

**Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales****INDICACIONES**

- El examen consta de 3 apartados. Cada apartado puede contener una o dos opciones. En el caso de aparecer dos opciones, se escogerá una que se deberá realizar íntegramente.
- En caso de resolver más opciones de las establecidas en cada apartado, se corregirá únicamente la que aparezca en primer lugar en el cuadernillo del examen.
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- Se permitirá el uso de reglas y calculadoras que no sean programables, ni gráficas o con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

**Apartado 1 [3 puntos].**

**Opción 1.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x - y + az = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Realice las tareas que se describen a continuación:

**Tarea 1.1A [2 PUNTOS].** Discuta el sistema en función de los valores del parámetro  $a$ .

**Tarea 1.1B [1 PUNTO].** Resuelva el sistema de ecuaciones para  $a = -2$ .

**Opción 2.** Una agencia de marketing desea maximizar el impacto de su nueva campaña, medido en miles de visualizaciones, invirtiendo en dos tipos de publicidad: Instagram Stories y YouTube Pre-roll.

Los costes unitarios son de 500 € para Instagram y 1.500 € para YouTube, contando con un presupuesto límite de 15.000 €. Las condiciones de contratación exigen un total de al menos 10 anuncios, de los cuales como mínimo 4 deben ser de YouTube. Además, el número de anuncios de Instagram no puede exceder el doble de los de YouTube. Se estima que el impacto por unidad es de 1,5 miles de visualizaciones en Instagram y 3 miles en YouTube.

Realice las siguientes tareas:

**Tarea 1.2A [1 PUNTO].** Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

**Tarea 1.2B [1 PUNTO].** Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

**Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS].** ¿Cuántos anuncios de cada tipo debe contratar la empresa para maximizar el impacto (número de visualizaciones)?

**Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS].** ¿A cuánto ascendería dicho impacto máximo (en miles de visualizaciones)?

**Apartado 2 [4 puntos].** Realice las siguientes tareas a partir de esta función.

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 - 3x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS].** Calcule el valor del parámetro  $a$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo su dominio. Para el valor de  $a$  obtenido, halle los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

**Tarea 2.1B [1,5 PUNTOS].** Considerando el caso  $a = -2$ , calcule el área de la región delimitada por esta función, el eje de abscisas  $OX$  y las rectas verticales  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

**Tarea 2.1C [1 PUNTO].** Considerando el caso  $a = 0$ , calcule los extremos relativos que tiene esta función en el intervalo  $[-3, 2]$ , especificando si son máximos o mínimos.

**Apartado 3 [3 puntos].**

**Opción 1.** El tiempo que los estudiantes de un instituto tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 estudiantes seleccionados al azar, y se ha calculado que el tiempo medio necesario para completar el examen es de 90 minutos. Realice las siguientes tareas:

**Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS].** Calcule el intervalo de confianza del 95% para el valor promedio del tiempo que los estudiantes tardan en completar el examen.

**Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS].** ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar el examen, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 minutos?

**Opción 2.** Una empresa de biotecnología ha desarrollado una prueba para una enfermedad. Se estima que el 3% de la población padece la enfermedad. La prueba es altamente sensible, dando positivo en el 98% de las personas enfermas. Sin embargo, en el 5% de las personas sanas, la prueba da un falso positivo. Realice las siguientes tareas que se plantean:

**Tarea 3.2A [1 PUNTO].** Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar dé positivo en la prueba.

**Tarea 3.2B [1 PUNTO].** Si una persona ha dado positivo, calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

**Tarea 3.2C [1 PUNTO].** Calcule la probabilidad de que la prueba dé un resultado incorrecto para una persona elegida al azar.

