

Criteris de correcció globals

- Les respostes a les preguntes o tasques s'han de realitzar expressant de forma raonada el procés seguit per resoldre-les, amb el rigor i la precisió necessaris, usant el llenguatge, la notació i els símbols matemàtics adequats, i utilitzant arguments, justificacions, explicacions i raonaments explícits i coherents. Es valorarà el grau d'acompliment amb un màxim de 0,25 punts cada exercici.
 - Els errors de càlcul es penalitzaran amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes mecàniques o de càlcul no justificades, amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- La simple descripció del plantejament, sense que es dugui a terme la resolució de manera efectiva, no és suficient per obtenir una valoració completa de la pregunta o tasca.
- En les preguntes o tasques en què es demani expressament una deducció raonada, la simple aplicació d'una fórmula no serà suficient per obtenir-ne una valoració completa.
- Els errors comesos en una pregunta o tasca (per exemple, en el càlcul del valor d'un cert paràmetre) no es tindran en compte en la qualificació dels desenvolupaments posteriors que puguin veure's afectats, sempre que resultin d'una complexitat equivalent.
- Els errors en les operacions aritmètiques elementals es penalitzaran amb un màxim de 0,25 punts en cada pregunta o tasca
- Si l'alumne presenta més problemes que els demanats, corriu-ne els que apareixen primer.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta". Si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració.

La prova consta de tres parts: la primera no té diferents opcions, i les altres dues tenen dos possibles problemes, a contestar-ne un. En cas de contestar dos problemes d'una mateixa part, només s'avaluarà el primer. Vegeu la puntuació a cada exercici.

No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació. Es poden usar regles i bolígrafs de colors (excepte vermell i verd).

Part A. Contestau tots els problemes d'aquesta part (total 4 pt).

Problema A1. — L'any 2025 la mediana dels salaris a Espanya va ser d'aproximadament 24 000 € anuals. És a dir, la meitat de treballadors guanyaren més, i la meitat de treballadors guanyaren menys d'aquesta quantitat. Segons l'Institut Nacional d'Estadística,

- dels treballadors amb un salari inferior a la mediana, el 31% no estaven satisfets amb la seva feina i l'altre 69% sí que n'estaven satisfets,
- dels treballadors amb un salari superior a la mediana, el 26% no estaven satisfets amb la seva feina i l'altre 74% sí que n'estaven satisfets.

- a) Escollint un treballador a l'atzar, quina és la probabilitat que no estigui satisfet amb la seva feina?

Criteris: 0.25 pts per identificar els esdeveniments, 0.5 pts per justificar el càlcul, 0.25 pts per indicar el resultat correcte. **(Total 1 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments:

- A: el treballador té un salari inferior al medià,
- B: el treballador no estava satisfet.

Aleshores,

$$P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | A^c)P(A^c) = 0.31 \cdot 0.5 + 0.26 \cdot 0.5 = 0.285.$$

- b) Escollint un treballador a l'atzar que no estigui satisfet amb la seva feina, quina és la probabilitat que tenguí un salari inferior a la mediana?

Criteris: 0.25 pts per indicar la probabilitat que es vol calcular, 0.5 pts per justificar el càlcul, 0.25 pts per indicar el resultat correcte. **(Total 1 pt)**

Solució. Amb la mateixa notació,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.31}{0.285} = 0.544.$$

Problema A2. — Els resultats d'una enquesta sobre la quantitat de dies a la setmana que un treballador fa teletreball són els següents:

0 dies	1 dia	2 dies	3 dies	4 dies	5 dies
397	64	72	47	15	18

- a) Calcula la proporció mostral, sobre el total d'enquestats, dels que fan almenys un dia de teletreball setmanal.

Criteris: Penalitzau amb -0.25 pts per error de càlcul numèric.

(Total 1 pt)

Solució. Tenim un total de $n = 397 + 64 + 72 + 47 + 15 + 18 = 613$ enquestats, dels quals $613 - 397 = 216$ teletreballen almenys un dia. Per la llei de Laplace, la proporció mostral és de $\hat{p} = 216/613 = 0.3524$.

- b) Calcula un interval de confiança per a la proporció real dels treballadors que fan almenys un dia de teletreball setmanal amb un nivell de confiança del 75%.

Criteris: 0.25 pts per indicar la distribució de $\hat{p}$ o la fórmula per a l'interval de confiança de p , 0.25 pts per calcular $z_{\alpha/2}$, 0.5 pts per calcular interval. Penalitzau amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. Penalitzau amb tota la puntuació si s'utilitza un valor per a $\hat{p}$ que no representi una proporció.

