



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE
ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones

- Duración: 1 hora y 30 minutos.
- Esta prueba consta de 4 ejercicios.
- En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
- En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
- La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) En un festival de cine con tres sesiones se venden tres tipos de entradas: Estándar, Premium y VIP. En la sesión inaugural se vendieron 5 entradas Premium, 20 Estándar y 20 VIP, obteniéndose una recaudación de 1800€. En la sesión nocturna se vendieron 10 VIP, 10 Estándar y 5 Premium, recaudándose 1000€. El día de la proyección de clausura, el número de entradas Premium superó en 4 al resto de entradas, que fueron 12 VIP y 4 Estándar, arrojando una recaudación de 1560€.

- (2.25 puntos)** Calcule el precio de cada tipo de entrada y la recaudación total obtenida.
- (0.75 puntos)** Determine el tipo de entrada con la que se obtuvo una mayor recaudación y el valor de dicha recaudación.

B) (3 puntos) Una empresa maderera fabrica tableros de dos tipos, DM y aglomerado, a partir de madera triturada. Para producir 1 m^2 de tablero DM se consumen 10 m^3 de madera triturada y se obtiene un beneficio de 10€. Para producir 1 m^2 de tablero aglomerado se consumen 30 m^3 de madera triturada y se obtiene un beneficio de 20€. La empresa puede fabricar diariamente como máximo 12 m^2 de tableros DM y 18 m^2 de tableros de aglomerado. Además, la capacidad total de la empresa limita la producción conjunta a 26 m^2 diarios y dispone de 600 m^3 de madera triturada al día. Determine cuántos metros cuadrados de cada tipo de tablero deben producirse diariamente para maximizar el beneficio total y calcule cuál es ese beneficio.

EJERCICIO 2

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{20} & \text{si } 0 \leq x < 20 \\ a + bx & \text{si } 20 \leq x < 50 \\ 36 - \frac{x^2}{100} & \text{si } 50 \leq x \leq 60 \end{cases}$$

siendo a y b números reales.

- (0.75 puntos)** Determine los valores de a y b para que la función f sea continua en todo su dominio.
- Para $a = 26$ y $b = -\frac{3}{10}$:
 - (0.75 puntos)** Calcule los extremos relativos de f .
 - (0.5 puntos)** Represente gráficamente f .

- iii) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado limitado por el eje OX y la gráfica de la función f .

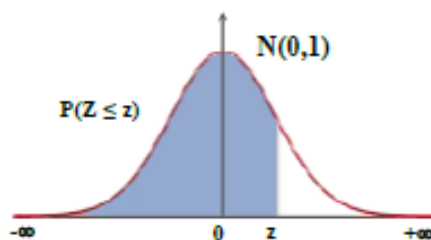
EJERCICIO 3 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

- A) a) (1 punto)** Dada la población $\{-5, -2, 13, 18, 20\}$, se consideran todas las muestras de tamaño 3 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de la variable media muestral.
- b) (1 punto)** Dados dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral, se sabe que $P(A) = 0.75$, $P(B^c) = 0.8$ y $P(A/B) = 0.6$. Calcule las siguientes probabilidades:
 $P(A \cap B)$, $P(B - A)$, $P(A \cup B)$, $P(A^c - B)$
- B) Sean A y B dos sucesos del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A)$ es el doble de $P(B)$, $P(B^c/A) = 0.75$ y $P(A \cap B) = 0.2$.**
- a) (0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B .
- b) (0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no ocurra ni A ni B . ¿Son los sucesos A^c y B^c incompatibles?
- c) Si el experimento se realiza 1350 veces de forma independiente:**
- i) (0.25 puntos)** Determine la distribución de la variable aleatoria X : "Número de veces que ocurre B ".
- ii) (0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que B ocurra a lo sumo 580 veces, pero más de 499 veces.

EJERCICIO 4

Una empresa de transporte contrata una consultora para optimizar sus recursos. La consultora estudia la distancia en kilómetros que recorren en cada viaje los camiones de la empresa, sabiendo que la variable que mide dicha distancia se distribuye según una Normal de varianza 225 km^2 y media desconocida. Para ello, toma aleatoriamente una muestra de 49 viajes y obtiene una media de 325 km recorridos por viaje.