Tabla de la distribución normal  $N(0,1)$ 

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



| $z_0$ | 0,00    | 0,01    | 0,02    | 0,03    | 0,04    | 0,05    | 0,06    | 0,07    | 0,08    | 0,09    | $z_0$ |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 0,0   | 0,5000  | 0,5040  | 0,5080  | 0,5120  | 0,5160  | 0,5199  | 0,5239  | 0,5279  | 0,5319  | 0,5359  | 0,0   |
| 0,1   | 0,5398  | 0,5438  | 0,5478  | 0,5517  | 0,5557  | 0,5596  | 0,5636  | 0,5675  | 0,5714  | 0,5753  | 0,1   |
| 0,2   | 0,5793  | 0,5832  | 0,5871  | 0,5910  | 0,5948  | 0,5987  | 0,6026  | 0,6064  | 0,6103  | 0,6141  | 0,2   |
| 0,3   | 0,6179  | 0,6217  | 0,6255  | 0,6293  | 0,6331  | 0,6368  | 0,6406  | 0,6443  | 0,6480  | 0,6517  | 0,3   |
| 0,4   | 0,6554  | 0,6591  | 0,6628  | 0,6664  | 0,6700  | 0,6736  | 0,6772  | 0,6808  | 0,6844  | 0,6879  | 0,4   |
| 0,5   | 0,6915  | 0,6950  | 0,6985  | 0,7019  | 0,7054  | 0,7088  | 0,7123  | 0,7157  | 0,7190  | 0,7224  | 0,5   |
| 0,6   | 0,7257  | 0,7291  | 0,7324  | 0,7357  | 0,7389  | 0,7422  | 0,7454  | 0,7486  | 0,7517  | 0,7549  | 0,6   |
| 0,7   | 0,7580  | 0,7611  | 0,7642  | 0,7673  | 0,7704  | 0,7734  | 0,7764  | 0,7794  | 0,7823  | 0,7852  | 0,7   |
| 0,8   | 0,7881  | 0,7910  | 0,7939  | 0,7967  | 0,7995  | 0,8023  | 0,8051  | 0,8078  | 0,8106  | 0,8133  | 0,8   |
| 0,9   | 0,8159  | 0,8186  | 0,8212  | 0,8238  | 0,8264  | 0,8289  | 0,8315  | 0,8340  | 0,8365  | 0,8389  | 0,9   |
| 1,0   | 0,8413  | 0,8438  | 0,8461  | 0,8485  | 0,8508  | 0,8531  | 0,8554  | 0,8577  | 0,8599  | 0,8621  | 1,0   |
| 1,1   | 0,8643  | 0,8665  | 0,8686  | 0,8708  | 0,8729  | 0,8749  | 0,8770  | 0,8790  | 0,8810  | 0,8830  | 1,1   |
| 1,2   | 0,8849  | 0,8869  | 0,8888  | 0,8907  | 0,8925  | 0,8944  | 0,8962  | 0,8980  | 0,8997  | 0,9015  | 1,2   |
| 1,3   | 0,9032  | 0,9049  | 0,9066  | 0,9082  | 0,9099  | 0,9115  | 0,9131  | 0,9147  | 0,9162  | 0,9177  | 1,3   |
| 1,4   | 0,9192  | 0,9207  | 0,9222  | 0,9236  | 0,9251  | 0,9265  | 0,9279  | 0,9292  | 0,9306  | 0,9319  | 1,4   |
| 1,5   | 0,9332  | 0,9345  | 0,9357  | 0,9370  | 0,9382  | 0,9394  | 0,9406  | 0,9418  | 0,9429  | 0,9441  | 1,5   |
| 1,6   | 0,9452  | 0,9463  | 0,9474  | 0,9484  | 0,9495  | 0,9505  | 0,9515  | 0,9525  | 0,9535  | 0,9545  | 1,6   |
| 1,7   | 0,9554  | 0,9564  | 0,9573  | 0,9582  | 0,9591  | 0,9599  | 0,9608  | 0,9616  | 0,9625  | 0,9633  | 1,7   |
| 1,8   | 0,9641  | 0,9649  | 0,9656  | 0,9664  | 0,9671  | 0,9678  | 0,9686  | 0,9693  | 0,9699  | 0,9706  | 1,8   |
| 1,9   | 0,9713  | 0,9719  | 0,9726  | 0,9732  | 0,9738  | 0,9744  | 0,9750  | 0,9756  | 0,9761  | 0,9767  | 1,9   |
| 2,0   | 0,9772  | 0,9778  | 0,9783  | 0,9788  | 0,9793  | 0,9798  | 0,9803  | 0,9808  | 0,9812  | 0,9817  | 2,0   |
| 2,1   | 0,9821  | 0,9826  | 0,9830  | 0,9834  | 0,9838  | 0,9842  | 0,9846  | 0,9850  | 0,9854  | 0,9857  | 2,1   |
| 2,2   | 0,9861  | 0,9864  | 0,9868  | 0,9871  | 0,9875  | 0,9878  | 0,9881  | 0,9884  | 0,9887  | 0,9890  | 2,2   |
| 2,3   | 0,9893  | 0,9896  | 0,9898  | 0,9901  | 0,9904  | 0,9906  | 0,9909  | 0,9911  | 0,9913  | 0,9916  | 2,3   |
| 2,4   | 0,9918  | 0,9920  | 0,9922  | 0,9925  | 0,9927  | 0,9929  | 0,9931  | 0,9932  | 0,9934  | 0,9936  | 2,4   |
| 2,5   | 0,9938  | 0,9940  | 0,9941  | 0,9943  | 0,9945  | 0,9946  | 0,9948  | 0,9949  | 0,9951  | 0,9952  | 2,5   |
| 2,6   | 0,9953  | 0,9955  | 0,9956  | 0,9957  | 0,9959  | 0,9960  | 0,9961  | 0,9962  | 0,9963  | 0,9964  | 2,6   |
| 2,7   | 0,9965  | 0,9966  | 0,9967  | 0,9968  | 0,9969  | 0,9970  | 0,9971  | 0,9972  | 0,9973  | 0,9974  | 2,7   |
| 2,8   | 0,9974  | 0,9975  | 0,9976  | 0,9977  | 0,9977  | 0,9978  | 0,9979  | 0,9979  | 0,9980  | 0,9981  | 2,8   |
| 2,9   | 0,9981  | 0,9982  | 0,9982  | 0,9983  | 0,9984  | 0,9984  | 0,9985  | 0,9985  | 0,9986  | 0,9986  | 2,9   |
| 3,0   | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,99900 | 3,0   |
| 3,1   | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 | 3,1   |
| 3,2   | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 | 3,2   |
| 3,3   | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 | 3,3   |
| 3,4   | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 | 3,4   |
| 3,5   | 0,99977 | 0,99978 | 0,99978 | 0,99979 | 0,99980 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 | 3,5   |
| 3,6   | 0,99984 | 0,99985 | 0,99985 | 0,99986 | 0,99986 | 0,99987 | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 | 3,6   |
| 3,7   | 0,99989 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99991 | 0,99991 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 3,7   |
| 3,8   | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 | 3,8   |
| 3,9   | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 | 3,9   |