(Total 1 pt)

Solució. Ens interessa trobar un interval de confiança per a la proporció real, que anomenarem p . Sigui X la variable aleatòria que mesura la quantitat d'individus d'una mostra de $n = 613$ que fan almenys un dia de teletreball, aleshores $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, que podem aproximar per una normal, $X \sim \text{Normal}(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)})$. Per tant, la proporció sobre la nostra mostra, $\hat{p} = \frac{X}{n}$, segueix aproximadament una distribució $\hat{p} \sim \text{Normal}(\mu = p, \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$.

Finalment, calculam l'interval de confiança per a p com a:

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right].$$

Per al nivell de confiança del 75%, $\alpha = 0.25$ o per tant $\alpha/2 = 0.125$. Calculant, obtenim $z_{\alpha/2} = 1.15$. Per tant, $z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.0222$ i l'interval de confiança demanat és:

$$[0.3302, 0.3746].$$

Part B. Contestau només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — Per fabricar cotxes necessitam, d'un proveïdor, tres tipus de components diferents:

- Alternador: cada un pesa 6 kg, té un volum de 80 litres i un preu de 120 €.
- Bomba de combustible: cada una pesa 2 kg, té un volum de 2 litres i un preu de 40 €.
- Caixa de canvis: cada una pesa 50 kg, té un volum de 40 litres i un preu de 800 €.

- a) Ens envien una comanda que només conté alternadors i caixes de canvis, que té una càrrega amb un volum total de 44 800 litres, i per la qual ens han facturat 230 000 €. Quants alternadors ens han enviat?

Criteris: 0.25 pts per indicar les variables, 0.5 pts per plantejar les equacions, 0.5 pts per resoldre, 0.25 pts per interpretar el resultat. Penalitzau amb -0.75 pts si el càlcul és incorrecte.

(Total 1.5 pt)

Solució. Siguin a , c el nombre d'alternadors i caixes de canvis, respectivament. Segons l'enunciat,

$$\begin{cases} 80a + 40c = 44800, \\ 120a + 800c = 230000 \end{cases} \implies \begin{cases} 2a + c = 1120, \\ 3a + 20c = 5750 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1120 \\ 5750 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a = 450, \\ c = 220. \end{cases}$$

És a dir, ens han enviat 450 alternadors.

- b) En la comanda següent, atès que cada cotxe necessita un component de cada tipus, ens envien ara el mateix nombre d'alternadors, de bombes de combustible i de caixes de canvis. La seva càrrega té un pes total de 24 360 kg, i un volum total de 51 240 litres. Quants alternadors ens han enviat?

Criteris: 0.75 pts per plantejar, 0.5 pts per resoldre, 0.25 pts per interpretar el resultat. Penalitzau amb -0.5 pts per cada error de càlcul. Penalitzau amb -0.5 pts si no es comprova que la solució és compatible amb totes les condicions. Penalitzau amb -0.75 si s'ha plantejat una equació incoherent sense justificar.

(Total 1.5 pt)

Solució. Siguin a , b , c el nombre d'alternadors, bombes i caixes de canvis, respectivament. Segons l'enunciat,

$$\begin{cases} a = b = c, \\ 6a + 2b + 50c = 24360, \\ 80a + 2b + 40c = 51240 \end{cases} \implies \begin{cases} a = b = c, \\ 58a = 24360, \\ 122a = 51240 \end{cases} \implies a = b = c = 420.$$

És a dir, ens han enviat 420 unitats de cada component.

Problema B2. — Considera la matriu M i la seva inversa, M^{-1} , següents:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula el vector x tal que $Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Criteris: Penalitzau amb -0.5 pts per cada error de càlcul. Penalitzau amb tota la puntuació si no justifica el càlcul. **(Total 2 pt)**

Solució.

$$Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1}Mx = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

b) Calcula el vector y tal que $M^{-1}y = M^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Criteris: Penalitzau amb -0.25 pts per no justificar. Penalitzau amb -0.5 pts per cada error de càlcul. **(Total 1 pt)**

Solució.

$$M^{-1}y = M^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M \cdot M^{-1}y = M \cdot M^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Id} \cdot y = \text{Id} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Part C. Contestau només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — Considera la funció $f(x) = x(x^2 - 2x + 1)$, per a $x \in (-\infty, \infty)$.

- a) Calcula el valor de la funció en els extrems del domini.

