

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II (Examen resuelto y criterios de corrección)

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Examen resuelto

Pregunta 1. Opción A.

- a) Hay varias formas de emparejar las funciones. Una forma sencilla pasa por identificar, primero, la única función que está definida a trozos, que es la (A), que se corresponde con la gráfica (3). Después, podemos advertir en la gráfica (1) hay una parábola, por lo que se debe corresponder con la función (B); así que, finalmente, la gráfica (2) debe corresponder con la función (C). En este caso hemos hecho este último emparejamiento por exclusión, pero también podría analizarse por ser el único que contiene una función exponencial. Otra forma, más complicada, de realizar el emparejamiento, es analizar el comportamiento de las funciones –por ejemplo, localizando los máximos podríamos identificarlas–.

La única gráfica en la que se produce un crecimiento rápido y, después, un decrecimiento primero rápido y luego paulatino es la gráfica (2), en la (1) el crecimiento y el decrecimiento se producen a igual velocidad –por la simetría vertical–, mientras que en la (3) el crecimiento no es rápido y el decrecimiento no es paulatino.

- b) La función es exponencial con una constante sumada, por lo tanto, cualquier exponente es válido y está definida en toda la recta real. Para analizar el crecimiento, calculamos la derivada: $g'(x) = -e^{-x}$, que siempre es negativa, por lo tanto la función g siempre es decreciente. Para comprobar qué ocurre con la función cuando x se hace muy grande, calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + 1) = 1.$$

Dado que g es siempre decreciente, Como la función decrece desde valores muy altos hacia el valor 1, en algún momento cruzará el nivel del 1.5 y seguirá bajando –por ejemplo, si $x = 1$, $g(x) \simeq 1.36 < 1.5$ –, pero g no tomará nunca valores inferiores a 1, ya que tiene un comportamiento asintótico.

- c) Utilizar la función $g(x)$ para representar visualizaciones de un fenómeno viral no parece razonable por dos motivos: para poder hablar de fenómeno viral, se suele considerar un crecimiento inicial rápido, algo que no ocurre en esta función, que siempre decrece. Por otro lado, las visualizaciones de los fenómenos virales decrecen con el tiempo –el llamado fenómeno de olvido– pero en este caso siempre se mantendrían por encima de 100 000 visualizaciones (el valor 1, con x medida en cientos de miles).

Pregunta 1. Opción B.

- a) Para que la función $v(t)$ sea continua en todo su dominio, debe serlo en los puntos de unión de los trozos ($t = 3$ y $t = 8$) ya que cada trozo corresponde con una función polinómica y, por lo tanto, es continua. Para

la continuidad en $t = 3$, se debe cumplir que los límites laterales sean iguales:

$$\lim_{t \rightarrow 3^-} (2t + 5) = 2(3) + 5 = 11 \text{ y } \lim_{t \rightarrow 3^+} (-t^2 + 10t + k) = -(3)^2 + 10(3) + k = -9 + 30 + k = 21 + k.$$

Igualando ambos resultados se tiene que $11 = 21 + k \Rightarrow k = 11 - 21 \Rightarrow k = -10$. Para comprobar la continuidad en $t = 8$, sustituimos $k = -10$ y calculamos los límites:

$$\lim_{t \rightarrow 8^-} (-t^2 + 10t - 10) = -(8)^2 + 10(8) - 10 = -64 + 80 - 10 = 6 \text{ y } \lim_{t \rightarrow 8^+} (-(-10) - 4) = 10 - 4 = 6.$$

Como los límites coinciden, $v(t)$ es continua cuando $k = -10$, y la función tiene como expresión:

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 5, & \text{si } 0 < t < 3 \\ -t^2 + 10t - 10, & \text{si } 3 \leq t < 8 \\ 6, & \text{si } 8 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

- b) Para determinar en qué momento aumentan las ventas y cuándo alcanzan su mayor valor, analizamos la derivada $v'(t)$. En $(0, 3)$: $v'(t) = 2 > 0$, por lo tanto v es creciente. En $[3, 8)$: $v'(t) = -2t + 10$, así que las ventas crecen si $-2t + 10 > 0$, es decir, si $t < 5$. Por tanto, las ventas aumentan en el intervalo de tiempo $(0, 5)$, ya que cuando $t \geq 8$ la función es constante y, por lo tanto, no crece. El máximo se alcanza en $t = 5$ (vértice de la parábola) y tiene como valor: $v(5) = -(5)^2 + 10(5) - 10 = -25 + 50 - 10 = 15$, es decir, el mayor importe vendido es de 15 000 € y se alcanza en el quinto mes.