**SOLUCIONES****Apartado 1 [3 puntos].**

**Opción 1.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x - y + az = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Realice las tareas que se describen a continuación:

**Tarea 1.1A [2 PUNTOS].** Discuta el sistema en función de los valores del parámetro  $a$ .

**Tarea 1.1B [1 PUNTO].** Resuelva el sistema de ecuaciones para  $a = -2$ .

**1.1A** Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + a^2 - 2 - 1 - 2a - a = a^2 - 3a - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 = a \\ \frac{3-5}{2} = -1 = a \end{cases}$$

**CASO 1**  $a \neq -1$  y  $a \neq 4$ 

En este caso el determinante de  $A$  es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

**CASO 2.**  $a = -1$ 

En este caso el determinante de  $A$  es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \\ -2 \quad 2 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}}^{A/B} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline & \underbrace{\phantom{0 \quad 0 \quad 0 \quad 2}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

### CASO 3. $a = 4$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad -4 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad 4 \quad 2 \\ -2 \quad -8 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -9 \quad 6 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad -9 \quad 6 \quad 0 \\ 0 \quad 9 \quad -6 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 4 & -1 & 1 \end{matrix}}^{A/B} \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ \hline & \underbrace{\phantom{0 \quad 0 \quad 0 \quad -6}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

**Conclusión:** Si  $a \neq -1$  y  $a \neq 4$  el sistema es compatible determinado (una única solución) y si  $a = -1$  o  $a = 4$  el sistema es incompatible (sin solución).

**1.1B** Para  $a = -2$  estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado. Resolvemos el sistema para  $a = -2$ .

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 2z + 2 - y - 2z = 2 \\ 2y + z + 1 + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y = 0 \rightarrow y = 0 \\ 3y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 + 2z = 2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow x = 0 + 1 + 1 = 2$$

Para  $a = -2$  la solución del sistema es  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$ .

