x	$f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$
-3	4/5
-1	-4/3
0	-1 Máximo
1	-4/3
3	4/5



EJERCICIO 2:**Opción B)**

La función $B(x) = -x^2 + 130x + 3000$ representa el beneficio, en euros, que una empresa obtiene por la fabricación de x unidades de un producto. Responda a las siguientes cuestiones:

- i) ¿Cuántas unidades han de fabricarse para que no haya pérdidas? (3 puntos)
 ii) ¿Cuántas unidades deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (4 puntos)
 iii) Calcule la derivada de la función $\frac{B(x)}{x} + 4\operatorname{sen}(5x^3)$. (3 puntos)

i) Averiguamos cuando no hay ganancias.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 130x + 3000 = 0 \Rightarrow x = \frac{-130 \pm \sqrt{130^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3000}}{2 \cdot (-1)} =$$

$$= \frac{-130 \pm 170}{-2} = \begin{cases} \frac{-130 + 170}{-2} = -20 \\ \frac{-130 - 170}{-2} = 150 = x \end{cases}$$

No consideramos el valor negativo del resultado, pues carece de sentido la producción negativa.

Fabricando 150 unidades el beneficio es 0, como la función es continua vemos cuando es negativo el beneficio (pérdidas) si produciendo menos o más de 150 unidades.

$$100 \in [0, 150) \rightarrow B(100) = -100^2 + 130 \cdot 100 + 3000 = 6000 > 0$$

$$200 \in (150, +\infty) \rightarrow B(200) = -200^2 + 130 \cdot 200 + 3000 = -11000 < 0$$

Fabricando menos de 150 unidades no se producen pérdidas en la empresa.

ii) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = -x^2 + 130x + 3000 \Rightarrow B'(x) = -2x + 130$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 130 = 0 \Rightarrow 2x = 130 \Rightarrow x = \frac{130}{2} = 65$$

Sustituimos el valor obtenido en la segunda derivada.

$$B'(x) = -2x + 130 \Rightarrow B''(x) = -2 \Rightarrow B''(65) = -2 < 0$$

El beneficio es máximo con una producción de 65 unidades.

Como $B(65) = -65^2 + 130 \cdot 65 + 3000 = 7225$, el beneficio máximo que se puede obtener es de 7225 euros.

iii) Determinamos la expresión de $f(x) = \frac{B(x)}{x} + 4\operatorname{sen}(5x^3)$ y obtenemos su función derivada.

$$f(x) = \frac{B(x)}{x} + 4\operatorname{sen}(5x^3) = \frac{-x^2 + 130x + 3000}{x} + 4\operatorname{sen}(5x^3) = -x + 130 + \frac{3000}{x} + 4\operatorname{sen}(5x^3)$$

$$f'(x) = -1 + 0 - \frac{3000}{x^2} + 4\cos(5x^3) \cdot 15x^2 = \boxed{-1 - \frac{3000}{x^2} + 60x^2 \cos(5x^3)}$$

EJERCICIO 3:**Opción A)**

En un concurso, una caja contiene doce boletos y sólo cuatro de ellos tienen premio. El concursante extrae tres boletos de forma sucesiva y sin devolverlos a la caja.

