



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de acceso a la Universidad para mayores de 25 años**Curso académico: 2025-2026****ASIGNATURA: MATEMÁTICAS****TIEMPO DE REALIZACIÓN: 1 HORA Y 30 MINUTOS**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

OPCIÓN A

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (a-1)x + y + z = a \\ x + (a-1)y - z = 0 \end{cases}$$

Estudia para qué valores del parámetro “a” dicho sistema tiene:

- a) (1,5 puntos) solución única. En este caso dar la solución en función de “a”.
- b) (1,5 puntos) infinitas soluciones. En este caso determínalas.

2. Dada la función $f(x) = \frac{6x(x+12)}{x-4}$, se pide:

- a) (1,25 puntos) el dominio y asíntotas vertical y oblicua de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- c) (1 punto) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad.
- d) (0,75 puntos) Realiza el esbozo de la gráfica de $f(x)$ que refleje la información obtenida en los apartados anteriores.

3. Se pide:

- a) (1,5 puntos) Dado el punto $P = (0, 2, 1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo al plano $\pi_1 \equiv 2x - 5y + z + 3 = 0$.
- b) (1,5 puntos) Dado el punto $P = (1, 0, -3)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases}$$



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de acceso a la Universidad para mayores de 25 años**Curso académico: 2025-2026****ASIGNATURA: MATEMÁTICAS****TIEMPO DE REALIZACIÓN: 1 HORA Y 30 MINUTOS**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

OPCIÓN B

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (a-1)x + y + z = a \\ x + (a-1)y - z = 0 \end{cases}$$

Estudia para qué valores del parámetro “a” dicho sistema tiene:

- a) (1,5 puntos) solución única. En este caso dar la solución en función de “a”.
- b) (1,5 puntos) infinitas soluciones. En este caso dar todas las soluciones.

2. Dada la función $f(x) = \frac{6x(x+12)}{x-4}$, se pide:

- a) (1,25 puntos) el dominio y asíntotas vertical y oblicua de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- c) (1 punto) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad.
- d) (0,75 puntos) Realiza el esbozo de la gráfica de $f(x)$ que refleje la información obtenida en los apartados anteriores.

3. El 30% de los habitantes de una localidad son estudiantes y el 50% son jubilados, mientras que el resto ni son estudiantes ni están jubilados. El 70% de los jubilados, así como el 80% de los estudiantes y el 50% del resto de habitantes, son socios del club de baloncesto local. Se pide:

- a) (1 punto) Elegido al azar un habitante de esa localidad, calcula la probabilidad de que sea socio del club de baloncesto.
- b) (1 punto) Elegido al azar un socio del club de baloncesto, calcula la probabilidad de que sea jubilado.
- c) (1 punto) Elegida al azar una persona que no es socio del club de baloncesto, ¿qué es más probable que sea jubilado o que sea estudiante?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (a-1)x + y + z = a \\ x + (a-1)y - z = 0 \end{cases}$$

Estudia para qué valores del parámetro “a” dicho sistema tiene:

- a) (1,5 puntos) solución única. En este caso dar la solución en función de “a”.
 b) (1,5 puntos) infinitas soluciones. En este caso determínalas.

Estudiamos el sistema en función del parámetro a .

El sistema dado tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos donde se anula el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{1+1} + (a-1)^2 - 1 + \cancel{a-1} - \cancel{a+1} = a^2 - 2a + 1 - 1 = a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 2 = 0 \rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema tiene **solución única**.

CASO 2. $a = 0$

Para $a = 0$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale cero.

La matriz A tiene rango 2 pues si consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la

3ª fila y la 3ª columna su determinante es no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0$.

En la matriz A/B la tercera fila es igual a la segunda fila multiplicada por -1 . El rango de A/B es 2.

Como rango de A (2) es igual al rango de A/B (2), pero menor que el número de incógnitas (3) el sistema tiene **infinitas soluciones**.

CASO 3. $a = 2$

Para $a = 2$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale 0.

La matriz A tiene rango 2 pues si consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la

1ª fila y la 1ª columna su determinante es no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0$

En la matriz A/B consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna

(igual que la segunda) $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+2-1-1-0+2 = 2 \neq 0$.

El rango de la matriz A/B es 3.

Como rango de A (2) es distinto del rango de A/B (3) el sistema **no tiene solución**.

