



UNIVERSIDAD
DE MURCIA



Universidad
Politécnica
de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

PAU2025 - JUNIO

NOTA IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, sólo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 €.

- a) [0,75] Denotando por x el sueldo de Darío, por y el sueldo de Hugo y por z el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.
- b) [0,25] Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de m).
- c) [1,5] Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de m), y lo que cobra cada uno para $m = 2$.

1B) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1,25] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.
- b) [1,25] Resuelva la ecuación $A^t X B = C$, donde A^t es la traspuesta de A.

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Considere el triángulo rectángulo de catetos x e y cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.

- a) [0,5] Demuestre que su área viene dada por la expresión

$$f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{98 - x^2}$$

- b) [2] Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

2B) Considere la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

- a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$
- b) [1] Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) Considere las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 7 + 3\mu \\ y = -5 + \mu \\ z = 7 \end{cases}$$

- a) [0,5] Compruebe que se cruzan.
- b) [1,5] Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.
- c) [0,5] Calcule la distancia entre r y s .

3B) Considere los planos $\pi_1: x - y + z = 0$ y $\pi_2: x + y - z = 2$

- a) [1] Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2 .
- b) [0,75] Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 .
- c) [0,75] Calcule la proyección ortogonal de P en π_1 .

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):4A) Considere dos urnas, U_1 y U_2 , tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1 , depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2 . Calcule la probabilidad de que:

- a) [0,5] Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
- b) [0,5] Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
- c) [0,5] Salga una bola verde en U_2 .
- d) [0,5] Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2 .

4B) El 2% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.

- a) [1] Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.
- b) [1,5] Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 €.

- a) [0,75] Denotando por x el sueldo de Darío, por y el sueldo de Hugo y por z el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.
- b) [0,25] Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de m).
- c) [1,5] Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de m), y lo que cobra cada uno para $m = 2$.

a) Obtenemos las ecuaciones asociadas al ejercicio.

El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0 \rightarrow x = my$.

El sueldo de Hugo es el doble del de José $\rightarrow y = 2z$.

La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 € $\rightarrow mz + x + y = 600$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x = my \\ y = 2z \\ mz + x + y = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - my = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + mz = 600 \end{array} \right\}$$

b) Este sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & m & 600 \end{pmatrix}.$$

Determinamos la expresión del determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m + 2m + 0 - 0 - 0 + 2 = 3m + 2$$

Esta expresión del determinante de A nunca se anula pues $m > 0 \rightarrow 3m > 0 \rightarrow 3m + 2 > 0$.

El rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado para cualquier valor de $m > 0$.

c) Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = my \\ y = 2z \\ mz + x + y = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = m \cdot 2z \\ mz + x + 2z = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2mz \\ (m+2)z + x = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+2)z + 2mz = 600 \Rightarrow (m+2+2m)z = 600 \Rightarrow (3m+2)z = 600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{m > 0 \Rightarrow 3m+2 \neq 0\} \Rightarrow \boxed{z = \frac{600}{3m+2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2m \frac{600}{3m+2} = \frac{1200m}{3m+2}} \\ \boxed{y = 2 \frac{600}{3m+2} = \frac{1200}{3m+2}} \end{cases}$$

El sueldo de Darío es $\frac{1200m}{3m+2}$, el de Hugo es $\frac{1200}{3m+2}$ y el de José es $\frac{600}{3m+2}$. Todos dependen del valor de m .