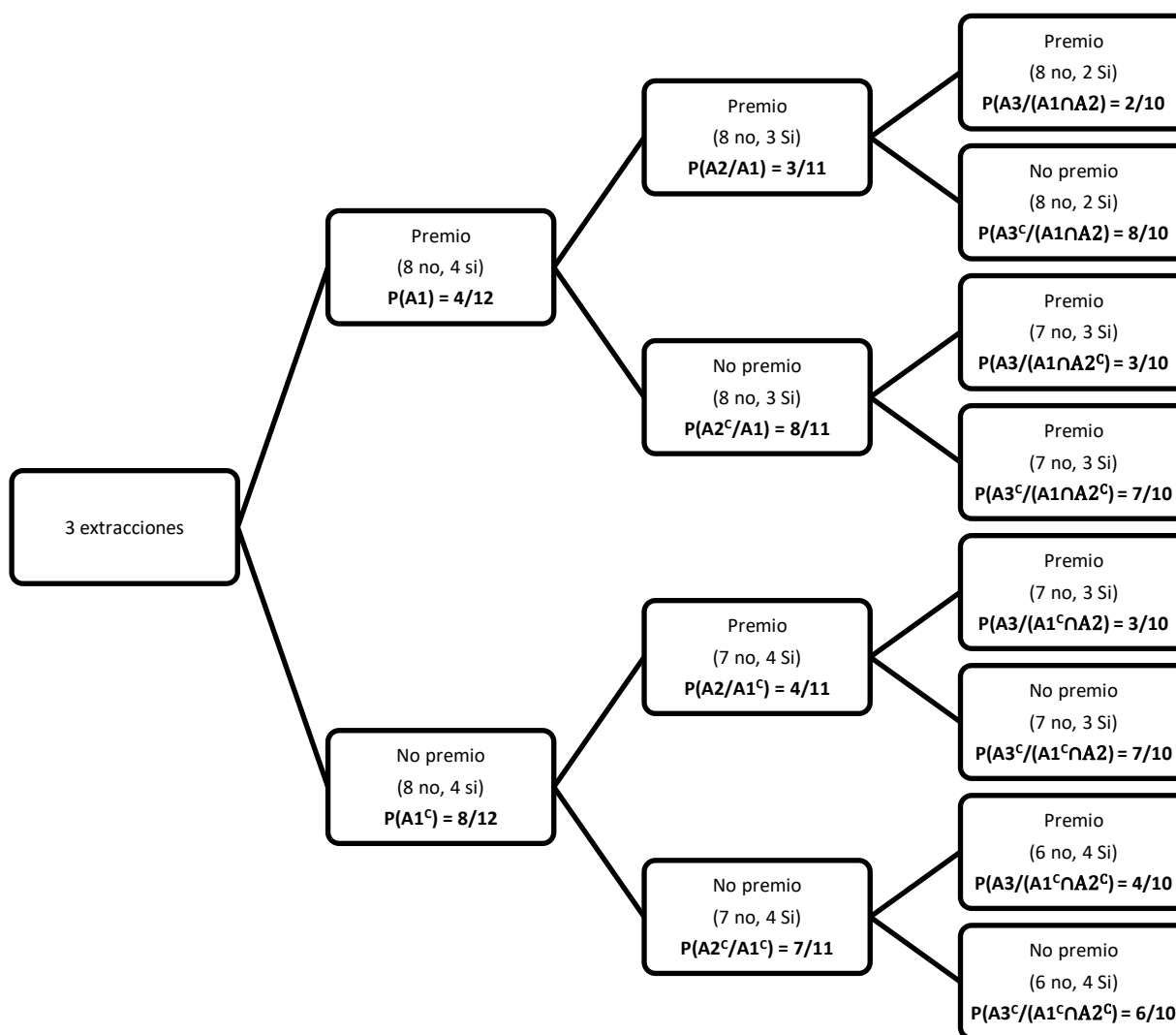
- Calcule la probabilidad de que los tres boletos extraídos no tengan premio. (2 puntos)
- Calcule la probabilidad de que al menos un boleto de entre los tres extraídos tenga premio. (4 puntos)
- Calcule la probabilidad de que únicamente un boleto de entre los tres extraídos tenga premio. (4 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias)

La probabilidad de obtener premio en una extracción de un boleto de la urna es $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Realizamos un diagrama de árbol de probabilidades.

Llamamos A_1 , A_2 y A_3 a los sucesos “obtener premio en 1ª, 2ª y 3ª extracción. Lo que ocurra en una extracción condiciona lo que puede ocurrir en la siguiente.