- a) El sistema tiene solución única para cualquier valor de a distinto de 0 y 2. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ (a-1)x+y+z=a \\ x+(a-1)y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1-x-y \\ (a-1)x+y+z=a \\ x+(a-1)y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)x+y+1-x-y=a \\ x+(a-1)y-1+x+y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-2)x=a-1 \\ 2x+ay=1 \end{cases} \Rightarrow \{a-2 \neq 0\} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a-1}{a-2} \\ 2x+ay=1 \end{cases} \Rightarrow 2\frac{a-1}{a-2}+ay=1 \Rightarrow ay=1-\frac{2a-2}{a-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ay=\frac{a-2-2a+2}{a-2}=\frac{-a}{a-2} \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow y=\frac{-1}{a-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=1-\frac{a-1}{a-2}-\frac{-1}{a-2}=\frac{a-2-a+1+1}{a-2} \Rightarrow \boxed{z=0}$$

La solución del sistema es $x=\frac{a-1}{a-2}$, $y=\frac{-1}{a-2}$, $z=0$.

- b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a=0$. Resolvemos el sistema para este valor.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1-x-y \\ -x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+1-x-y=0 \\ x-y-1+x+y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+1=0 \\ 2x-1=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}} \Rightarrow z=1-\frac{1}{2}-y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}-y} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\lambda \\ z=\frac{1}{2}-\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema para $a=0$ son $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\lambda \\ z=\frac{1}{2}-\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} .$

2. Dada la función $f(x) = \frac{6x(x+12)}{x-4}$, se pide:

- a) (1,25 puntos) el dominio y asíntotas vertical y oblicua de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- c) (1 punto) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad.
- d) (0,75 puntos) Realiza el esbozo de la gráfica de $f(x)$ que refleje la información obtenida en los apartados anteriores.

- a) Como la función es un cociente de polinomios el dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador: Dominio = $\mathbb{R} - \{4\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

Comprobamos si la recta $x = 4$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x(x+12)}{x-4} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 16}{0} = \frac{384}{0} = \infty$$

La recta $x = 4$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x(x+12)}{x-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x(x+12)}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+72}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x} = 6$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x(x+12)}{x-4} - 6x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 72x - 6x^2 + 24x}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{96x}{x-4} = 96$$

La recta $y = 6x + 96$ es asíntota oblicua de la función.

- b) Utilizamos la derivada para encontrar sus puntos críticos.

$$f(x) = \frac{6x(x+12)}{x-4} = \frac{6x^2 + 72x}{x-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(12x+72)(x-4) - 1 \cdot (6x^2 + 72x)}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{12x^2 - 48x + 72x - 288 - 6x^2 - 72x}{(x-4)^2} = \frac{6x^2 - 48x - 288}{(x-4)^2} = \frac{6(x^2 - 8x - 48)}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6(x^2 - 8x - 48)}{(x-4)^2} = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 8x - 48) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{8+16}{2} = \boxed{12 = x} \\ \frac{8-16}{2} = \boxed{-4 = x} \end{cases}$$

Estudiamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de $x = -4$, $x = 4$ (excluido del dominio) y $x = 12$.

- En el intervalo $(-\infty, -4)$ tomamos $x = -10$ y la derivada vale

$$f'(-10) = \frac{6((-10)^2 - 8(-10) - 48)}{(-10 - 4)^2} = \frac{132}{+} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -4).$$

- En el intervalo $(-4, 4)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{6(0^2 - 8 \cdot 0 - 48)}{(0 - 4)^2} = \frac{6 \cdot (-48)}{16} < 0. \text{ La función decrece en } (-4, 4).$$

- En el intervalo $(4, 12)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale

$$f'(5) = \frac{6(5^2 - 8 \cdot 5 - 48)}{(5 - 4)^2} = -63 < 0. \text{ La función decrece en } (4, 12).$$

- En el intervalo $(12, +\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(15) = \frac{6(15^2 - 8 \cdot 15 - 48)}{(15 - 4)^2} = \frac{342}{121} > 0. \text{ La función crece en } (12, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, -4) \cup (12, +\infty)$ y decrece en $(-4, 4) \cup (4, 12)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = -4$ y un mínimo relativo en $x = 12$.

d) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6(x^2 - 8x - 48)}{(x - 4)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6(2x - 8)(x - 4)^2 - 2(x - 4)6(x^2 - 8x - 48)}{(x - 4)^4} = \\ &= \frac{12(x - 4)(x - 4) - 12(x^2 - 8x - 48)}{(x - 4)^3} = \frac{12(x^2 - 8x + 16) - 12(x^2 - 8x - 48)}{(x - 4)^3} = \frac{768}{(x - 4)^3} \end{aligned}$$