Para $m=2$ los sueldos quedan: El sueldo de Darío es $\frac{1200 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 2} = 300$ euros, el de Hugo es

$$\frac{1200}{3 \cdot 2 + 2} = 150 \text{ euros y el de José es } \frac{600}{3 \cdot 2 + 2} = 75 \text{ euros}$$

1B) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1,25] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.

b) [1,25] Resuelva la ecuación $A^t X B = C$, donde A^t es la traspuesta de A.

a) Para que las matrices sean invertibles su determinante debe ser distinto de cero. Lo comprobamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Ambas matrices son invertibles. Determinamos la matriz inversa de cada una de ellas.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Como la matriz A es simétrica se cumple que $A^t = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^t X B = C \Rightarrow A X B = C \Rightarrow A X = C B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} C B^{-1}$$

Realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$\begin{aligned} X = A^{-1} C B^{-1} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15-5 & 0+0 \\ -5+10 & 0+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10+0 & 0+0 \\ 5-0 & 0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

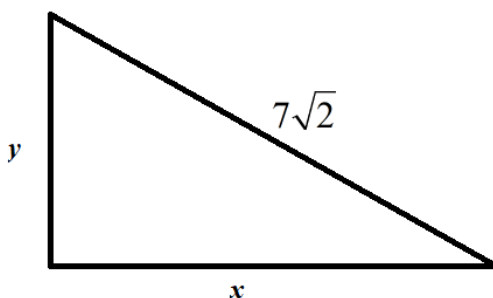
CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Considere el triángulo rectángulo de catetos x e y cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.

a) [0,5] Demuestre que su área viene dada por la expresión

$$f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{98 - x^2}$$

b) [2] Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible.
¿Cuál es el valor de dicha área máxima?



a) Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo del dibujo.

$$x^2 + y^2 = (7\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 98 \Rightarrow y^2 = 98 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{98 - x^2}$$

El área del triángulo rectángulo ($f(x)$) es la mitad del producto de la base (x) por la altura (y).

$$f(x) = \frac{xy}{2} = \frac{x\sqrt{98-x^2}}{2} = \frac{1}{2} x \sqrt{98-x^2}$$

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función área.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} x \sqrt{98-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{98-x^2} + \frac{1}{2} x \frac{-2x}{2\sqrt{98-x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{98-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{98-x^2}} = \frac{98-x^2}{2\sqrt{98-x^2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{98-x^2}} = \frac{98-x^2-x^2}{2\sqrt{98-x^2}} = \frac{98-2x^2}{2\sqrt{98-x^2}} = \frac{49-x^2}{\sqrt{98-x^2}} \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow \frac{49-x^2}{\sqrt{98-x^2}} = 0 \Rightarrow 49-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{49} = 7} \end{aligned}$$

No consideramos el valor negativo de la raíz pues se trata de la longitud.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 7$.

- En el intervalo $(0, 7)$ consideramos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{49-1^2}{\sqrt{98-1^2}} = \frac{48}{\sqrt{97}} > 0$.

La función crece en $(0, 7)$.

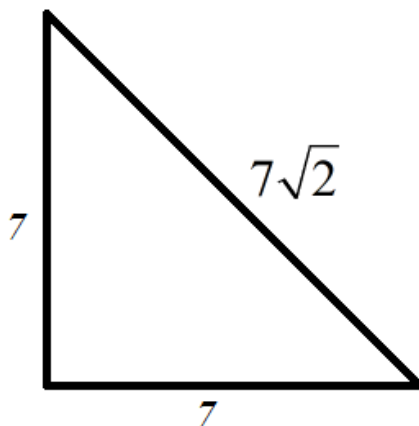
- En el intervalo $(7, 7\sqrt{2})$ consideramos $x = 8$ y la derivada vale

$$f'(8) = \frac{49-8^2}{\sqrt{98-8^2}} = \frac{-15\sqrt{34}}{34} < 0. \text{ La función decrece en } (7, 7\sqrt{2}).$$

Como la función crece antes y decrece después de $x = 7$ podemos afirmar que el área presenta un máximo relativo en dicho valor.

Para $x = 7$ el valor del otro cateto es $y = \sqrt{98 - 7^2} = 7$. El triángulo rectángulo cumpliendo las condiciones con área máxima tiene ambos catetos iguales y de longitud 7 cm.

Este valor máximo del área es $f(7) = \frac{7 \cdot 7}{2} = 24.5$ centímetros cuadrados.