- a) (0.75 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97% para que la consultora pueda estimar la distancia media que recorren por viaje los camiones de la empresa.
- b) (0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si la consultora puede considerar que los camiones de la empresa recorren por término medio 310 km por viaje que realizan.
- c) (0.75 puntos)** ¿Cuántos viajes, como mínimo, tendría que seleccionar aleatoriamente la consultora para estimar la distancia media que recorren por viaje los camiones de la empresa mediante un intervalo de confianza del 99% que tuviera una amplitud inferior a 4 km ?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$ 

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984
2,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994
3,0	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,2	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,3	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,4	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,6	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

A) En un festival de cine con tres sesiones se venden tres tipos de entradas: Estándar, Premium y VIP. En la sesión inaugural se vendieron 5 entradas Premium, 20 Estándar y 20 VIP, obteniéndose una recaudación de 1800€. En la sesión nocturna se vendieron 10 VIP, 10 Estándar y 5 Premium, recaudándose 1000€. El día de la proyección de clausura, el número de entradas Premium superó en 4 al resto de entradas, que fueron 12 VIP y 4 Estándar, arrojando una recaudación de 1560€.

- a) **(2.25 puntos)** Calcule el precio de cada tipo de entrada y la recaudación total obtenida.
 b) **(0.75 puntos)** Determine el tipo de entrada con la que se obtuvo una mayor recaudación y el valor de dicha recaudación.

- a) Llamamos “x” al precio de una entrada Estándar, “y” al de una entrada Premium y “z” al de una entrada VIP.

“En la sesión inaugural se vendieron 5 entradas Premium, 20 Estándar y 20 VIP, obteniéndose una recaudación de 1800€” $\rightarrow 20x + 5y + 20z = 1800$

“En la sesión nocturna se vendieron 10 VIP, 10 Estándar y 5 Premium, recaudándose 1000€” $\rightarrow 10x + 5y + 10z = 1000$

“El día de la proyección de clausura, el número de entradas Premium superó en 4 al resto de entradas, que fueron 12 VIP y 4 Estándar, arrojando una recaudación de 1560€” $\rightarrow$

“El día de la proyección de clausura, el número de entradas Premium fueron 20, 12 VIP y 4 Estándar, arrojando una recaudación de 1560€” $\rightarrow 4x + 20y + 12z = 1560$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 5y + 20z = 1800 \\ 10x + 5y + 10z = 1000 \\ 4x + 20y + 12z = 1560 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + y + 4z = 360 \\ x + 5y + 3z = 390 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + y + 4z = 360 \\ y = 200 - 2x - 2z \\ x + 5y + 3z = 390 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 200 - 2x - 2z + 4z = 360 \\ x + 5(200 - 2x - 2z) + 3z = 390 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2z = 160 \\ x + 1000 - 10x - 10z + 3z = 390 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 80 \\ -9x - 7z = -610 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 80 - z \\ 9x + 7z = 610 \end{array} \right\} \Rightarrow 9(80 - z) + 7z = 610 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 720 - 9z + 7z = 610 \Rightarrow -2z = -110 \Rightarrow \boxed{z = \frac{110}{2} = 55} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 80 - 55 = 25} \Rightarrow \boxed{y = 200 - 2 \cdot 25 - 2 \cdot 55 = 40}$$

Cada entrada estándar cuesta 25 euros, cada entrada premium cuesta 40 euros y cada entrada VIP cuesta 55 euros.

- b) En total se obtuvo una recaudación de $1800 + 1000 + 1560 = 4360$ euros.

Se vendieron $20 + 10 + 4 = 34$ entradas estándar obteniendo con ellas un importe de $34 \cdot 25 = 850$ euros.

Se vendieron $5 + 5 + 20 = 30$ entradas premium obteniendo con ellas un importe de $30 \cdot 40 = 1200$ euros.

Se vendieron $20 + 10 + 12 = 42$ entradas VIP obteniendo con ellas un importe de $42 \cdot 55 = 2310$ euros.

Se obtuvo mayor recaudación con las entradas VIP con un importe de 2310 euros.

EJERCICIO 1

B) (3 puntos) Una empresa maderera fabrica tableros de dos tipos, DM y aglomerado, a partir de madera triturada. Para producir 1 m^2 de tablero DM se consumen 10 m^3 de madera triturada y se obtiene un beneficio de 10€. Para producir 1 m^2 de tablero aglomerado se consumen 30 m^3 de madera triturada y se obtiene un beneficio de 20€. La empresa puede fabricar diariamente como máximo 12 m^2 de tableros DM y 18 m^2 de tableros de aglomerado. Además, la capacidad total de la empresa limita la producción conjunta a 26 m^2 diarios y dispone de 600 m^3 de madera triturada al día. Determine cuántos metros cuadrados de cada tipo de tablero deben producirse diariamente para maximizar el beneficio total y calcule cuál es ese beneficio.