- c) Para hallar las ventas totales entre $t = 5$ y $t = 9$, calculamos la integral definida:

$$\begin{aligned} \int_5^9 v(t) dt &= \int_5^8 (-t^2 + 10t - 10) dt + \int_8^9 6 dt = \left[-\frac{t^3}{3} + 5t^2 - 10t \right]_5^8 + \left[6t \right]_8^9 \\ &= \left(-\frac{512}{3} + 5(64) - 80 \right) - \left(-\frac{125}{3} + 5(25) - 50 \right) + 54 - 48 = \left(\frac{208}{3} \right) - \left(\frac{100}{3} \right) + 6 = \frac{108}{3} + 6 = 42. \end{aligned}$$

Así, el importe total de las ventas es de $36 + 6 = 42$, es decir, 42 000 €.

Pregunta 2. Opción A.

- a) Podemos observar el patrón respecto al número de palitos « p » y al de vértices « v », a medida que aumenta el número de la figura (« n »). Por ejemplo, mirando el número de palitos observamos que:

- Figura 1: 6 palitos.
- Figura 2: $6 + 5 = 11$ palitos (el segundo hexágono comparte un lado con el primero).
- Figura 3: $11 + 5 = 16$ palitos.

Por lo tanto, vemos que se añaden 5 palitos en cada iteración, con una fórmula recursiva podríamos llegar fácilmente a que en la figura 16 habría 81 palitos. También podríamos llegar con facilidad a la fórmula general, puesto que se trata de una progresión aritmética que comienza en 6 y que tiene diferencia 5, por lo que: $p = 5n + 1$, y al sustituir para $n = 16$ llegaríamos igualmente a $p = 81$ palitos. Si analizamos los vértices, observamos que:

- Figura 1: 6 vértices.
- Figura 2: $6 + 4 = 10$ vértices (dos vértices son compartidos).
- Figura 3: $10 + 4 = 14$ vértices.

Podemos fácilmente deducir una fórmula general (aunque no nos la piden), que sería: $v = 4n + 2$, y afirmar que la figura 16 tendría $v = 66$ vértices (quizá alguien la pueda ver mejor como $v = 5n - (n - 2)$). Pero también podemos buscar la relación entre el número de palitos y el de vértices:

n	p	v
1	6	6
2	11	10
3	16	14
4	21	18
5	26	22

Observando la tabla, se aprecia que la diferencia entre el número de palitos y el de vértices va incrementándose una unidad en cada número de figura, por lo que podríamos llegar a que: $v = p - (n - 1)$ o, también, teniendo en cuenta la fórmula que relaciona p con n podríamos sustituir y obtener que:

$$v = \frac{4p + 6}{5}.$$

- b) Para que existiera una figura con 206 palitos, observando las tablas o a partir de la fórmula vemos que el número de palitos siempre supera una unidad a un múltiplo de 5 ($p = 5n + 1$), condición que se cumple con 206. Si tenemos la fórmula general, simplemente sustituyendo y despejando la n llegamos a que:

$$5n + 1 = 206 \Rightarrow 5n = 205 \Rightarrow n = \frac{205}{5} = 41,$$

así que sería la figura $n = 41$. Bien a partir de la relación entre palitos y vértices o, directamente con la fórmula general para los vértices, llegaríamos a que, para $n = 41$ o $p = 206$:

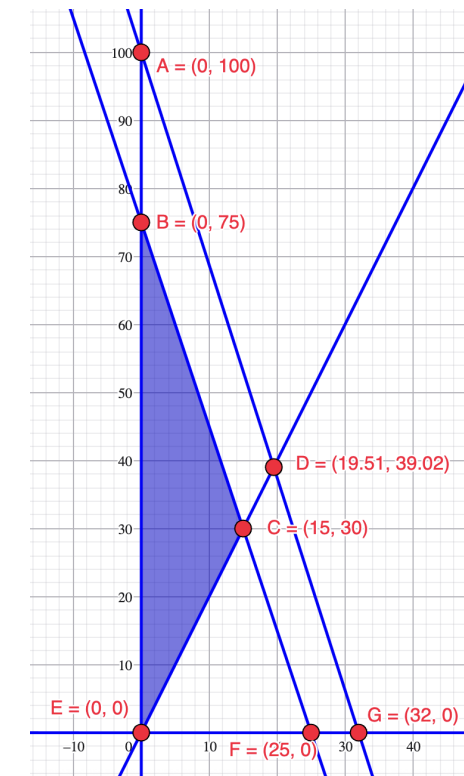
$$v = \frac{4p + 6}{5} = \frac{4 \cdot 206 + 6}{5} = 166 \text{ o, también, } v = 4n + 2 = 4 \cdot 41 + 2 = 166.$$

Pregunta 2. Opción B.