Esta expresión de la segunda derivada nunca se anula, por lo que no hay puntos de inflexión. Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 4$, valor excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 4)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = \frac{768}{(0 - 4)^3} = -12 < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (-\infty, 4).$$

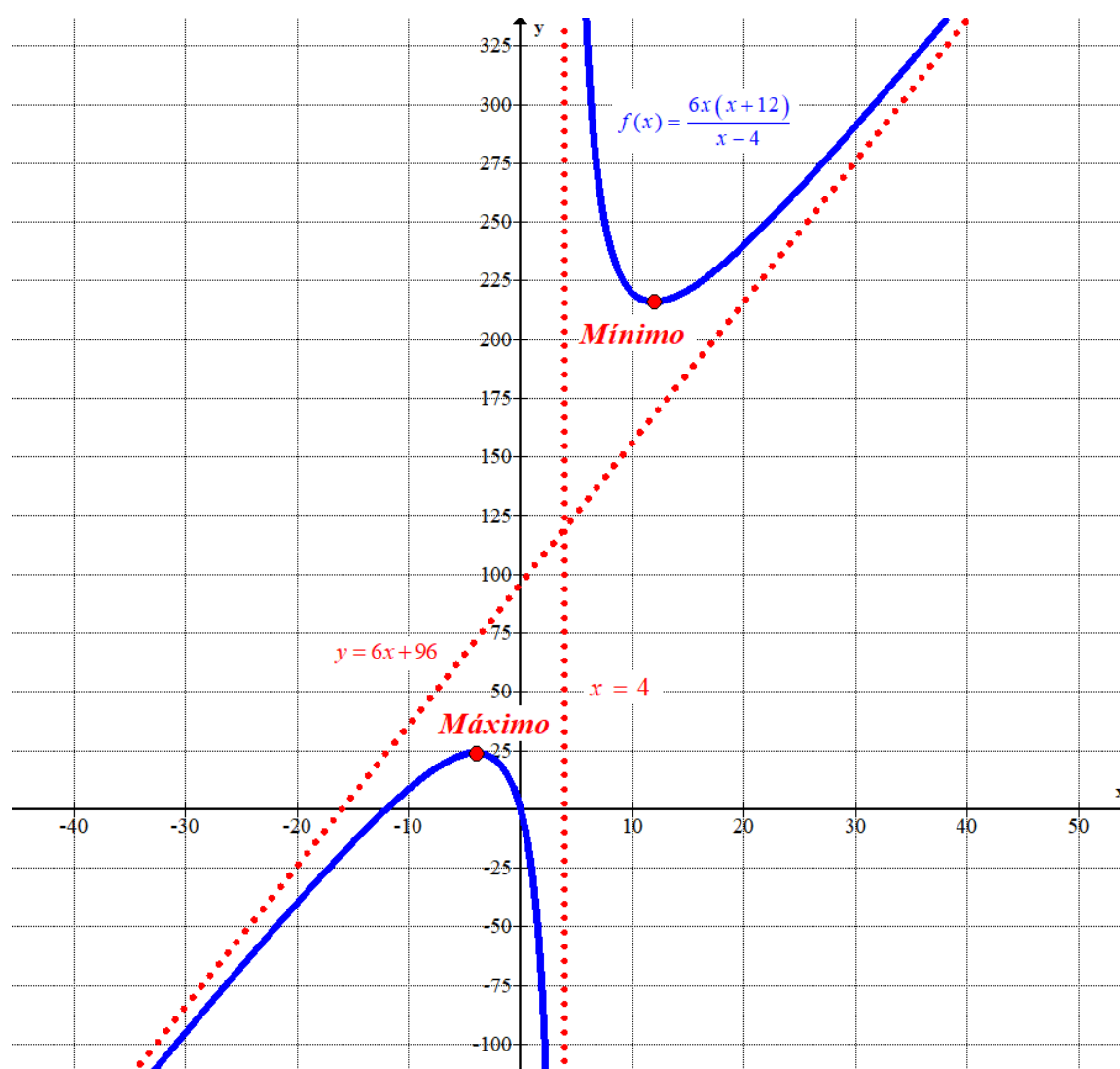
- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada segunda vale

$$f''(10) = \frac{768}{(10 - 4)^3} = \frac{32}{9} > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (4, +\infty).$$

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 4)$ y convexa ($\cup$) en $(4, +\infty)$.

c) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$f(x) = \frac{6x(x+12)}{x-4}$
-4	24
0	0
5	510
12	216
20	240



3. Se pide:

- a) (1,5 puntos) Dado el punto $P = (0, 2, 1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo al plano $\pi_1 \equiv 2x - 5y + z + 3 = 0$.
- b) (1,5 puntos) Dado el punto $P = (1, 0, -3)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases}$$

- a) El plano π_2 paralelo al plano $\pi_1 \equiv 2x - 5y + z + 3 = 0$ tiene ecuación $\pi_2 \equiv 2x - 5y + z + D = 0$. Hallamos el valor de D para que este plano contenga al punto P.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 \equiv 2x - 5y + z + D = 0 \\ P = (0, 2, 1) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 5 \cdot 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{D = 9}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi_2 \equiv 2x - 5y + z + 9 = 0$.