Llamamos “x” a los metros cuadrados de DM que se fabrican al día e “y” a los metros cuadrados de aglomerado.

La función que queremos maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x, y) = 10x + 20y$.

Las restricciones son las siguientes.

La empresa puede fabricar diariamente como máximo 12 m^2 de tableros DM y 18 m^2 de tableros de aglomerado $\rightarrow x \leq 12; y \leq 18$

La capacidad total de la empresa limita la producción conjunta a 26 m^2 diarios y dispone de 600 m^3 de madera triturada al día $\rightarrow x + y \leq 26; 10x + 30y \leq 600$.

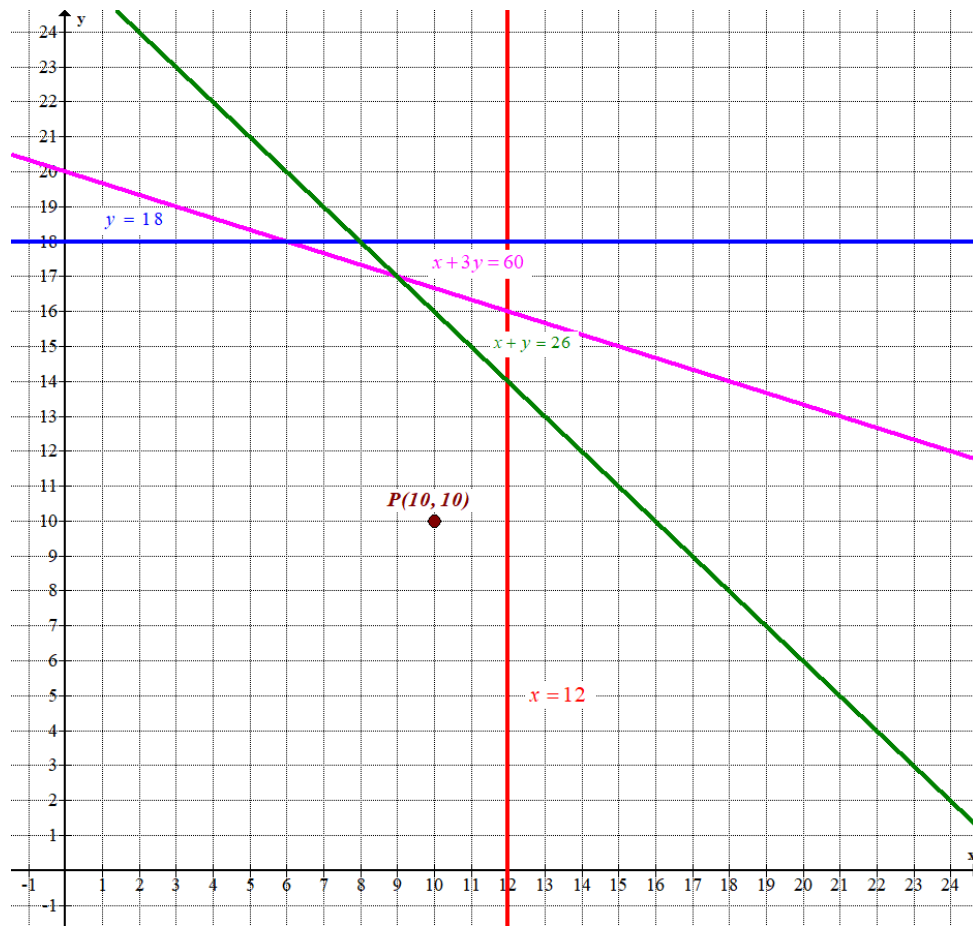
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 12 \\ y \leq 18 \\ x + y \leq 26 \\ 10x + 30y \leq 600 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq 12 \\ y \leq 18 \\ x + y \leq 26 \\ x + 3y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

