



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

La prueba consta de tres partes: la primera no tiene diferentes opciones, y las otras dos tienen dos posibles problemas, a contestar uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero. Consultad la puntuación en cada ejercicio.

No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde)

Parte A. Conteste todos los problemas de esta parte (total 4 pt).

Problema A1. – El año 2025 la mediana de los salarios de España fue de aproximadamente 24000 € anuales. Es decir, la mitad de trabajadores ganaron más, y la mitad de trabajadores ganaron menos que esta cantidad. Según el Instituto Nacional de Estadística,

- De los trabajadores con un salario inferior a la mediana, el 31% no estaban satisfechos con su trabajo y el otro 69% si estaban satisfechos.
- De los trabajadores con un salario superior a la mediana, el 26% no estaban satisfechos con su trabajo y el otro 74% si estaban satisfechos.

- a) Escogiendo un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté satisfecho con su trabajo? (1 pt)
- b) Escogiendo un trabajador al azar que no esté satisfecho con su trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un salario inferior a la mediana? (1 pt)

Problema A2.- Los resultados de una encuesta sobre la cantidad de días a la semana que un trabajador hace teletrabajo son los siguientes:

0 días	1 día	2 días	3 días	4 días	5 días
387	64	72	47	15	18

- a) Calcula la proporción muestral, sobre el total de encuestados, de los que hacen al menos un día de teletrabajo semanal. (1 pt)
- b) Calcula un intervalo de confianza para la proporción real de los trabajadores que hacen al menos un día de teletrabajo semanal, con un nivel de confianza del 75%. (1 pt)

Parte B. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema B1.- Para fabricar coches necesitamos, de un proveedor, tres tipos de componentes diferentes:

- Alternador: cada uno pesa 6kg, tiene un volumen de 80 litros y un precio de 120 €.
- Bomba de combustible: cada una pesa 2 kg, tiene un volumen de 2 litros y un precio de 40 €.
- Caja de cambios: cada una pesa 50 kg, tiene un volumen de 40 litros y un precio de 800 €.

- a) Nos envían un pedido que solo contiene alternadores y cajas de cambios, que tiene una carga con volumen total de 44800 litros, y por el cual nos han facturado 230000 €. ¿Cuántos alternadores nos han enviado? (1.5 pt)
- b) En el siguiente pedido, dado que cada coche necesita un componente de cada tipo, nos envían ahora el mismo número de alternadores, de bomba de combustible y de cajas de

cambios. Su carga tiene un peso total de 24360 kg, y un volumen total de 51240 litros.
¿Cuántos alternadores nos han enviado? (1.5 pt)

Problema B2.- Considera la matriz M y su inversa, M^{-1} , siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el vector x tal que $Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2 pt)

b) Calcula el vector y tal que $M^{-1}y = M^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. (1 pt)

Parte C. Conteste **sólo** un **problema** de esta parte (total 3 pt).

Problema C1.- Considera la función $f(x) = x(x^2 - 2x + 1)$, para $x \in (-\infty, \infty)$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (1 pt)

b) Calcula $f'(1)$. (1 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f'(x) dx$. (1 pt)

Problema C2.- Considera la función $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$, para $x \in [1, +\infty)$.

a) Haz una gráfica esquemática de la función $f(x)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica el valor de la función en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativo y absolutos. (2 pt)

b) Sobre la misma gráfica, traza la recta tangente a la función en el punto $x = 10$. ¿Cuál es el valor de su pendiente? (1 pt)

SOLUCIONES

- Problema A1.** – El año 2025 la mediana de los salarios de España fue de aproximadamente 24000 € anuales. Es decir, la mitad de trabajadores ganaron más, y la mitad de trabajadores ganaron menos que esta cantidad. Según el Instituto Nacional de Estadística,
- De los trabajadores con un salario inferior a la mediana, el 31% no estaban satisfechos con su trabajo y el otro 69% si estaban satisfechos.
 - De los trabajadores con un salario superior a la mediana, el 26% no estaban satisfechos con su trabajo y el otro 74% si estaban satisfechos.
- a) Escogiendo un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté satisfecho con su trabajo? (1 pt)
- b) Escogiendo un trabajador al azar que no esté satisfecho con su trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un salario inferior a la mediana? (1 pt)

Pasamos los datos porcentuales a valores absolutos para trabajar con más comodidad.

Supongamos que hay 1000 trabajadores en España. Hay 500 que ganan menos de 24000 € y los otros 500 ganan más de 24000 €.