- a) Siendo x e y el número de mesas y de sillas enviadas en la furgoneta, respectivamente, podemos modelar la situación con el siguiente sistema de inecuaciones (con soluciones válidas únicamente en enteros):

$$\begin{cases} 25x + 8y \leq 800 & \text{peso} \\ 0.6x + 0.2y \leq 15 & \text{volumen} \\ 2x \leq y & \text{al menos dos sillas por mesa} \\ x, y \geq 0 & \text{positivos} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 8y \leq 800 \\ 3x + y \leq 75 \\ 2x - y \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que la imagen que se corresponde con la región factible es la que se representa en la figura (i) —la única diferencia entre (i) y (ii) radica en la interpretación de la tercera inecuación—, delimitada por los vértices B , C y E .



- b) La inecuación $25x + 8y \leq 800$ no está teniendo efecto real en la delimitación de la región factible, puesto que no interviene en sus límites (es una inecuación redundante). Es decir, el peso no está suponiendo una limitación real para el número de sillas y mesas transportables.

El punto $(x, y) = (1.15, 2.3)$ está dentro de la región factible, pero no puede ser una solución porque los valores de sus coordenadas no son números enteros (no se pueden enviar 1.15 mesas y 2.3 sillas).

- c) El importe del beneficio marginal se representa con la función objetivo $z(x, y) = 35x + 10y$. Así, queremos maximizar la función z sujeta a las restricciones anteriores. Evaluada en los tres puntos extremos del recinto obtenemos:

$$z(B) = 35 \cdot 0 + 10 \cdot 75 = 750 \text{ €}$$

$$z(C) = 35 \cdot 15 + 10 \cdot 30 = 825 \text{ €}$$

$$z(E) = 35 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0 \text{ €}$$

por lo que el beneficio marginal máximo se alcanza si se envían 15 mesas y 30 sillas (punto C), ascendiendo el beneficio a 825 €.

Pregunta 3. Opción A.

- a) Para que el sistema tenga infinitas soluciones (compatible indeterminado), los coeficientes de ambas ecuaciones deben ser proporcionales, es decir:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}.$$

A partir de aquí podemos determinar a como:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{6} \Rightarrow a = 3.$$

Por lo tanto, si $a = 3$ el sistema tiene infinitas soluciones. Para obtener un ejemplo de una de estas soluciones, basta con considerar la primera ecuación, que pasa a ser: $x + 2y = 5$. Si asignamos, por ejemplo, $x = 1$, entonces:

$$1 + 2y = 5 \Rightarrow y = 2.$$

En este caso, la persona recibiría 1 hora de fisioterapia (x) y 2 horas de asistencia doméstica (y). Podemos comprobar que $(x, y) = (1, 2)$ también verifica la segunda ecuación, que sería: $3x + 6y = 15$, y se tiene que:

$$3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 15.$$

b) Si asumimos que $a = 1$, el sistema pasa a ser:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 6y = 15 \end{cases}$$

Considerando **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

se tiene que $|A| \neq 0$. Por lo tanto, el sistema es compatible y determinado y tiene solución única. Para que la solución tenga sentido en el contexto del problema, deben resultar $x \geq 0$ e $y \geq 0$, porque no puede darse un número negativo de horas. Usando, por ejemplo, la regla de Cramer, como $|A| = 4$ y se tiene que:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 10,$$

entonces la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{0}{4} = 0 \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{10}{4} = 2.5.$$

Como $(x, y) = (0, 2.5)$ tiene coordenadas no negativas, es una solución que tiene sentido en el contexto del problema: consistiría en asignar 0 horas semanales de fisioterapia y 2.5 horas semanales de asistencia domiciliaria.

Pregunta 3. Opción B.

a) Primero calculamos $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ m^2 + 2 & m \end{pmatrix}$$

Y, entonces:

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ m^2 + 2 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mx + y \\ (m^2 + 2)x + my \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el término de la derecha $2(D + E)$:

$$2(D + E) = 2 \left[\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - m \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Igualando, obtenemos el sistema $A \cdot B \cdot C = 2(D + E)$ como:

$$\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ (m^2 + 2)x + my = 4 \end{cases}$$

Dos de las posibles formas de realizar la discusión de este sistema son:

■ Gauss.

Escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2m & 1 & 2 \\ m^2 + 2 & m & 4 \end{array} \right).$$

A la segunda fila le restamos la primera multiplicada por m y nos queda:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2m & 1 & 2 \\ -m^2 + 2 & 0 & 4 - 2m \end{array} \right)$$

Esta matriz tiene rango completo salvo que $-m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$. Si $m = \pm\sqrt{2}$ entonces el sistema es incompatible, porque para esos valores de m se tiene que $4 - 2m \neq 0$.

■ Rouché-Fröbenius. Si llamamos $F = A \cdot B$, tenemos que

$$|F| = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m^2 + 2 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - (m^2 + 2) = m^2 - 2$$

Por lo tanto $|F| = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$. En ese caso, la matriz ampliada tiene rango 2, ya que:

$$\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & 2 \\ 4 & 4 - 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 8(\sqrt{2} - 1) - 8 = 8(\sqrt{2} - 2) \neq 0 \quad \text{para } m = \sqrt{2}$$

$$y \begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & 2 \\ 4 & 4 + 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = -8(\sqrt{2} + 1) - 8 = -8(\sqrt{2} + 2) \neq 0 \quad \text{para } m = -\sqrt{2},$$

por lo que el sistema resultaría incompatible para $m = \pm\sqrt{2}$. Por el contrario, si $m \neq \pm\sqrt{2}$ la matriz F tiene rango completo (2, que es el número de variables), así que el sistema sería compatible y determinado. Podemos obtener sus soluciones con:

$$|F_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = 2m - 4 \quad y \quad |F_y| = \begin{vmatrix} 2m & 2 \\ m^2 + 2 & 4 \end{vmatrix} = -2(m^2 - 4m + 2),$$

por lo que la solución sería el punto (x, y) de coordenadas:

$$x = \frac{|F_x|}{|F|} = \frac{2m - 4}{m^2 - 2} \quad e \quad y = \frac{|F_y|}{|F|} = \frac{-2(m^2 - 4m + 2)}{m^2 - 2}.$$

b) A partir del análisis del sistema, existen exactamente dos valores de m para los que el sistema no tiene solución: $m = \pm\sqrt{2}$.

c) Para el resto de valores $m \neq \pm\sqrt{2}$, el sistema tiene solución única, y viene dada por:

$$x = \frac{|F_x|}{|F|} = \frac{2m-4}{m^2-2} \quad \text{e} \quad y = \frac{|F_y|}{|F|} = \frac{-2(m^2-4m+2)}{m^2-2}.$$

por ejemplo, para $m = 0$, la solución sería: $(x, y) = (2, 2)$.

Pregunta 4. Opción A. Si denotamos los sucesos como: A = «El o la estudiante pertenece al estrato alto», M = «El o la estudiante pertenece al estrato medio», B = «El o la estudiante pertenece al estrato bajo» y D = «El o la estudiante abandona los estudios», podemos reformular la información del enunciado en términos de probabilidad, como:

$$P(A) = 0.2, \quad P(M) = 0.5, \quad P(B) = 1 - 0.2 - 0.5 = 0.3, \quad P(D/A) = 0.05, \quad P(D/M) = 0.15, \quad P(D/B) = 0.3.$$

a) Para saber a qué estrato es más probable que pertenezca una persona que ha abandonado, calculamos las probabilidades a posteriori mediante el Teorema de Bayes y, para ello, antes determinamos la probabilidad total de abandono $P(D)$:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(M) \cdot P(D/M) + P(B) \cdot P(D/B) = (0.2 \cdot 0.05) + (0.5 \cdot 0.15) + (0.3 \cdot 0.3) = 0.175.$$

Ahora calculamos las probabilidades de pertenencia a cada estrato sabiendo que la persona ha abandonado:

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{0.175} \simeq 0.0571$$

$$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0.5 \cdot 0.15}{0.175} \simeq 0.4286$$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.175} \simeq 0.5143$$

Por lo tanto, lo más probable es que el o la estudiante que ha abandonado pertenezca al estrato socio-económico más bajo.

b) También es evidente que existe relación entre el abandono y el estrato socioeconómico, ya que la probabilidad de abandonar no es igual cuando se condiciona por el estrato de pertenencia: a menor nivel económico, mayor es la tasa de abandono.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	A	M	B	
D	0.01	0.075	0.09	0.175
$\bar{D}$	0.19	0.425	0.21	0.825
	0.20	0.50	0.30	1

c) Si denotamos por O = «Acudir al servicio de orientación», podemos reformular la información del enunciado como $P(D/O) = 0.12$. Dado que $P(D) = 0.175$, es evidente que $P(D/O) < P(D)$ y, en consecuencia, podemos afirmar que acudir al servicio de orientación reduce, y por lo tanto, influye en, la probabilidad de abandonar los estudios.