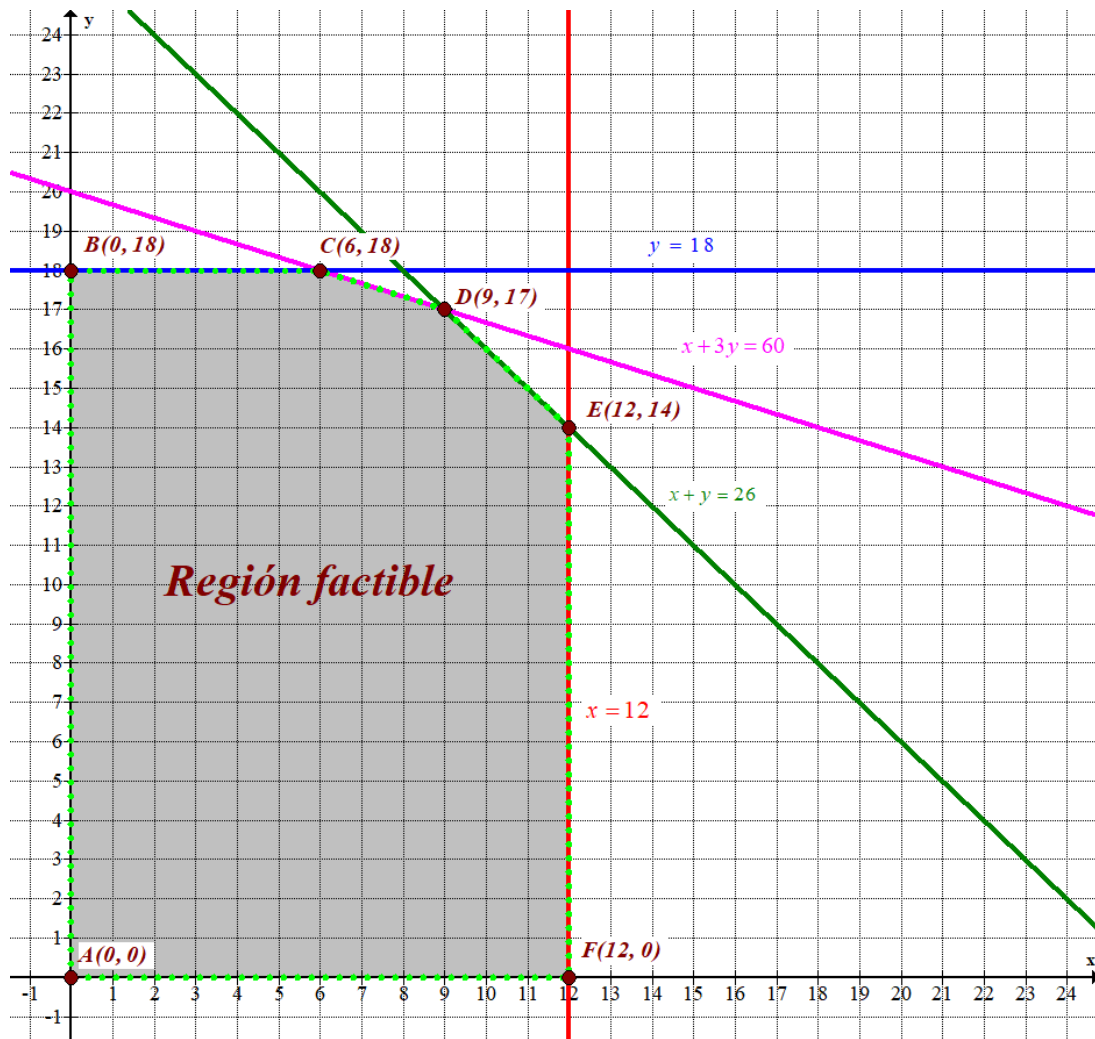
$x = 12$	$y = 18$	$x + y = 26$	$x + 3y = 60$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x = 12 \mid y$	$x \mid y = 18$	$x \mid y = 26 - x$	$x \mid y = \frac{60 - x}{3}$	
12 0	0 18	0 26	0 20	Primer cuadrante
12 10	6 18	9 17	6 18	
12 14	12 18	12 14	9 17	



La región factible está situada en el primer cuadrante por debajo de la recta horizontal azul, a la izquierda de la recta vertical roja y por debajo de las rectas oblicuas rosa y verde. Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq 12 \\ 10 \leq 18 \\ 10 + 10 \leq 26 \\ 10 + 3 \cdot 10 \leq 60 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 10x + 20y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 18) \rightarrow B(0, 18) = 10 \cdot 0 + 20 \cdot 18 = 360$$

$$C(6, 18) \rightarrow B(6, 18) = 10 \cdot 6 + 20 \cdot 18 = 420$$

$$D(9, 17) \rightarrow B(9, 17) = 10 \cdot 9 + 20 \cdot 17 = 430 \text{ Máximo}$$

$$E(12, 14) \rightarrow B(12, 14) = 10 \cdot 12 + 20 \cdot 14 = 400$$

$$F(12, 0) \rightarrow B(12, 0) = 10 \cdot 12 + 20 \cdot 0 = 120$$

El valor máximo es 430 € y se alcanza en el vértice D(9, 17).