**Apartado 1 [3 puntos].**

**Opción 2.** Una agencia de marketing desea maximizar el impacto de su nueva campaña, medido en miles de visualizaciones, invirtiendo en dos tipos de publicidad: Instagram Stories y YouTube Pre-roll.

Los costes unitarios son de 500 € para Instagram y 1.500 € para YouTube, contando con un presupuesto límite de 15.000 €. Las condiciones de contratación exigen un total de al menos 10 anuncios, de los cuales como mínimo 4 deben ser de YouTube. Además, el número de anuncios de Instagram no puede exceder el doble de los de YouTube. Se estima que el impacto por unidad es de 1,5 miles de visualizaciones en Instagram y 3 miles en YouTube.

Realice las siguientes tareas:

**Tarea 1.2A [1 PUNTO].** Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

**Tarea 1.2B [1 PUNTO].** Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

**Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS].** ¿Cuántos anuncios de cada tipo debe contratar la empresa para maximizar el impacto (número de visualizaciones)?

**Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS].** ¿A cuánto ascendería dicho impacto máximo (en miles de visualizaciones)?

**1.2A** Llamamos “x” = número de anuncios de Instagram Stories e “y” = número de anuncios Youtube Pre-roll. Realizamos una tabla con los datos del problema.

|                          | Coste      | Miles de visualizaciones |
|--------------------------|------------|--------------------------|
| Nº Instagram Stories (x) | 500x       | 1.5x                     |
| Nº Youtube Pre-roll (y)  | 1500y      | 3y                       |
| TOTAL                    | 500x+1500y | 1.5x+3y                  |

La función objetivo que deseamos maximizar es el impacto medido en miles de visualizaciones que vienen expresado como  $I(x, y) = 1.5x + 3y$

Las restricciones son:

“Los costes unitarios son de 500 € para Instagram y 1.500 € para YouTube, contando con un presupuesto límite de 15.000 €”  $\rightarrow 500x + 1500y \leq 15000$

“Las condiciones de contratación exigen un total de al menos 10 anuncios, de los cuales como mínimo 4 deben ser de YouTube”  $\rightarrow x + y \geq 10; y \geq 4$ .

“El número de anuncios de Instagram no puede exceder el doble de los de YouTube”  $\rightarrow x \leq 2y$

Las cantidades deben ser positivas  $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 500x + 1500y \leq 15000 \\ x + y \geq 10 \\ y \geq 4 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \\ y \geq 4 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

**1.2B** Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + 3y = 30$

$x + y = 10$

$y = 4$

$x = 2y$

$x \geq 0; y \geq 0$

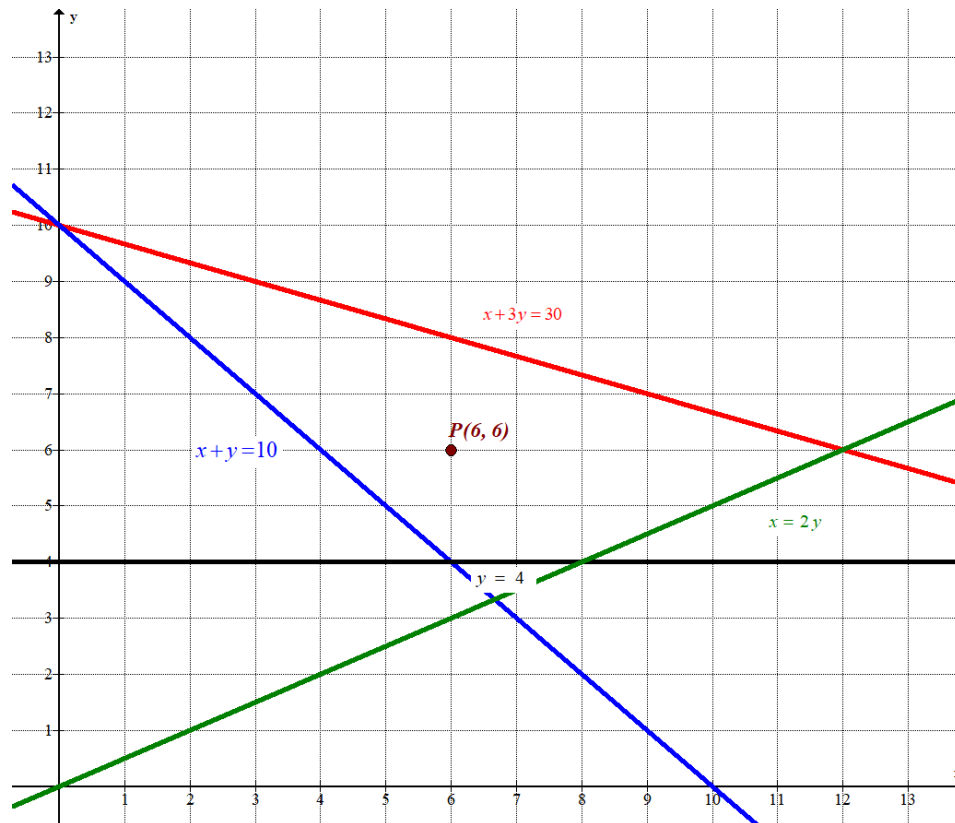
| $x$ | $y = \frac{30-x}{3}$ |
|-----|----------------------|
| 0   | 10                   |
| 12  | 6                    |
| 30  | 0                    |