- Nos piden calcular $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)$.

$$P(A1^C \cap A2^C \cap A3^C) = P(A1^C)P(A2^C / A1^C)P(A3^C / (A1^C \cap A2^C)) =$$

$$= \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \boxed{\frac{14}{55} \approx 0.2545}$$

ii) Calculamos la probabilidad del suceso contrario a B = “obtener al menos un boleto de entre los tres extraídos con premio” que es “no tener premio en ninguno de los boletos extraídos”.

$$P(B) = 1 - P(A1^C \cap A2^C \cap A3^C) = 1 - \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \boxed{\frac{41}{55} \approx 0.7455}$$

iii) Calculamos la probabilidad de C = “únicamente uno de los boletos extraídos tiene premio” que puede ocurrir de tres formas distintas: obtener solo premio en 1ª extracción, obtener solo premio en 2ª extracción u obtener solo premio en 3ª extracción.

$$P(C) = P(A1 \cap A2^C \cap A3^C) + P(A1^C \cap A2 \cap A3^C) + P(A1^C \cap A2^C \cap A3) =$$

$$= P(A1)P(A2^C / A1)P(A3^C / (A1 \cap A2^C)) + P(A1^C)P(A2 / A1^C)P(A3^C / (A1^C \cap A2)) +$$

$$+ P(A1^C)P(A2^C / A1^C)P(A3 / (A1^C \cap A2^C)) = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} =$$

$$= 3 \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} = \boxed{\frac{28}{55} \approx 0.5091}$$

EJERCICIO 3:**Opción B)**

En una región se selecciona una muestra de 500 jóvenes y se observa que 400 de ellos son conductores habituales.

- Construya un intervalo de confianza para la proporción poblacional de jóvenes no conductores habituales, con un nivel de confianza del 93%. (5 puntos)
- Construya un intervalo de confianza para la proporción poblacional de jóvenes conductores habituales, con un nivel de confianza del 97%. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

- i) La proporción muestral de los jóvenes que no son conductores habituales es de $p = \frac{100}{500} = 0.2$.

Con un nivel de confianza del 93 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \alpha/2 = 0,035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.81$$

k	0	1
-3,5	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005
-3,2	0,0007	0,0007
-3,1	0,0010	0,0009
-3,0	0,0013	0,0013
-2,9	0,0019	0,0018
-2,8	0,0026	0,0025
-2,7	0,0035	0,0034
-2,6	0,0047	0,0045
-2,5	0,0062	0,0060
-2,4	0,0082	0,0080
-2,3	0,0107	0,0104
-2,2	0,0139	0,0136
-2,1	0,0179	0,0174
-2,0	0,0228	0,0222
-1,9	0,0287	0,0281
-1,8	0,0359	0,0351
-1,7	0,0446	0,0436
-1,6	0,0548	0,0537
-1,5	0,0668	0,0655
-1,4	0,0808	0,0793
-1,3	0,0968	0,0951
-1,2	0,1151	0,1131
-1,1	0,1357	0,1335
-1,0	0,1587	0,1562
-0,9	0,1841	0,1814
-0,8	0,2119	0,2090
-0,7	0,2420	0,2389
-0,6	0,2743	0,2709
-0,5	0,3085	0,3050
-0,4	0,3446	0,3409
-0,3	0,3821	0,3783
-0,2	0,4207	0,4168
-0,1	0,4602	0,4562
-0,0	0,5000	0,5000
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665
1,2	0,8849	0,8869
1,3	0,9032	0,9049
1,4	0,9192	0,9207
1,5	0,9332	0,9345
1,6	0,9452	0,9463
1,7	0,9554	0,9564
1,8	0,9649	0,9649
1,9	0,9713	0,9713

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1.81 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{500}} = 0.0324$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.2 - 0.0324; 0.2 + 0.0324) = (0.1676; 0.2324)$$

ii) La proporción muestral de los jóvenes que son conductores habituales es de $p = \frac{400}{500} = 0.8$.

Con un nivel de confianza del 97 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7824
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887

a)

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.17 \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{500}} \approx 0.0388$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.8 - 0.0388; 0.8 + 0.0388) = (0.7612; 0.8388)$$