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 430 euros con la fabricación de 9 m² de tablero DM y 17 m² de tablero aglomerado.

EJERCICIO 2

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{20} & \text{si } 0 \leq x < 20 \\ a + bx & \text{si } 20 \leq x < 50 \\ 36 - \frac{x^2}{100} & \text{si } 50 \leq x \leq 60 \end{cases}$$

siendo a y b números reales.

a) **(0.75 puntos)** Determine los valores de a y b para que la función f sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 26$ y $b = -\frac{3}{10}$:

i) **(0.75 puntos)** Calcule los extremos relativos de f .

ii) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente f .

iii) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado limitado por el eje OX y la gráfica de la función f .

i) En el intervalo $[0, 20)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{x^2}{20}$, que es una expresión

polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(20, 50)$ la función tiene la expresión $f(x) = a + bx$, que es una expresión polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(50, 60]$ la función tiene la expresión $f(x) = 36 - \frac{x^2}{100}$, que es una expresión polinómica y por tanto continua.

Comprobamos la continuidad en los cambios de definición.

La función debe ser continua en $x = 20$.

$$\left. \begin{aligned} f(20) &= a + 20b \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 20^+} a + bx = a + 20b \\ \lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 20^-} \frac{x^2}{20} = \frac{20^2}{20} = 20 \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = f(20) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a + 20b = 20}$$

La función debe ser continua en $x = 50$.

$$\left. \begin{aligned} f(50) &= 36 - \frac{50^2}{100} = 36 - 25 = 11 \\ \lim_{x \rightarrow 50^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 50^+} 36 - \frac{x^2}{100} = 11 \\ \lim_{x \rightarrow 50^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 50^-} a + bx = a + 50b \\ \lim_{x \rightarrow 50^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 50^-} f(x) = f(50) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a + 50b = 11}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + 50b = 11 \\ a + 20b = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + 50b = 11 \\ a = 20 - 20b \end{array} \right\} \Rightarrow 20 - 20b + 50b = 11 \Rightarrow 30b = -9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{-9}{30} = \frac{-3}{10}} \Rightarrow \boxed{a = 20 - 20 \cdot \frac{-3}{10} = 20 + 6 = 26}$$

Para $a = 26$ y $b = \frac{-3}{10}$ la función es continua.

b) Para $a = 26$ y $b = -\frac{3}{10}$ la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{20} & \text{si } 0 \leq x < 20 \\ 26 - \frac{3x}{10} & \text{si } 20 \leq x < 50 \\ 36 - \frac{x^2}{100} & \text{si } 50 \leq x \leq 60 \end{cases}$.

i) Obtenemos la derivada de la función en $[0, 20) \cup (20, 50) \cup (50, 60]$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{20} = \frac{x}{10} & \text{si } 0 \leq x < 20 \\ -\frac{3}{10} & \text{si } 20 < x < 50 \\ -\frac{2x}{100} = -\frac{x}{50} & \text{si } 50 < x \leq 60 \end{cases}$$

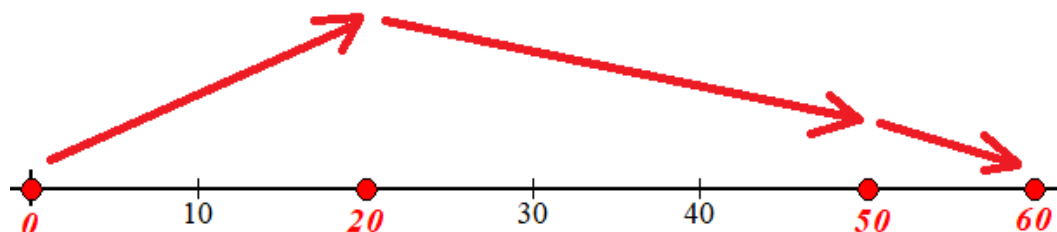
En el intervalo $[0, 20)$ la derivada se anula para $x = 0$. En el resto de valores del intervalo la derivada es positiva y por tanto la función es creciente. La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

En el intervalo $(20, 50)$ la derivada es negativa y la función decrece en dicho intervalo. La función tiene un máximo relativo en $x = 20$.

En el intervalo $(50, 60]$ la derivada siempre es negativa por lo que la función decrece.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 60$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente.



Para $x = 0$ la función vale 0. El mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$.