| $x$ | $y = 10 - x$ |
|-----|--------------|
| 0   | 10           |
| 6   | 4            |
| 10  | 0            |

| $x$ | $y = 4$ |
|-----|---------|
| 6   | 4       |
| 8   | 4       |

| $x$ | $y = \frac{x}{2}$ |
|-----|-------------------|
| 0   | 0                 |
| 8   | 4                 |
| 12  | 6                 |

Primer  
cuadrante



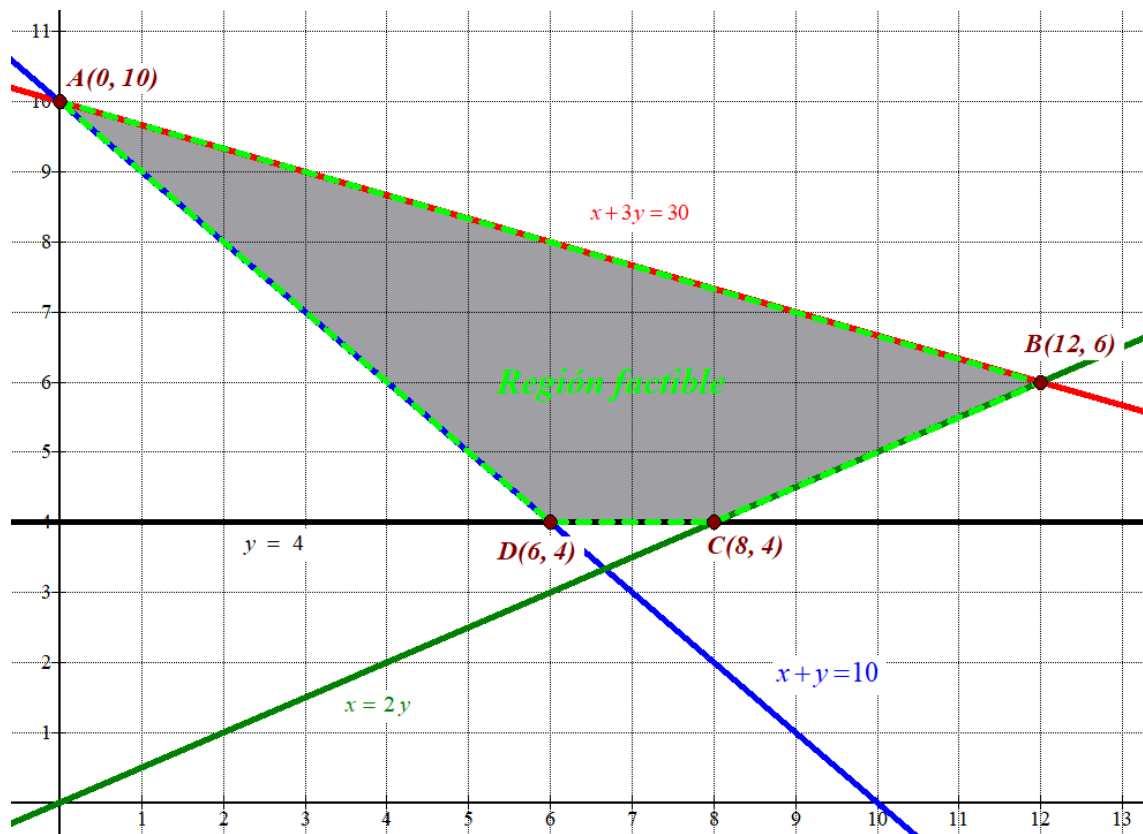
Como las restricciones del problema son  $\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \\ y \geq 4 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$  la región factible es la región del primer

cuadrante que está por debajo de la recta roja y por encima de las rectas azul, verde y negra.