2B) Considere la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$

b) [1] Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

a) Calculamos la integral usando las propiedades de los logaritmos.

$$\int f(x) dx = \int \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = \int \ln(x+1) - \ln x dx = \int \ln(x+1) dx - \int \ln x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} =$$

$$= x \ln(x+1) - \int x \frac{1}{x+1} dx - \left[x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \right] =$$

$$= x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx - x \ln x + \int dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx - x \ln x + x =$$

$$= x + x \ln(x+1) - x \ln x - \int \frac{x+1}{x+1} dx - \int \frac{-1}{x+1} dx = x + x \ln(x+1) - x \ln x - \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \cancel{x} + x \ln(x+1) - x \ln x - \cancel{x} + \ln(x+1) = \boxed{(x+1) \ln(x+1) - x \ln x + C}$$

Hemos obtenido la integral indefinida: $\int f(x) dx = (x+1) \ln(x+1) - x \ln x + C ..$

b) Buscamos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x} = 1 \Rightarrow x+1 = x \Rightarrow \color{red}{1=0}$$

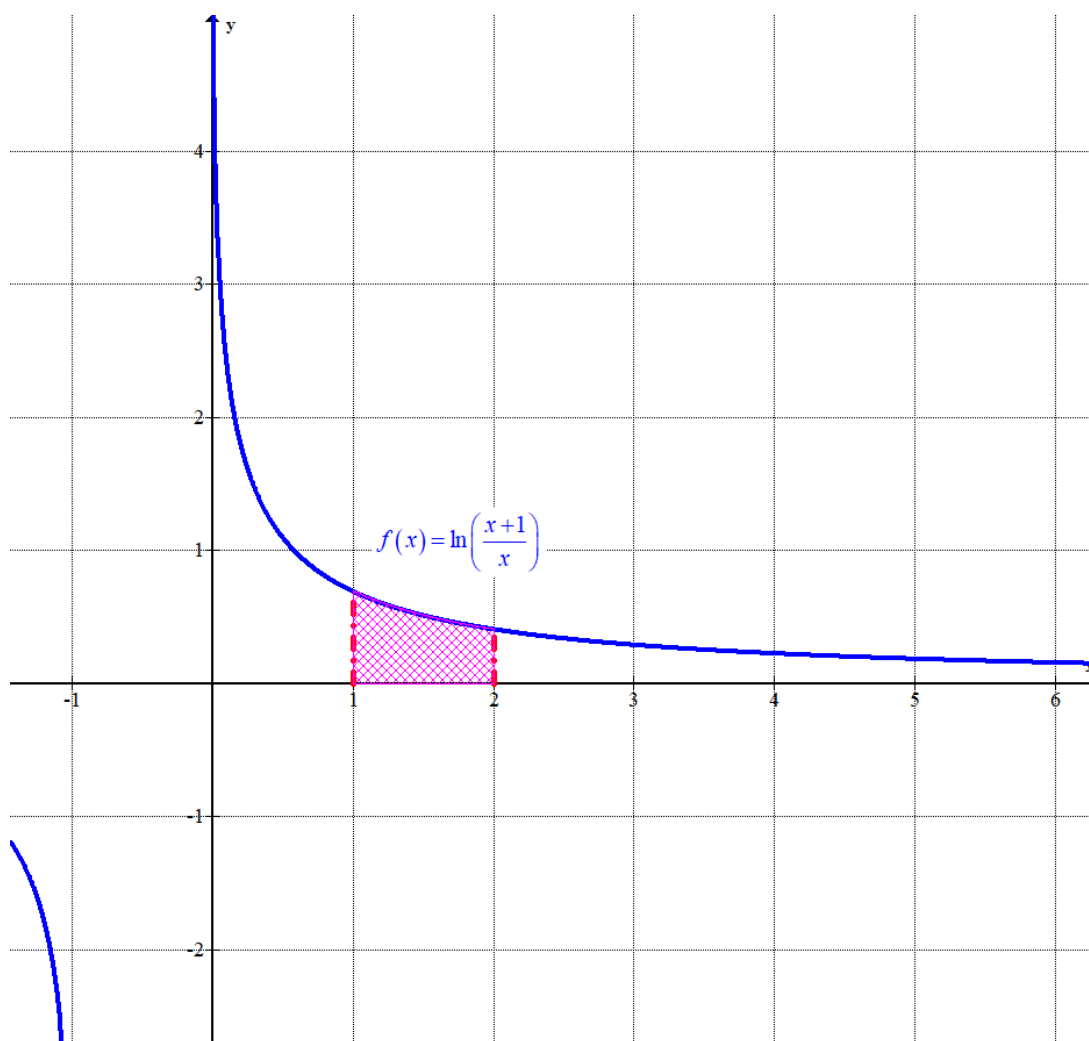
La gráfica de la función no corta el eje OX. En el intervalo (1, 2) la función es positiva, pues si tomamos un valor del intervalo, por ejemplo $x=1.5$ y sustituimos tenemos que

