

Prueba de Acceso a la Universidad para Mayores de 25 años

Curso: 2025-2026

Asignatura: MATEMÁTICAS II

**Responde a dos opciones de las cuatro que se presentan: A, B, C y D.**

(Examen sobre 20 puntos)

OPCIÓN A**A1)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases} x + (1+a)y + 2z = 3 \\ ay + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

(5 puntos)

A2) Calcula las siguientes integrales:

(5 puntos)

$$(i) \int \frac{5x}{x^2 + x - 6} dx \qquad (ii) \int_1^e \frac{\ln(x^2)}{x} dx$$

OPCIÓN B**B1)** Sean $P(-1, 0, 3)$, $Q(1, 2, 2)$ y $R(-2, 2, 5)$ tres vértices de un cuadrado. Calcula el cuarto vértice y su área.

(5 puntos)

B2) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$(i) f(x) = x \cdot \ln((\cos(2x))^2) \qquad (ii) g(x) = \frac{\arctg(x)}{\ln(1+x^2)}$$

(5 puntos)

OPCIÓN C

C1) Calcula el determinante y la matriz inversa de la siguiente matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 puntos)

C2) Calcula los siguientes límites:

(5 puntos)

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) \cdot \sin(x)}{x} \qquad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 2x^2 + 5}}{4x^3 + x}$$

OPCIÓN D

D1) Encuentra la ecuación continua de la recta perpendicular al plano $\Pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$, que pasa por el punto $(2, 3, 1)$. (5 puntos)

D2) Calcula los máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y los puntos de corte de la siguiente curva. Esboza su gráfica.

$$f(x) = x^3 - 2x^2$$

(5 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (1+a)y + 2z = 3 \\ ay + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \quad (5 \text{ puntos})$$

Cambiamos la posición de las incógnitas z e y para facilitar el estudio del sistema.

$$\begin{cases} x + (1+a)y + 2z = 3 \\ ay + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z + (1+a)y = 3 \\ z + ay = 1 \\ 2x + z + y = 3 \end{cases}$$

Este sistema tiene asociadas la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+a \\ 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+a & 3 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para triangular el sistema y estudiar con más comodidad su compatibilidad.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+a & 3 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -2 \quad -4 \quad -2-2a \quad -6 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -1-2a \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+a & 3 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & -3 & -1-2a & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + 3 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad -3 \quad -1-2a \quad -3 \\ 0 \quad 3 \quad 3a \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1+a \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad 1+a \quad 3}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad a \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad \underbrace{-1+a}_A \quad 0 \end{pmatrix}$$

La compatibilidad del sistema depende del valor de $-1+a$, si es nulo o no. Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso el rango de A es 3 igual que el de la matriz A/B . El sistema tiene una única solución. La obtenemos, a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left. \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1+a & 3 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1+a & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x+2z+(1+a)y=3 \\ z+ay=1 \\ (-1+a)y=0 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2z+(1+a)y=3 \\ \{-1+a \neq 0\} \Rightarrow z+ay=1 \\ \boxed{y = \frac{0}{-1+a} = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2z=3 \\ z+a \cdot 0=1 \rightarrow \boxed{z=1} \end{array} \right\} \Rightarrow x+2 \cdot 1=3 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Para $a \neq 1$ la solución del sistema es $x=1$, $y=0$, $z=1$. La solución no depende del valor de “a”.

CASO 2. $a=1$

La matriz ampliada equivalente queda $\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Resolvemos el sistema asociado.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x+2z+2y=3 \\ z+y=1 \end{array} \left\} \Rightarrow \begin{array}{l} x+2z+2y=3 \\ \boxed{y=1-z} \end{array} \right\} \Rightarrow x+2z+2(1-z)=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \cancel{2z} + 2 - \cancel{2z} = 3 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=1-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Para $a=1$ el sistema es compatible indeterminado y sus infinitas soluciones tienen la expresión

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

A2) Calcula las siguientes integrales:

(5 puntos)