Pregunta 4. Opción B. Si denotamos por S el suceso «la persona compra ropa en plataformas de segunda mano», por T «la persona compra en tiendas tradicionales» ($T = \bar{S}$) y por D «la persona dona ropa a ONG», podemos reformular la información del enunciado como:

$$P(S) = 0.7, \quad P(T) = 0.3, \quad P(D/S) = 0.6, \quad P(D/T) = 0.2.$$

a) La probabilidad que se pide es $P(S \cap \bar{D})$:

$$P(S \cap \bar{D}) = P(S) \cdot P(\bar{D}/S) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

b) Para averiguar si donar ropa es independiente de donde se compra debemos comprobar que D sea independiente de S (o, alternativamente, de T), lo que se puede determinar comprobando si $P(D/S) = P(D)$ o si $P(D \cap S) = P(D) \cdot P(S)$. Para calcular $P(D)$ podemos usar la probabilidad total:

$$P(D) = P(S) \cdot P(D/S) + P(T) \cdot P(D/T) = (0.7 \cdot 0.6) + (0.3 \cdot 0.2) = 0.42 + 0.06 = 0.48$$

Como $P(D/S) = 0.6 \neq 0.48 = P(D)$, entonces D y S no son independientes (tampoco lo serán $\bar{S} = T$ y D), es decir, donar ropa no es independiente de donde se compra.

c) Se pide determinar la probabilidad $P(T/D)$, lo cual se puede realizar usando el Teorema de Bayes:

$$P(T/D) = \frac{P(T \cap D)}{P(D)} = \frac{P(T) \cdot P(D/T)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.2}{0.48} = \frac{1}{8}$$

La probabilidad es $\frac{1}{8} = 0.125$.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	S	T	
D	0.42	0.06	0.48
$\bar{D}$	0.28	0.24	0.52
	0.7	0.3	1

Pregunta 5. Opción A.

a) El intervalo de confianza al 95 % para la proporción poblacional es $(0.6169, 0.6831)$ —con una muestra $n = 800$ —, por lo que la proporción muestral $\hat{p}$ es el punto medio del intervalo:

$$\hat{p} = \frac{0.6169 + 0.6831}{2} = 0.65$$

En consecuencia —como la muestra tiene tamaño $n = 800$ — el número de personas que respondieron afirmativamente al apoyo a los presupuesto participativos fue de:

$$n \cdot \hat{p} = 800 \cdot 0.65 = 520 \text{ personas.}$$

b) El intervalo de confianza al nivel 95 % contiene el valor correspondiente a dos tercios de la población (aproximadamente, 0.66), pero al no ser el extremo inferior, no se puede asegurar con qué confianza la verdadera proporción es mayor que ese valor. Es decir, es posible que el verdadero valor de la proporción poblacional que apoya los presupuestos sea inferior a dos tercios, por lo tanto, no se puede garantizar esa seguridad.

c) El nuevo intervalo es (0.6107, 0.6893) con $n = 800$ y $\hat{p} = 0.65$. Como es más amplio que el obtenido en el apartado anterior para la misma muestra, necesariamente el nivel de confianza usado es mayor del 95 %. Para determinar cuál ha sido el nivel de confianza podemos, por ejemplo, fijarnos en la semiamplitud (o error de estimación) del intervalo, que viene dado por la expresión:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

En esta fórmula, despejamos $z_{\alpha/2}$ y usamos que el error es de $\varepsilon = 0.6893 - 0.65 = 0.0393$:

$$0.0393 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{800}} \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \simeq 2.33$$

Buscamos en los valores de la función de distribución de la normal y encontramos que $F(2.33) = 0.99$, por lo que el nivel de confianza $1 - \alpha$ se obtiene de:

$$1 - \alpha/2 = 0.99 \Leftrightarrow \alpha = 0.02 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.98.$$

En consecuencia, el nivel de confianza utilizado fue del 98 %.