Para $x = 20$ la función vale $26 - \frac{3}{10} \cdot 20 = 20$. El máximo relativo tiene coordenadas $(20, 20)$.

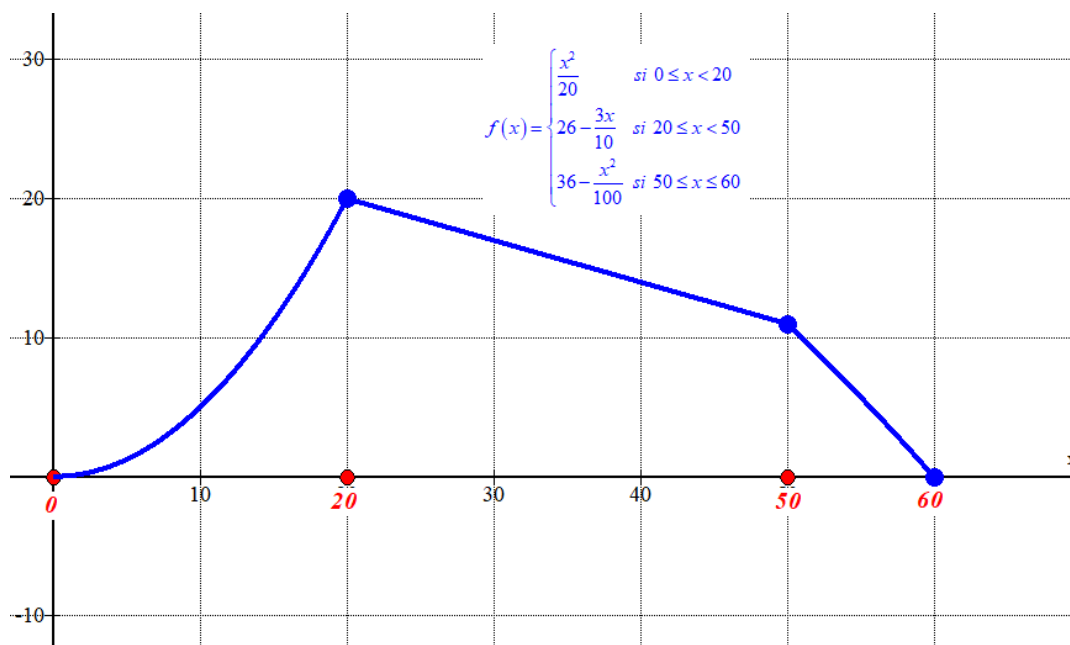
Para $x = 60$ la función vale $36 - \frac{60^2}{100} = 0$. El mínimo relativo tiene coordenadas $(60, 0)$.

ii) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

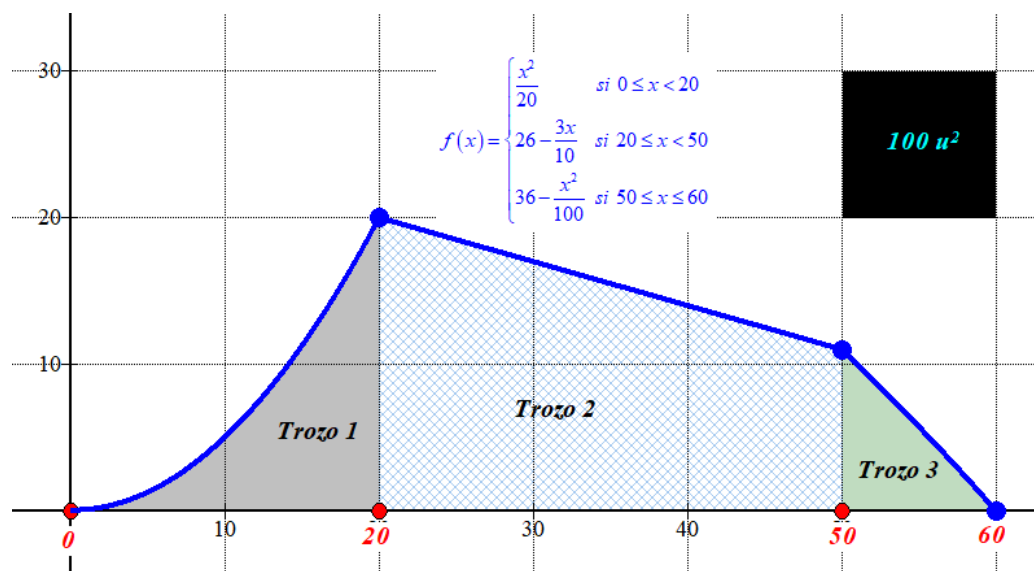
x	$y = \frac{x^2}{20}$
0	0
10	5
15	11.25

x	$y = 26 - \frac{3x}{10}$
20	20
30	17
45	12.5

x	$y = 36 - \frac{x^2}{100}$
50	11
60	0



ii) El área del recinto acotado limitado por el eje OX y la gráfica de la función f lo calculamos con tres integrales definidas. El área será la suma de las tres áreas.