(i) $\int \frac{5x}{x^2 + x - 6} dx$

(ii) $\int_1^e \frac{\ln(x^2)}{x} dx$

Calculamos la primera integral utilizando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{5x}{x^2 + x - 6} dx = \dots$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{-1-5}{2} = \boxed{-3=x} \end{cases}$$

Descomposición en fracciones simples

$$\begin{aligned} \frac{5x}{x^2 + x - 6} &= \frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow \frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \Rightarrow \\ \Rightarrow 5x &= A(x+3) + B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 10 = 5A \rightarrow A=2 \\ x=-3 \rightarrow -15 = B(-5) \rightarrow B=3 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{5x}{x^2 + x - 6} &= \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3} \end{aligned}$$

$$\dots = \int \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3} dx = \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{3}{x+3} dx =$$

$$= 2 \int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{x+3} dx = \boxed{2 \ln|x-2| + 3 \ln|x+3| + K}$$

Empezamos calculando la integral indefinida con el método de cambio de variable.

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x} dx = \int \frac{2 \ln(x)}{x} dx = 2 \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \ln(x) \rightarrow dt = \frac{1}{x} dx \rightarrow dx = x dt \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \int \frac{t}{x} x dt = 2 \int t dt = 2 \frac{t^2}{2} = t^2 = (\ln(x))^2 + K$$

Aplicamos lo obtenido al cálculo de la integral definida.

$$\int_1^e \frac{\ln(x^2)}{x} dx = \left[(\ln(x))^2 \right]_1^e = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 = 1^2 - 0^2 = \boxed{1}$$

OPCIÓN B

B1) Sean $P(-1,0,3)$, $Q(1,2,2)$ y $R(-2,2,5)$ tres vértices de un cuadrado. Calcula el cuarto vértice y su área. (5 puntos)

Hallamos la distancia entre los tres puntos para averiguar cuáles son iguales.

$$\left. \begin{array}{l} P(-1,0,3) \\ Q(1,2,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (1,2,2) - (-1,0,3) = (2,2,-1) \Rightarrow d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

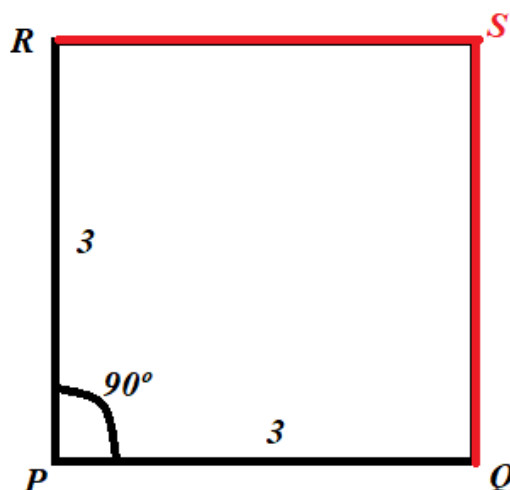
$$\left. \begin{array}{l} Q(1,2,2) \\ R(-2,2,5) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{QR} = (-2,2,5) - (1,2,2) = (-3,0,3) \Rightarrow d(Q,R) = |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(-1,0,3) \\ R(-2,2,5) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PR} = (-2,2,5) - (-1,0,3) = (-1,2,2) \Rightarrow d(P,R) = |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

Los segmentos PR y PQ tienen la misma longitud. El cuadrado podría tener un vértice en el punto P. Comprobamos que en el vértice P hay 90° , es decir los vectores $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son ortogonales. Para ello comprobamos que su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (2,2,-1) \\ \overrightarrow{PR} = (-1,2,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (2,2,-1)(-1,2,2) = -2 + 4 - 2 = 0$$

Se cumple que P es uno de los vértices de un cuadrado. El punto S que buscamos completa el cuadrado QPRS. Dibujamos la situación planteada.