$$f(1.5) = \ln\left(\frac{1.5+1}{1.5}\right) \approx 0.51 > 0.$$

El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es el valor de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = \left[(x+1)\ln(x+1) - x\ln x \right]_1^2 = \\
 &= \left[(2+1)\ln(2+1) - 2\ln 2 \right] - \left[(1+1)\ln(1+1) - 1\ln 1 \right] = \\
 &= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 2\ln 2 = 3\ln 3 - 4\ln 2 = \ln 3^3 - \ln 2^4 = \ln 27 - \ln 16 = \boxed{\ln\left(\frac{27}{16}\right)}
 \end{aligned}$$

Se cumple lo indicado en el ejercicio.



CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) Considere las rectas

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=5+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x=7+3\mu \\ y=-5+\mu \\ z=7 \end{cases}$$

a) [0,5] Compruebe que se cruzan.

b) [1,5] Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.

c) [0,5] Calcule la distancia entre r y s .

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=5+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u}_r = (0,1,1) \\ P_r(1,5,0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x=7+3\mu \\ y=-5+\mu \\ z=7 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} \vec{v}_s = (3,1,0) \\ Q_s(7,-5,7) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues tienen vectores directores con coordenadas no proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (3,1,0) \\ \vec{u}_r = (0,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{0} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1,5,0) \\ Q_s(7,-5,7) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (7,-5,7) - (1,5,0) = (6,-10,7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (0,1,1) \\ \vec{v}_s = (3,1,0) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (6,-10,7) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & -10 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 30 - 6 - 21 - 0 = -57 \neq 0$$

Como el valor de este producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

b) Hallamos el vector director de la recta t perpendicular a ambas como el producto vectorial de los vectores directores de r y s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (0,1,1) \\ \vec{v}_s = (3,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3j + 0 - 3k - 0 - i = -i + 3j - 3k = (-1, 3, -3)$$

Hallamos la ecuación del plano π que contiene a la recta r y que también tiene como vector director $\vec{w}_t$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (-1, 3, -3) \\ \vec{v} = \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ P_r(1, 5, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-1) - 0 - z + 0 + y - 5 + 3(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3 - z + y - 5 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 6x + y - z - 11 = 0}$$

Hallamos la ecuación del plano π' que contiene a la recta s y que también tiene como vector director $\vec{w}_t$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (-1, 3, -3) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (3, 1, 0) \\ Q_s(7, -5, 7) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-7 & y+5 & z-7 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - 9(y+5) - z + 7 - 9(z-7) - 0 + 3(x-7) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9y - 45 - z + 7 - 9z + 63 + 3x - 21 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 3x - 9y - 10z + 4 = 0}$$

La recta t buscada es la intersección de los dos planos $\pi: 6x + y - z - 11 = 0$ y $\pi': 3x - 9y - 10z + 4 = 0$.

$$t: \begin{cases} 6x + y - z - 11 = 0 \\ 3x - 9y - 10z + 4 = 0 \end{cases}$$

- c) Para hallar la distancia entre las dos rectas r y s que se cruzan determinamos el plano π'' que contiene a la recta r y que es paralelo a la recta s . La distancia entre las rectas r y s es el valor de la distancia de un punto de la recta s al plano π'' .