Comprobamos que el punto  $P(6, 6)$  que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6 + 3 \cdot 6 \leq 30 \\ 6 + 6 \geq 10 \\ 6 \geq 4 \\ 6 \leq 2 \cdot 6 \\ 6 \geq 0; 6 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de gris la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son  $A(0, 10)$ ;  $B(12, 6)$ ;  $C(8, 4)$  y  $D(6, 4)$ .

**1.2C** Valoramos la función objetivo  $I(x, y) = 1.5x + 3y$  en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow I(0, 10) = 1.5 \cdot 0 + 3 \cdot 10 = 30$$

$$B(12, 6) \rightarrow I(12, 6) = 1.5 \cdot 12 + 3 \cdot 6 = 36 \text{ Máximo}$$

$$C(8, 4) \rightarrow I(8, 4) = 1.5 \cdot 8 + 3 \cdot 4 = 24$$

$$D(6, 4) \rightarrow I(6, 4) = 1.5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 21$$

El valor máximo es 36 y se alcanza en el vértice  $B(12, 6)$ . El máximo impacto se consigue contratando 12 anuncios de Instagram Stories y 6 de Youtube Pre-roll.

**1.2D** El máximo impacto que se puede conseguir es de 36 mil visualizaciones.

**Apartado 2 [4 puntos].** Realice las siguientes tareas a partir de esta función.

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 - 3x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS].** Calcule el valor del parámetro  $a$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo su dominio. Para el valor de  $a$  obtenido, halle los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

**Tarea 2.1B [1,5 PUNTOS].** Considerando el caso  $a = -2$ , calcule el área de la región delimitada por esta función, el eje de abscisas OX y las rectas verticales  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

**Tarea 2.1C [1 PUNTO].** Considerando el caso  $a = 0$ , calcule los extremos relativos que tiene esta función en el intervalo  $[-3, 2]$ , especificando si son máximos o mínimos.

**2.1A** La función es continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$  pues está definida con expresiones polinómicas. Para que la función sea continua debe serlo en el cambio de definición  $x = 2$ .

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^3 + a \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 4a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 + ax^2 - 3x = 4a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 3x - 4 = 2^2 - 3 \cdot 2 - 4 = -6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a + 2 = -6 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

La función es continua en todo su dominio para  $a = -2$ .

$$\text{La función queda } f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 3x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX ( $y = 0$ ).

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow \dots$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\dots \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = x(x-3)(x+1)$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

La función queda  $f(x) = \begin{cases} x(x-3)(x+1), & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)(x+1), & \text{si } x > 2 \end{cases}$ . Esta expresión se anula en  $x = 0$ ,  $x = -1$

y en  $x = 4$ . Los puntos de corte con el eje OX son A(0,0), B(-1,0) y C(4,0).

Hallamos los puntos de corte con el eje OY ( $x = 0$ ).