$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_0^{20} \frac{x^2}{20} dx + \int_{20}^{50} 26 - \frac{3x}{10} dx + \int_{50}^{60} 36 - \frac{x^2}{100} dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{60} \right]_0^{20} + \left[26x - \frac{3x^2}{20} \right]_{20}^{50} + \left[36x - \frac{x^3}{300} \right]_{50}^{60} = \left(\frac{20^3}{60} - \frac{0^3}{60} \right) + \\
 &+ \left(\left[26 \cdot 50 - \frac{3 \cdot 50^2}{20} \right] - \left[26 \cdot 20 - \frac{3 \cdot 20^2}{20} \right] \right) + \left(\left[36 \cdot 60 - \frac{60^3}{300} \right] - \left[36 \cdot 50 - \frac{50^3}{300} \right] \right) = \\
 &= \frac{400}{3} + 465 + \frac{170}{3} = \boxed{655u^2}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 3

- A) a) (1 punto)** Dada la población $\{-5, -2, 13, 18, 20\}$, se consideran todas las muestras de tamaño 3 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de la variable media muestral.
- b) (1 punto)** Dados dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral, se sabe que $P(A) = 0.75$, $P(B^c) = 0.8$ y $P(A/B) = 0.6$. Calcule las siguientes probabilidades:
 $P(A \cap B)$, $P(B - A)$, $P(A \cup B)$, $P(A^c - B)$

a) La media de las muestras de tamaño 3 es igual que la media de la distribución.

$$\text{Media} = \frac{-5 - 2 + 13 + 18 + 20}{5} = 8.8$$

Calculamos la varianza poblacional.

$$\sigma_x^2 = \frac{(-5)^2 + (-2)^2 + 13^2 + 18^2 + 20^2}{5} - 8.8^2 = 106.96$$

La varianza de la distribución de la variable media muestral de tamaño 3 vale:

$$\text{Varianza} = \frac{\sigma_x^2}{3} = \frac{106.96}{3} = 35.6533$$

b) La probabilidad del suceso B vale $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.8 = 0.2$.

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.6 = \frac{P(A \cap B)}{0.2} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12}$$

Calculamos $P(B - A) = P(B \cap A^c)$.

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \Rightarrow 0.2 = 0.12 + P(B \cap A^c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B \cap A^c) = 0.2 - 0.12 = 0.08}$$

Calculamos $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.75 + 0.2 - 0.12 = \boxed{0.83}$$

Obtenemos el valor de $P(A^c - B) = P(A^c \cap B^c)$.

$$P(A^c - B) = P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.83 = \boxed{0.17}$$

EJERCICIO 3

B) Sean A y B dos sucesos del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A)$ es el doble de $P(B)$, $P(B^c/A) = 0.75$ y $P(A \cap B) = 0.2$.

- (0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B .
- (0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no ocurra ni A ni B . ¿Son los sucesos A^c y B^c incompatibles?
- Si el experimento se realiza 1350 veces de forma independiente:
 - (0.25 puntos)** Determine la distribución de la variable aleatoria X : "Número de veces que ocurre B ".
 - (0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que B ocurra a lo sumo 580 veces, pero más de 499 veces.

a) Si $P(B) = p$ nos dicen que $P(A) = 2p$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B^c / A) = 1 - P(B / A) \Rightarrow 0.75 = 1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - 0.75 = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.2}{2p} = 0.25 \Rightarrow 0.2 = 0.25 \cdot 2p = 0.5p \Rightarrow \boxed{p = \frac{0.2}{0.5} = 0.4}$$

Hemos obtenido que $P(B) = 0.4$.

b) Sabemos que $P(A) = 2 \cdot P(B) = 2 \cdot 0.4 = 0.8$. Debemos calcular $P(A^c \cap B^c)$.