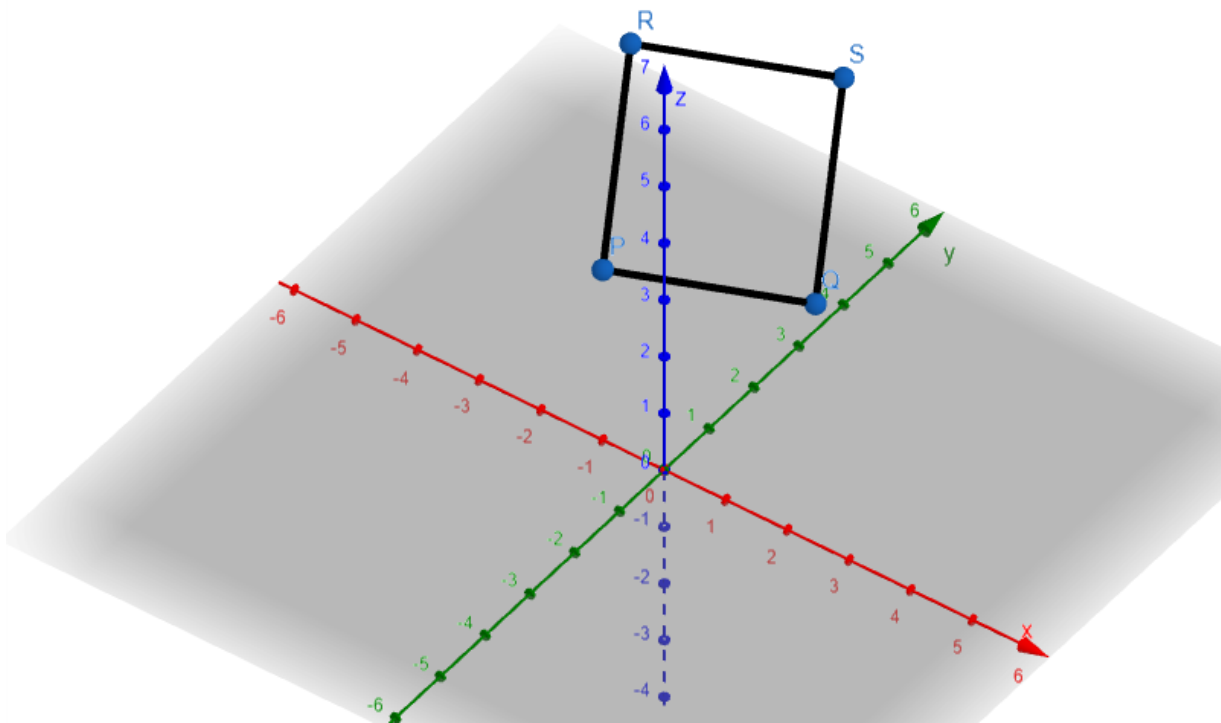
Al ser un cuadrado se debe cumplir que los vectores $\overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{PQ}$ tengan las mismas coordenadas pues indican la misma dirección y tienen la misma longitud.

$$\left. \begin{array}{l} R(-2,2,5) \\ S(a,b,c) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{RS} = (a,b,c) - (-2,2,5) = (a+2,b-2,c-5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (2, 2, -1) \\ \overrightarrow{RS} = (a+2, b-2, c-5) \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2 = a+2 \rightarrow a=0 \\ 2 = b-2 \rightarrow b=4 \\ -1 = c-5 \rightarrow c=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S(0, 4, 4)}$$

El cuarto vértice del cuadrado es el punto $S(0, 4, 4)$.

Como el lado mide 3 unidades el área vale $3^2 = 9$ unidades cuadradas.