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$$

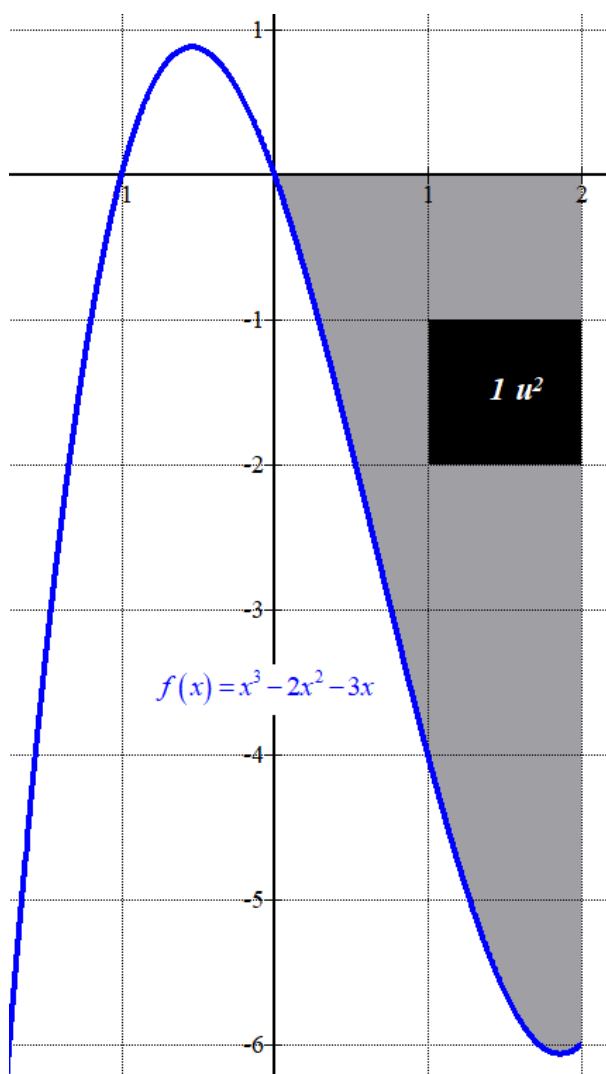
El punto de corte con el eje OY es el punto A(0, 0).

**2.1B** La función en el intervalo  $[0, 2]$  solo corta el eje OX en  $x = 0$ . El área de la región delimitada por esta función, el eje de abscisas OX y las rectas verticales  $x = 0$ ,  $x = 2$  es el valor absoluto de la integral de 0 a 2 de  $f(x)$ .

La función en el intervalo  $[0, 2]$  tiene la expresión  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ .

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 x^3 - 2x^2 - 3x dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_0^2 = \\ &= \left[ \frac{2^4}{4} - \frac{2 \cdot 2^3}{3} - \frac{3 \cdot 2^2}{2} \right] - \left[ \frac{0^4}{4} - \frac{2 \cdot 0^3}{3} - \frac{3 \cdot 0^2}{2} \right] = 4 - \frac{16}{3} - 6 = \boxed{\frac{-22}{3} \approx 7.333} \end{aligned}$$

El área tiene un valor aproximado de 7.333 unidades cuadradas.



2.1C Para  $a = 0$  la función queda  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

En el intervalo  $[-3, 2]$  la función tiene la expresión  $f(x) = x^3 - 3x$ . Hallamos su derivada y averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

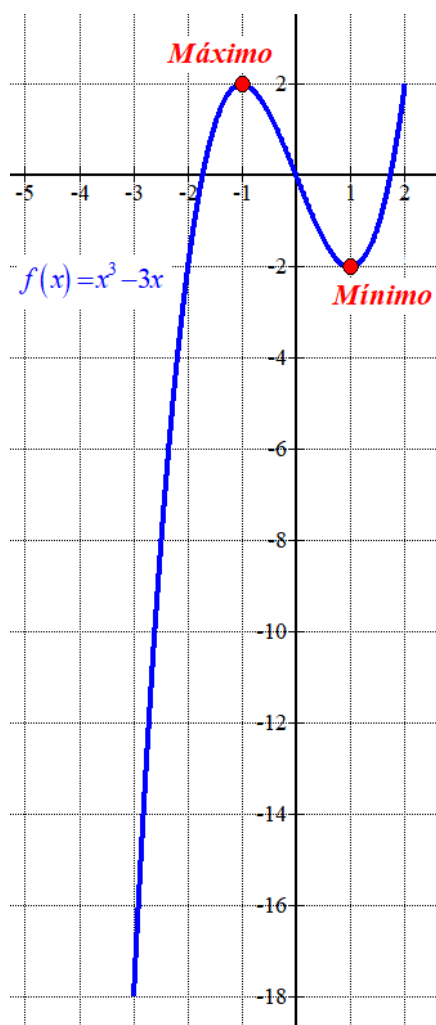
Estos dos puntos críticos pertenecen al intervalo  $[-3, 2]$ . Sustituimos esos valores en la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0 \\ f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \end{cases}$$

En  $x = -1$  la primera derivada se anula y la segunda es negativa. La función presenta un máximo relativo para  $x = -1$ .