Hallamos la ecuación del plano π'' que contiene a la recta r y tiene como otro de sus vectores directores el director de la recta s . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}'' = \vec{w}_t = (-1, 3, -3) \\ P_r(1, 5, 0) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi'': -x + 3y - 3z + D = 0 \\ P_r(1, 5, 0) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 3 \cdot 5 - 3 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 + D = 0 \Rightarrow D = -14 \Rightarrow \boxed{\pi'': -x + 3y - 3z - 14 = 0}$$

Hallamos la distancia de $Q_s(7, -5, 7)$ al plano $\pi'': -x + 3y - 3z - 14 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(7, -5, 7) \\ \pi'': -x + 3y - 3z - 14 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, s) = d(Q_s, \pi'') = \frac{|-7 + 3(-5) - 3 \cdot 7 - 14|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{57}{\sqrt{19}} = 3\sqrt{19}$$

La distancia entre r y s tiene un valor de $3\sqrt{19}$ unidades.

3B) Considere los planos $\pi_1 : x - y + z = 0$ y $\pi_2 : x + y - z = 2$

- a) [1] Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2 .
 b) [0,75] Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 .
 c) [0,75] Calcule la proyección ortogonal de P en π_1

a) La ecuación implícita de la recta donde se cortan los planos es $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$. Obtenemos la ecuación paramétrica de la recta.

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ x + y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow y - z + y - z = 2 \Rightarrow 2y - 2z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - z = 1 \Rightarrow y = 1 + z \Rightarrow x = 1 + z - z = 1 \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

La ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2 es $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

b) Comprobamos que el punto P no pertenece a ninguno de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P(1, 2, 3) \in \pi_1 ? \\ \pi_1 : x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 - 2 + 3 = 0 ? \Rightarrow \text{¿} 2 = 0 ?$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P(1, 2, 3) \in \pi_2 ? \\ \pi_2 : x + y - z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 + 2 - 3 = 2 ? \Rightarrow \text{¿} 0 = 2 ?$$

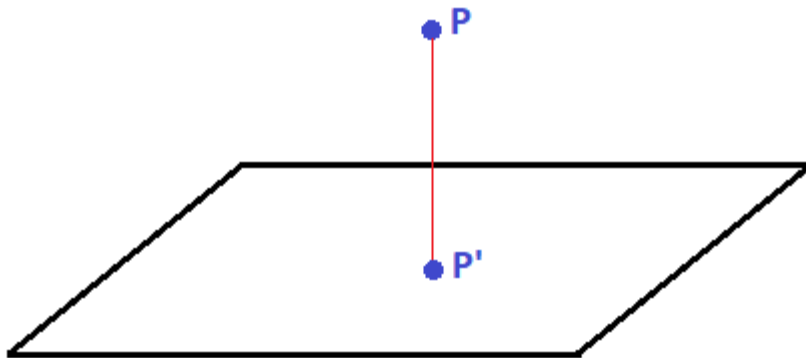
La recta s que pasa por $P(1, 2, 3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 es la recta paralela a la recta r que pasa por el punto P .

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (0, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 2, 3) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{u}_r = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$$

La recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 tiene ecuación $s: \begin{cases} x=1 \\ y=2+\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z=3+\alpha \end{cases}$.

c) Debemos hallar las coordenadas del punto P' perteneciente al plano tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ sea paralelo a su vector normal.