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0.8 + 0.4 - 0.2] = \boxed{0}$$

Al ser la probabilidad de la intersección de los sucesos nula la intersección de los sucesos es vacía. Los sucesos A^c y B^c son incompatibles.

c) i) La variable aleatoria X es una variable binomial, siendo n = número de repeticiones = 1350 y p = probabilidad de que ocurra $B = 0.4$. $X = B(1350, 0.4)$.

ii) Como el número de repeticiones es muy alto hallamos la probabilidad pedida aproximando la distribución binomial a una distribución normal Y de media $\mu = np = 1350 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 540$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1350 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 18$.

$$Y = N(540, 18).$$

Esta aproximación es buena pues $np = 540 > 5$ y $nq = 1350 \cdot 0.6 = 810 > 5$.

Calculamos la probabilidad pedida $P(499 < X \leq 580)$.

$$P(499 < X \leq 580) = P(X \leq 580) - P(X \leq 499) = \{\text{Corrección de Yates}\} =$$

$$= P(Y \leq 580.5) - P(Y \leq 499.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 540}{18} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{580.5 - 540}{18}\right) - P\left(Z \leq \frac{499.5 - 540}{18}\right) = P(Z \leq 2.25) - P(Z \leq -2.25) =$$

$$= P(Z \leq 2.25) - P(Z \geq 2.25) = P(Z \leq 2.25) - [1 - P(Z \leq 2.25)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9878 - 1 + 0.9878 = \boxed{0.9756}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,6
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,7
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,8
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,9
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	1,0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	1,1
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	1,2
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	1,3
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	1,4
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	1,5
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	1,6
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	1,7
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	1,8
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	1,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	2,0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	2,1
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	2,2
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	2,3
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	2,4
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	2,5
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	2,6
2,2	0,9851	0,9854	0,9858	0,9861	0,9864	0,9868	2,7
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	2,8

La probabilidad de que B ocurra a lo sumo 580 veces, pero más de 499 veces tiene un valor de 0.9756.

EJERCICIO 4

Una empresa de transporte contrata una consultora para optimizar sus recursos. La consultora estudia la distancia en kilómetros que recorren en cada viaje los camiones de la empresa, sabiendo que la variable que mide dicha distancia se distribuye según una Normal de varianza 225 km^2 y media desconocida. Para ello, toma aleatoriamente una muestra de 49 viajes y obtiene una media de 325 km recorridos por viaje.

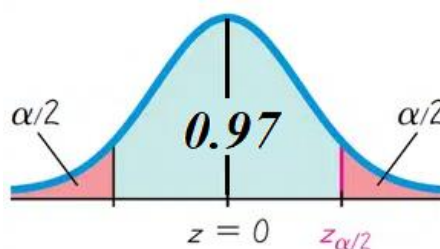
- a) **(0.75 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97% para que la consultora pueda estimar la distancia media que recorren por viaje los camiones de la empresa.
- b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si la consultora puede considerar que los camiones de la empresa recorren por término medio 310 km por viaje que realizan.
- c) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos viajes, como mínimo, tendría que seleccionar aleatoriamente la consultora para estimar la distancia media que recorren por viaje los camiones de la empresa mediante un intervalo de confianza del 99% que tuviera una amplitud inferior a 4 km ?

X = la distancia en kilómetros que recorren en cada viaje los camiones de la empresa.

$$X = N(\mu, \sqrt{225}) \rightarrow X = N(\mu, 15).$$

- i) El tamaño de la muestra es $n = 49$. La media muestral es $\bar{x} = 325 \text{ km}$.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 97%.



$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

Hallamos el error.

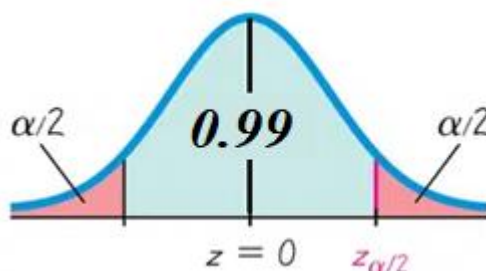
$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{15}{\sqrt{49}} = 4.65$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (325 - 4.65, 325 + 4.65) = (320.35, 329.65)$$

- b) 310 kilómetros no pertenece al intervalo de confianza obtenido en el apartado anterior. No se puede aceptar esa media de kilometraje por viaje.

- c) Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99%.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9933	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963

Como la amplitud del intervalo debe ser como máximo 4 km entonces el error debe ser como máximo la mitad: 2 km.

Utilizamos la fórmula del error para despejar n .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{Error} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = 2.575 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 15}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 15}{2} \right)^2 = 372.97$$

El tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria para poder estimar la media poblacional con un error inferior a 2 km y un nivel de confianza del 99% es de 373 viajes.