De los trabajadores con un salario inferior a la mediana, el 31% no estaban satisfechos con su trabajo y el otro 69% si estaban satisfechos $\rightarrow 0.31 \cdot 500 = 155$ trabajadores no están satisfechos y $500 - 155 = 345$ si están satisfechos.

De los trabajadores con un salario superior a la mediana, el 26% no estaban satisfechos con su trabajo y el otro 74% si estaban satisfechos $\rightarrow 0.26 \cdot 500 = 130$ no están satisfechos y $500 - 130 = 370$ si están satisfechos.

Ponemos todos estos datos en una tabla de contingencia.

	Satisfechos	No satisfechos	
Menos de 24000 € anuales	345	155	500
Más de 24000 € anuales	370	130	500
	715	285	1000

- a) De los 1000 trabajadores hay 285 que no están satisfechos. La probabilidad de que un trabajador elegido al azar no esté satisfecho con su trabajo vale $\frac{285}{1000} = 0.285$.
- b) De los 285 trabajadores no satisfechos con su trabajo hay 155 con un salario inferior a la mediana. La probabilidad de que el trabajador no satisfecho con su trabajo elegido al azar tenga un salario inferior a la mediana vale $\frac{155}{285} = \frac{31}{57} \approx 0.5439$.

Problema A2.- Los resultados de una encuesta sobre la cantidad de días a la semana que un trabajador hace teletrabajo son los siguientes:

0 días	1 día	2 días	3 días	4 días	5 días
387	64	72	47	15	18

- a) Calcula la proporción muestral, sobre el total de encuestados, de los que hacen al menos un día de teletrabajo semanal. (1 pt)
- b) Calcula un intervalo de confianza para la proporción real de los trabajadores que hacen al menos un día de teletrabajo semanal, con un nivel de confianza del 75%. (1 pt)

- a) El tamaño de la muestra es $n = 387 + 64 + 72 + 47 + 15 + 18 = 603$. Hacen al menos un día de teletrabajo $603 - 387 = 216$ trabajadores.

La proporción muestral, sobre el total de encuestados, de los que hacen al menos un día de teletrabajo semanal es $\frac{216}{603} = \frac{24}{67} \approx 0.3582$.

- b) Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 75 %

$$1 - \alpha = 0.75 \rightarrow \alpha = 0.25 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.125 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.875 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.15$$

	0	1	2	3	4	5	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8943	0.8

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.15 \cdot \sqrt{\frac{0.3582(1-0.3582)}{603}} \approx 0.0225$$

El intervalo de confianza para la proporción real de los trabajadores que hacen al menos un día de teletrabajo semanal es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.3582 - 0.0225, 0.3582 + 0.0225) = (0.3357, 0.3807)$$

Problema B1.- Para fabricar coches necesitamos, de un proveedor, tres tipos de componentes diferentes:

- Alternador: cada uno pesa 6 kg, tiene un volumen de 80 litros y un precio de 120 €.
- Bomba de combustible: cada una pesa 2 kg, tiene un volumen de 2 litros y un precio de 40 €.
- Caja de cambios: cada una pesa 50 kg, tiene un volumen de 40 litros y un precio de 800 €.

- a) Nos envían un pedido que solo contiene alternadores y cajas de cambios, que tiene una carga con volumen total de 44800 litros, y por el cual nos han facturado 230000 €. ¿Cuántos alternadores nos han enviado? (1.5 pt)
- b) En el siguiente pedido, dado que cada coche necesita un componente de cada tipo, nos envían ahora el mismo número de alternadores, de bomba de combustible y de cajas de cambios. Su carga tiene un peso total de 24360 kg, y un volumen total de 51240 litros. ¿Cuántos alternadores nos han enviado? (1.5 pt)

- a) Llamamos “a” al número de alternadores que nos han enviado y “c” al número de cajas de cambio enviadas.

Nos envían un pedido que solo contiene alternadores y cajas de cambios, que tiene una carga con volumen total de 44800 litros, y por el cual nos han facturado 230000 € $\rightarrow 80a + 40c = 44800$, $120a + 800c = 230000$.

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left. \begin{array}{l} 80a + 40c = 44800 \\ 120a + 800c = 230000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + c = 1120 \\ 3a + 20c = 5750 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = 1120 - 2a \\ 3a + 20c = 5750 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a + 20(1120 - 2a) = 5750 \Rightarrow 3a + 22400 - 40a = 5750 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -37a = -16650 \Rightarrow a = \frac{16650}{37} = 450 \Rightarrow c = 1120 - 450 = 670$$

Nos han enviado 450 alternadores.