Pregunta 5. Opción B. Si denotamos por X la v.a. «gasto mensual en alquiler de una persona joven (en €)», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 150$ €, es decir, $X \rightarrow N(\mu, 150)$.

a) Fijados el error máximo de estimación ε y el nivel de confianza $(1 - \alpha) \cdot 100\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

donde:

- n representa el tamaño de muestra,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 150$ euros y
- $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0.95$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Así pues, puesto que $\varepsilon \leq 20$ euros, se tiene que:

$$n \geq \left(1.96 \frac{150}{20} \right)^2 = 216.09,$$

con lo que el tamaño muestral mínimo para cumplir las condiciones será de 217 personas.

b) Dado que el intervalo de confianza es simétrico respecto a la media muestral $\bar{x}$, esta se calcula como el punto medio del intervalo (741.77, 758.23):

$$\bar{x} = \frac{741.77 + 758.23}{2} = \frac{1500}{2} = 750\text{€}$$

c) El error de estimación viene dado por la expresión:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si mantenemos constante el nivel de confianza (y, en consecuencia, también será constante $z_{\alpha/2}$) y la desviación típica ($\sigma = 150$), el error depende únicamente del tamaño de la muestra n y es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de n . Por lo tanto, al aumentar el tamaño muestral, el error de estimación disminuye y no depende del valor $\bar{x}$ obtenido en la muestra.

Criterios de corrección

Pregunta 1. Opción A.

- a) Explicar cuál es la gráfica adecuada: **0.5 puntos**.

Explicar cuál es la expresión funcional de cada una de las tres gráficas: **0.5 puntos**.

- b) Responder justificadamente a las preguntas: **1 punto**.

- c) Explicar si la gráfica puede representar el fenómeno: **0.5 puntos**.

Pregunta 1. Opción B.

- a) Determinar correctamente el valor de k : **0.5 puntos**.

- b) Responder justificadamente a las tres preguntas: **1 punto**.

- c) Determinar justificadamente el importe total: **1 punto**.

Pregunta 2. Opción A.

- a) Determinar el número de palitos y el número de vértices para la figura 16: **1 punto**.

Encontrar la fórmula general para el número de palitos y explicar cómo se ha obtenido: **1 punto**.

- b) Responder justificada y correctamente a las preguntas: **0.5 puntos**.

Pregunta 2. Opción B.

- a) Explicar qué imagen se corresponde con el la región factible: **1 punto**.

- b) Explicar si el peso limita la solución: **0.5 puntos**.

Explicar si $(1.15, 2.3)$ tiene sentido como solución del problema: **0.5 puntos**.

- c) Responder justificada y correctamente a la pregunta: **0.5 puntos**.

Pregunta 3. Opción A.

- a) Encontrar el valor de a : **0.5 puntos**.

Obtener una de las soluciones: **0.5 puntos**.

- b) Encontrar la solución: **1 punto**.

Analizar si tiene sentido en el contexto del problema: **0.5 puntos**.

Pregunta 3. Opción B.

- a) Plantear correctamente el sistema: **1 punto**.

- b) Explicar si existe ese valor de m y, en su caso, identificarlo: **0.5 puntos**.

- c) Elegir un valor de m para que el sistema sea compatible y determinado y determinar la solución: **1 punto**.

Pregunta 4. Opción A.

- a) Proporcionar una predicción basada en las probabilidades de cada suceso y explicarla adecuadamente: **1.5 puntos**.

- b) Responder justificadamente a la pregunta, a partir de argumentos estocásticos: **0.5 puntos**.

- c) Responder justificadamente a la pregunta, a partir de argumentos estocásticos: **0.5 puntos**.

Pregunta 4. Opción B.

- a) Calcular la probabilidad solicitada: **1 punto**.

- b) Responder justificadamente a la pregunta, a partir de argumentos estocásticos: **0.5 puntos**.

- c) Calcular la probabilidad solicitada: **1 punto**.

Pregunta 5. Opción A.

- a) Determinar la proporción muestral y el número de personas que apoyan los presupuestos: **1 punto**.

- b) Responder correcta y justificadamente a la pregunta, con argumentos estocásticos. **0.5 puntos**.

- c) Determinar el nivel de confianza: **1 punto**.

Pregunta 5. Opción B.

- a) Calcular el tamaño muestral correctamente: **1 punto**.

- b) Determinar la media muestral: **0.5 puntos**.

- c) Responder correcta y justificadamente a las preguntas: **1 punto**.