En  $x = 1$  la primera derivada se anula y la segunda es positiva. La función presenta un mínimo relativo para  $x = 1$ .

Como  $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$  y  $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$  el máximo relativo tiene coordenadas  $(-1, 2)$  y el mínimo relativo es  $(1, -2)$ .



**Apartado 3 [3 puntos].**

**Opción 1.** El tiempo que los estudiantes de un instituto tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 estudiantes seleccionados al azar, y se ha calculado que el tiempo medio necesario para completar el examen es de 90 minutos. Realice las siguientes tareas:

**Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS].** Calcule el intervalo de confianza del 95% para el valor promedio del tiempo que los estudiantes tardan en completar el examen.

**Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS].** ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar el examen, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 minutos?

$X$  = El tiempo que los estudiantes de un instituto tardan en completar un examen (en minutos).

$X = N(\mu, 10)$

Tamaño de muestra =  $n = 100$ . Media muestral =  $\bar{x} = 90$  minutos.

**3.1A** Hallamos el valor de  $z_{\alpha/2}$  para una confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



|     | 0      | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0   | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 |
| 0.1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 |
| 0.2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 |
| 0.3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 |
| 0.4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 |
| 0.5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 |
| 0.6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 |
| 0.7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 |
| 0.8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 |
| 0.9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 |
| 1   | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 |
| 1.1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 |
| 1.2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 |
| 1.3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 |
| 1.4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 |
| 1.5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 |
| 1.6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 |
| 1.7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 |
| 1.8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 |
| 1.9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 |

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{10}{\sqrt{100}} = 1.96 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (90 - 1.96, 90 + 1.96) = (88.04, 91.96)$$

**3.1B** Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de  $z_{\alpha/2}$ .

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

| z0  | 0,00   | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9 |

Igualemos el error a 2 minutos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = 21.7 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{21.7}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{21.7}{2}\right)^2 = 117.7225$$

Como  $n$  debe ser entero y superior al “ $n$ ” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 118 estudiantes.

**Apartado 3 [3 puntos].**

**Opción 2.** Una empresa de biotecnología ha desarrollado una prueba para una enfermedad. Se estima que el 3% de la población padece la enfermedad. La prueba es altamente sensible, dando positivo en el 98% de las personas enfermas. Sin embargo, en el 5% de las personas sanas, la prueba da un falso positivo. Realice las siguientes tareas que se plantean:

**Tarea 3.2A [1 PUNTO].** Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar dé positivo en la prueba.

**Tarea 3.2B [1 PUNTO].** Si una persona ha dado positivo, calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

**Tarea 3.2C [1 PUNTO].** Calcule la probabilidad de que la prueba dé un resultado incorrecto para una persona elegida al azar.

Llamamos  $M$  al suceso “la persona elegida está enferma”,  $T+$  a “el test da positivo” y  $T-$  a “el test da negativo”.

Por los datos proporcionados tenemos:  $P(M) = 0.03$ ,  $P(T+/M) = 0.98$  y  $P(T+/\bar{M}) = 0.05$

**3.2A** Debemos calcular  $P(T+)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+) = P(M)P(T+/M) + P(\bar{M})P(T+/\bar{M}) = 0.03 \cdot 0.98 + 0.97 \cdot 0.05 = \boxed{0.0779}$$

**3.2B** Debemos calcular  $P(\bar{M}/T+)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{M}/T+) = \frac{P(\bar{M} \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(\bar{M})P(T+/\bar{M})}{P(T+)} = \frac{0.97 \cdot 0.05}{0.0779} = \boxed{\frac{485}{779} \approx 0.6226}$$

**3.2C** Hay dos formas de que el resultado sea incorrecto: dar positivo estando sano ( $T+ \cap \bar{M}$ ) o dar negativo estando enfermo ( $T- \cap M$ ). La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de cada una de estas opciones.

$$\begin{aligned} P(\text{Resultado incorrecto}) &= P(T- \cap M) + P(T+ \cap \bar{M}) = \\ &= P(M)P(T-/M) + P(\bar{M})P(T+/\bar{M}) = P(M)[1 - P(T+/M)] + P(\bar{M})P(T+/\bar{M}) = \\ &= 0.03(1 - 0.98) + 0.97 \cdot 0.05 = \boxed{0.0491} \end{aligned}$$