- b) Hallamos un vector director de la recta r.

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y - 4 = z \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2y - 5x - y + 4 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 3y = 1 \Rightarrow -3y = 1 + 3x \Rightarrow y = -\frac{1}{3} - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 5x - \frac{1}{3} - x - 4 = \frac{-13}{3} + 4x \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{-1}{3} - \lambda \\ z = \frac{-13}{3} + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_r \left(0, \frac{-1}{3}, \frac{-13}{3} \right) \\ \vec{v}_r = (1, -1, 4) \end{cases}$$

El plano π perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, -1, 4) \\ P = (1, 0, -3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - y + 4z + D = 0 \\ P = (1, 0, -3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 0 + 4 \cdot (-3) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11 + D = 0 \Rightarrow D = 11 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y + 4z + 11 = 0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi \equiv x - y + 4z + 11 = 0$.

OPCIÓN B

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (a-1)x + y + z = a \\ x + (a-1)y - z = 0 \end{cases}$$

Estudia para qué valores del parámetro “a” dicho sistema tiene:

- a) (1,5 puntos) solución única. En este caso dar la solución en función de “a”.
- b) (1,5 puntos) infinitas soluciones. En este caso determínalas.

Igual que el ejercicio 1 de opción A

2. Dada la función $f(x) = \frac{6x(x+12)}{x-4}$, se pide:

- a) (1,25 puntos) el dominio y asíntotas vertical y oblicua de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- c) (1 punto) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad.
- d) (0,75 puntos) Realiza el esbozo de la gráfica de $f(x)$ que refleje la información obtenida en los apartados anteriores.

Igual que el ejercicio 2 de opción A

3. El 30% de los habitantes de una localidad son estudiantes y el 50% son jubilados, mientras que el resto ni son estudiantes ni están jubilados. El 70% de los jubilados, así como el 80% de los estudiantes y el 50% del resto de habitantes, son socios del club de baloncesto local. Se pide:

- (1 punto) Elegido al azar un habitante de esa localidad, calcula la probabilidad de que sea socio del club de baloncesto.
- (1 punto) Elegido al azar un socio del club de baloncesto, calcula la probabilidad de que sea jubilado.
- (1 punto) Elegida al azar una persona que no es socio del club de baloncesto, ¿qué es más probable que sea jubilado o que sea estudiante?

Supongamos que hay 100 habitantes en esa localidad (todos los cálculos que vamos a realizar nos darían la misma probabilidad si suponemos un número de habitantes distinto).

30% de los habitantes de una localidad son estudiantes y el 50% son jubilados, mientras que el resto ni son estudiantes ni están jubilados → Hay 30 estudiantes, 50 jubilados y $100 - 30 - 50 = 20$ habitantes que no son ni jubilados ni estudiantes.

El 70% de los jubilados, así como el 80% de los estudiantes y el 50% del resto de habitantes, son socios del club de baloncesto local → Hay $0.70 \cdot 50 = 35$ jubilados que son socios del club de baloncesto local, $0.80 \cdot 30 = 24$ estudiantes son socios y del resto $0.50 \cdot 20 = 10$ son socios.

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	Jubilados	Estudiantes	Resto	TOTALES
Socios	35	24	10	
No socios				
TOTALES	50	30	20	100

Completamos la tabla.

	Jubilados	Estudiantes	Resto	TOTALES
Socios	35	24	10	69
No socios	15	6	10	31
TOTALES	50	30	20	100

a) Hay 100 habitantes y 69 son socios del club. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que al elegir al azar un habitante de la ciudad sea socio del club vale $\frac{69}{100} = 0.69$.

b) Hay 69 socios del club y de estos son 35 los jubilados. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir al azar un socio del club este sea jubilado vale $\frac{35}{69} \approx 0.5072$.

c) Hay 31 habitantes que no son socios del club y de estos 15 son jubilados y 6 estudiantes, por lo que es más probable que al elegir al azar un socio del club este sea jubilado.