$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : x - y + z = 0 \\ P'(a, b, c) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b + c = 0 \Rightarrow a = b - c \Rightarrow P'(b - c, b, c)$$

$$\overrightarrow{PP'} = (b - c, b, c) - (1, 2, 3) = (b - c - 1, b - 2, c - 3)$$

$$\pi_1 : x - y + z = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{PP'} \parallel \vec{n}_1 \Rightarrow \frac{b - c - 1}{1} = \frac{b - 2}{-1} = \frac{c - 3}{1} \Rightarrow b - c - 1 = 2 - b = c - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - c - 1 = 2 - b \\ 2 - b = c - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = c + 3 \\ 5 - b = c \end{cases} \Rightarrow 2b = 5 - b + 3 \Rightarrow 3b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow a = \frac{8}{3} - \frac{7}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{P'\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

La proyección ortogonal de P en π_1 tiene coordenadas $P'\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) Considere dos urnas, U_1 y U_2 , tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1 , depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2 . Calcule la probabilidad de que:

- a) [0,5] Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
- b) [0,5] Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
- c) [0,5] Salga una bola verde en U_2 .
- d) [0,5] Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2 .

a) Si sale roja de la urna U_1 entonces la urna U_2 pasa a tener 7 bolas rojas y 3 verdes por lo que la probabilidad de extraer una bola roja de la urna U_2 es de $\frac{7}{10} = 0.7$.

b) Si sale roja de la urna U_1 entonces la urna U_2 pasa a tener 7 bolas rojas y 3 verdes por lo que la probabilidad de extraer una bola roja de la urna U_2 es de $\frac{3}{10} = 0.3$.

c) Aplicamos el teorema de la probabilidad total. Sumamos las probabilidades de sacar verde en urna U_2 sacando previamente de la urna U_1 una bola roja y la probabilidad de sacar verde en urna U_2 sacando previamente de la urna U_1 una bola verde.

$$P(V_2) = P(V_1)P(V_2/V_1) + P(R_1)P(V_2/R_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} = \boxed{0.36}$$

d) Nos piden calcular $P(R_1/R_2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R_1/R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1)P(R_2/R_1)}{1 - P(V_2)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10}}{1 - 0.36} = \boxed{\frac{7}{16} = 0.4375}$$

4B) El 2% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.

- a) [1] Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.
- b) [1,5] Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

- a) Denominamos X = Número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo $n = 10$ y p = probabilidad de que una pieza esté en buen estado = 0.98. $X = B(10, 0.98)$.

Existen 10 repeticiones del experimento “ver si la pieza está en buen estado” y cada repetición es independiente de las demás.

La media es $n \cdot p = 10 \cdot 0.98 = 9.8$ y la desviación típica vale $\sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.98 \cdot 0.02} \approx 0.4427$.

Para que haya exactamente 1 pieza defectuosa debe haber 9 piezas en buen estado. Debemos calcular $P(X = 9)$.

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} 0.98^9 \cdot 0.02^1 = 10 \cdot 0.98^9 \cdot 0.02 \approx \boxed{0.16667}$$

La probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa en un lote de 10 piezas vale 0.16667

- b) Denominamos X = Número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo $n = 2000$ y p = probabilidad de que una pieza esté en buen estado = 0.98. $X = B(2000, 0.98)$.

Para el cálculo de probabilidades dado el elevado número de elementos de la muestra aproximamos la distribución binomial a una normal Y , siendo su media $\mu = n \cdot p = 2000 \cdot 0.98 = 1960$ y su desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot 0.98 \cdot 0.02} \approx 6.26$. $Y = N(1960, 6.26)$.

Esta aproximación es buena pues $n \cdot p = 1960 > 5$ y $n \cdot q = 2000 \cdot 0.02 = 40 > 5$.

Para que haya menos de 50 piezas defectuosas debe haber más de 1950 piezas en buen estado. Nos piden calcular $P(X > 1950)$.

$$P(X > 1950) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 1950.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{1950.5 - 1960}{6.26}\right) = P(Z \geq -1.52) = P(Z \leq 1.52) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9357}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.512
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.551
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.629
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.666
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.701
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.735
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.767
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.796
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.823
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.848
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.870
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.890
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.908
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.923
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.948

La probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas en un lote de 2000 piezas vale 0.9357.