B2) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$(i) f(x) = x \cdot \ln\left((\cos(2x))^2\right) \quad (ii) g(x) = \frac{\arctg(x)}{\ln(1+x^2)}$$

(5 puntos)

(i) Calculamos la expresión de la primera derivada.

$$f(x) = x \cdot \ln\left((\cos(2x))^2\right) = 2x \ln(\cos(2x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \ln(\cos(2x)) + 2x \cdot \frac{-\sin(2x) \cdot 2}{\cos(2x)} =$$

$$= 2 \ln(\cos(2x)) - \frac{4x \cdot \sin(2x)}{\cos(2x)} = \boxed{2 \ln(\cos(2x)) - 4x \cdot \operatorname{tg}(2x)}$$

(ii) Calculamos la expresión de la segunda derivada.

$$g(x) = \frac{\arctg(x)}{\ln(1+x^2)} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(1+x^2) - \frac{2x}{1+x^2} \cdot \arctg(x)}{(\ln(1+x^2))^2} =$$

$$= \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} - \frac{2x \cdot \arctg(x)}{1+x^2}}{(\ln(1+x^2))^2} = \frac{\ln(1+x^2) - 2x \cdot \arctg(x)}{(1+x^2)(\ln(1+x^2))^2} = \boxed{\frac{\ln(1+x^2) - 2x \cdot \arctg(x)}{(1+x^2)(\ln(1+x^2))^2}}$$

OPCIÓN C

C1) Calcula el determinante y la matriz inversa de la siguiente matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 puntos)

Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 4 - 2 + 6 + 2 + 2 = 1$$

Al ser su determinante no nulo la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-2 & -(-2+2) & -4+6 \\ -(1-2) & -1+2 & -(-2+2) \\ 1-3 & -(-1+2) & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El valor del determinante de la matriz A es 1 y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

C2) Calcula los siguientes límites:

(5 puntos)

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) \cdot \sin(x)}{x}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 2x^2 + 5}}{4x^3 + x}$$

(i) Calculamos el primer límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) \cdot \sin(x)}{x} = \frac{\operatorname{tg}(0) \cdot \sin(0)}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \sin(x) + \operatorname{tg}(x) \cdot \cos(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)}{\cancel{\cos(x)}} \cdot \cancel{\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \sin(x) = \frac{\sin(0)}{\cos^2(0)} + \sin(0) = \frac{0}{1^2} + 0 = \boxed{0}$$

(ii) Calculamos el segundo límite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 2x^2 + 5}}{4x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6}}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

OPCIÓN D

DI) Encuentra la ecuación continua de la recta perpendicular al plano $\Pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$, que pasa por el punto $(2, 3, 1)$ (5 puntos)

La recta r perpendicular al plano Π debe tener como vector director el vector normal del plano.

$$\Pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -1, 2) \\ (2, 3, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}}$$

La recta perpendicular al plano $\Pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$, que pasa por el punto $(2, 3, 1)$ tiene la siguiente ecuación continua $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

D2) Calcula los máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y los puntos de corte de la siguiente curva. Esboza su gráfica.

$$f(x) = x^3 - 2x^2$$

(5 puntos)

Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4 = 0 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada y vemos si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \Rightarrow f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 6 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \rightarrow \text{Es máximo} \\ f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \cdot \frac{4}{3} - 4 = 4 > 0 \rightarrow \text{Es mínimo} \end{cases}$$

Como $f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 = 0$ y $f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{-32}{27}$ el máximo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$ y el mínimo relativo es $\left(\frac{4}{3}, \frac{-32}{27}\right)$.

Para obtener el punto de inflexión utilizamos la segunda derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6x - 4 \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Comprobamos si la derivada tercera es no nula para $x = \frac{2}{3}$.

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''\left(\frac{2}{3}\right) = 12 \neq 0$$

La derivada tercera es no nula y la función presenta un punto de inflexión en $x = \frac{2}{3}$.

Como $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{-16}{27}$ el punto de inflexión tiene coordenadas $\left(\frac{2}{3}, \frac{-16}{27}\right)$.

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 2x^2 \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0, 0) \\ x = 2 \rightarrow B(2, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 2x^2 \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

La función tiene dos puntos de corte A(0, 0) y B(2, 0).

Hacemos un esbozo de la función determinando previamente una tabla de valores.

x	$f(x) = x^3 - 2x^2$
-1	-3
0	0 Máximo
$2/3$	$-16/27$ Punto de inflexión
$4/3$	$-32/27$ Mínimo
2	0
3	9