Criteris: Penalitzau amb -0.25 pts per cada error d'escriptura matemàtica. **(Total 1 pt)**

Solució. Observem que $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$. Per a ambdós extrems del domini necessitam calcular un límit:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x(x^2 - 2x + 1) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= (-\infty) + (-\infty) + (-\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

- b) Calcula $f'(1)$.

Criteris: 0.5 pts per calcular $f'(x)$, 0.5 pts per calcular correctament $f'(1)$. Penalitzau tota la puntuació si el càlcul de $f'(x)$ és incorrecte. **(Total 1 pt)**

Solució. Calculant, $f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)' = 3x^2 - 4x + 1$ i, per tant, $f'(1) = 3 - 4 + 1 = 0$.

- c) Calcula $\int_0^1 f'(x) dx$.

Criteris: 0.5 pts per indicar la primitiva, 0.5 pts per calcular. Penalitzau amb tota la puntuació si calculen l'àrea delimitada per la funció. **(Total 1 pt)**

Solució.

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 0 - 0 = 0.$$

Problema C2. — Considera la funció $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$, per a $x \in [1, +\infty)$.

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$. Calcula o justifica, i indica sobre la gràfica el valor de la funció en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims relatius i absoluts.

Criteris: 0.5 pts per determinar els valors en els extrems del domini. 0.5 pts per determinar els intervals de creixement/decreixement. 0.5 pts per determinar els màxims/mínims relatius i absoluts. 0.5 pts per la claredat/correcció de la gràfica i els eixos (penalitzau amb -0.25 pts si no indiquen quin és el mínim absolut). Penalitzau amb tota la puntuació les gràfiques basades únicament en una taula de punts. **(Total 2 pt)**

Solució. En els extrems del domini,

$$f(1) = 1 + \sqrt{1-1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \sqrt{x-1} = 1 + \infty = +\infty.$$

La seva derivada és $f'(x) = (1 + \sqrt{x-1})' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ que, per a $x > 1$, aquesta és sempre positiva. Donat que la derivada no té cap canvi de signe, la funció no té extrems relatius. Observem que per a $x \rightarrow 1^+$, aleshores $f'(x)$ tendeix a $+\infty$. En tot cas, és una funció creixent en tot el seu domini $[1, +\infty)$, per tant, amb mínim absolut a $x = 1$, sense extrems relatius i no té màxim absolut per tendir a $+\infty$.

- b) Sobre la mateixa gràfica, traça la recta tangent a la funció en el punt $x = 10$. Quin és el valor del seu pendent?

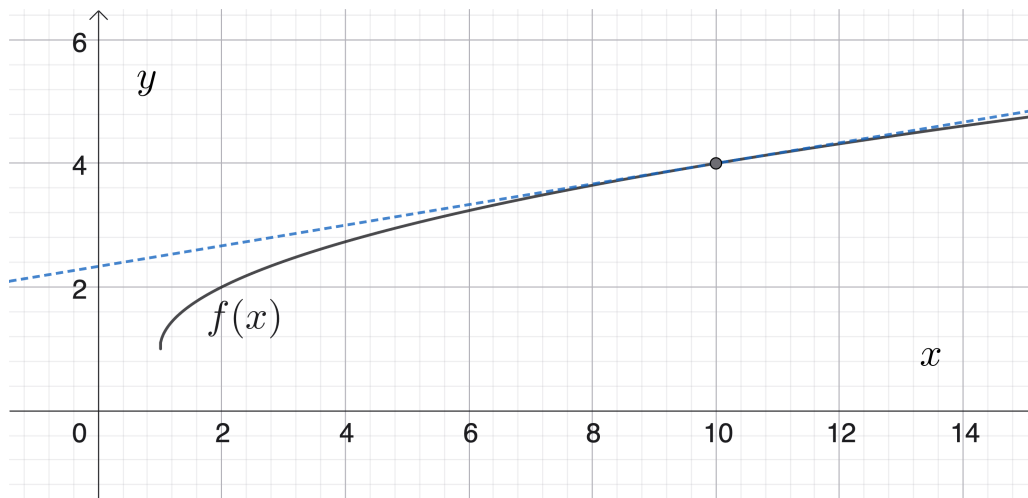
Criteris: 0.5 pts per calcular el pendent, 0.5 pts per traçar la recta correctament.

(Total 1 pt)

Solució. Per a $x = 10$:

$$f(10) = 1 + \sqrt{10-1} = 4, \quad f'(10) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{10-1}} = \frac{1}{6}.$$

És a dir, és una recta que passa pel punt $x = 10$, $y = 4$, i que té pendent $m = 1/6$.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.