- b) Llamamos “a” al número de alternadores que nos han enviado, “b” al número de bombas de combustible y “c” al número de cajas de cambio enviadas.

Nos dicen que $a = b = c$.

El peso total del envío es de 24360 kg $\rightarrow 6a + 2b + 50c = 24360$.

El volumen total del envío es de 51240 litros $\rightarrow 80a + 2b + 40c = 51240$.

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} a = b = c \\ 6a + 2b + 50c = 24360 \\ 80a + 2b + 40c = 51240 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6a + 2a + 50a = 24360 \\ 80a + 2a + 40a = 51240 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 58a = 24360 \\ 122a = 51240 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{24360}{58} = 420 \\ a = \frac{51240}{122} = 420 \end{array} \right\} \Rightarrow a = b = c = 420$$

En el nuevo pedido se han enviado 420 alternadores.

Problema B2.- Considera la matriz M y su inversa, M^{-1} , siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el vector x tal que $Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2 pt)

b) Calcula el vector y tal que $M^{-1}y = M^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. (1 pt)

a) Resolvemos la igualdad matricial multiplicando por la inversa de M .

$$Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1}Mx = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+2+6 \\ -3-1-2 \\ -5-1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

El vector buscado es $x = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix}$.

b) Resolvemos la igualdad matricial multiplicando por M .

$$M^{-1}y = M^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow MM^{-1}y = MM^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El vector buscado es $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Problema C1.- Considera la función $f(x) = x(x^2 - 2x + 1)$, para $x \in (-\infty, \infty)$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (1 pt)

b) Calcula $f'(1)$. (1 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f'(x) dx$. (1 pt)

a) Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $-\infty$ y a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

b) Calculamos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x) = x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0$$

c) Sabemos que la integral de $f'(x)$ es $f(x)$.

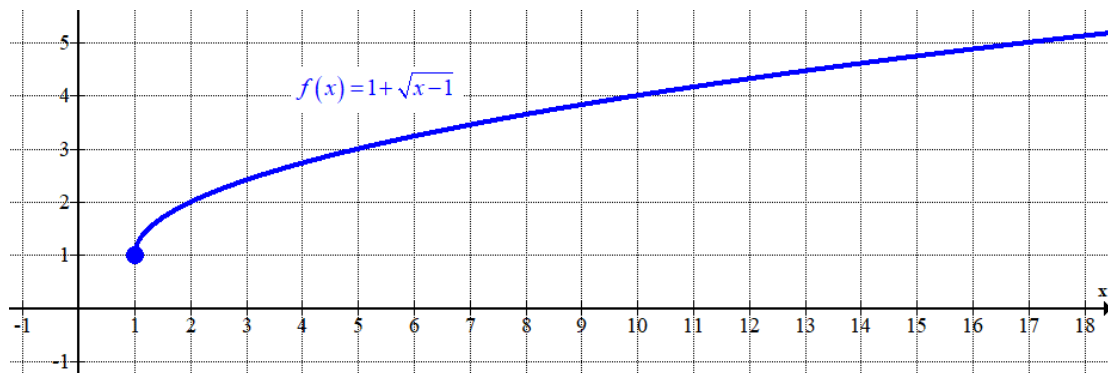
$$\int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = 1 \cdot (1^2 - 2 \cdot 1 + 1) - 0 \cdot (0^2 - 2 \cdot 0 + 1) = 0$$

Problema C2.- Considera la función $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$, para $x \in [1, +\infty)$.

- a) Haz una gráfica esquemática de la función $f(x)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica el valor de la función en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativo y absolutos. (2 pt)
- b) Sobre la misma gráfica, traza la recta tangente a la función en el punto $x = 10$. ¿Cuál es el valor de su pendiente? (1 pt)

a) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$
1	1
2	2
5	3
10	4
17	5



La función vale 1 para $x = 1$. Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiende a $+\infty$.

La función crece en todo su dominio $[1, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo que también es absoluto en el punto $(1, 1)$. La función no presenta máximos relativos ni absolutos.

b) La pendiente de la recta tangente en $x = 10$ es el valor de $f'(10)$.

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(10) = \frac{1}{2\sqrt{10-1}} = \frac{1}{6}$$

La pendiente de la recta tangente vale $\frac{1}{6}$.

