



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas e indíquela en la portada.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. La redacción de la respuesta debe hacerse de forma coherente, con corrección y claridad, empleando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar la página en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Un médico empieza a hacer divulgación sobre salud en las redes sociales. A medida que publica contenidos relacionados con este tema, observa un aumento en su número de seguidores. En un momento determinado graba un vídeo polémico y pierde un pequeño número de seguidores, pero al cabo de unos días publica otro que tiene mucho éxito y, a partir de entonces, su número de seguidores vuelve a crecer. La función que describe su número de seguidores en función del tiempo t , medido en semanas, es $f(t) = 10t^3 - 120t^2 + 450t + 700$, $t \in [0, 10]$.

1.1. ¿Cuántos seguidores tiene al principio? ¿Cuántos tiene al cabo de 10 semanas?

Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y determine sus extremos locales. Haga un esbozo de la gráfica utilizando la información obtenida.

[1,5 puntos]

1.2. ¿En qué semana cuelga el vídeo polémico y cuántos seguidores tiene en aquel momento? ¿En qué semana cuelga el vídeo que tiene mucho éxito? A lo largo de las 10 semanas, ¿en qué momento tiene más seguidores?

[1 punto]

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Un campesino produce diferentes tipos de frutas: fresas, albaricoques y cerezas, que se venden en cajas a precios diferentes. Se sabe que un pedido de 5 cajas de fresas, 3 de albaricoques y 4 de cerezas tiene un coste total de 120 €. Por otro lado, un pedido de 2 cajas de fresas, 1 de albaricoques y 3 de cerezas tiene un coste total de 56 €.

2.1. Calcule el precio de una caja de fresas y el precio de una caja de albaricoques en función del precio de una caja de cerezas.

Con esta información, calcule cuál es el precio de un pedido de 6 cajas de fresas, 4 de albaricoques y 2 de cerezas.

[1,5 puntos]

2.2. Si se sabe que el precio de una caja de albaricoques es de 12,50 €, calcule cuál es el precio de las otras dos cajas de fruta.

[1 punto]

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

Una empresa de telecomunicaciones considera que una página web es eficiente si su tiempo de carga es inferior a 3 segundos. La empresa afirma que al menos el 50 % de las páginas web que gestiona son eficientes. Para comprobar esta afirmación, se selecciona una muestra aleatoria de $n = 2.500$ páginas web gestionadas por esta empresa.

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$
- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$
 - para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$
 - para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$
 - para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

3.1. Se supone que, cada vez que se selecciona una página web para la muestra, esta puede ser eficiente (o no serlo) con una probabilidad $p = 0,5$ y que el hecho de que una página sea eficiente (o no) es independiente de que el resto de las páginas lo sean (o no). Se considera la variable aleatoria X , que cuenta el número de páginas, de entre las 2.500 de la muestra, que son eficientes.

¿Qué distribución tiene la variable X ? Calcule la probabilidad de que como mucho 1.299 páginas sean eficientes. Para ello, utilice la aproximación por la distribución normal sin hacer la corrección por continuidad.

[1.25 puntos]

3.2. En la muestra de $n = 2.500$ páginas web, se ha obtenido una media muestral del tiempo de carga de $\bar{x} = 2,95$ segundos y una desviación típica muestral de $s = 0,38$ segundos. Construya un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo medio de carga de las páginas web que gestiona la empresa. A partir del intervalo obtenido, ¿qué se puede decir sobre la afirmación de la empresa de que al menos el 50 % de las páginas web que gestiona son eficientes?

[1.25 puntos]

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

La siguiente tabla recoge el número de estudiantes de grado (G), máster (M) y doctorado (D) matriculados en las tres facultades —Ciencias (C), Ingeniería (I) y Letras (L)— de una pequeña universidad.

<i>Facultad</i>	<i>Grado (G)</i>	<i>Máster (M)</i>	<i>Doctorado (D)</i>	<i>Total</i>
Ciencias (C)	450	172	41	663
Ingeniería (I)	445	178	45	668
Letras (L)	438	183	48	669
Total	1.333	533	134	2.000

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Indique en la portada del examen la opción elegida.

OPCIÓN A

4.1. Si se escoge un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un estudiante de doctorado de la Facultad de Letras?

Si se escoge al azar un estudiante que cursa un máster, ¿cuál es la probabilidad de que estudie en la Facultad de Ingeniería?

[1.25 puntos]

4.2. Expresé la información de la tabla (sin los totales) mediante una matriz 3×3 y calcule, utilizando un producto de matrices, el vector con el número total de estudiantes de grado, máster y doctorado de la universidad.

Se sabe que los estudiantes de grado pagan 1.000 € de matrícula; los de máster, 1.500 €, y los de doctorado, 500 €. Mediante un producto de matrices, calcule el importe total que ingresa la universidad en concepto de matrículas.

[1.25 puntos]

OPCIÓN B

4.1. Si se escoge un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un estudiante de máster de la Facultad de Ciencias?

Si se escoge al azar un estudiante de la Facultad de Ingeniería, ¿cuál es la probabilidad de que curse un máster?

[1.25 puntos]

4.2. Se sabe que, en total, hay 1.036 estudiantes que disfrutan de una beca. También se sabe que, si se consideran conjuntamente los estudiantes de grado y máster, la mitad están becados, y que hay el mismo número de estudiantes becados de máster que de doctorado.

Determine cuántos estudiantes becados hay de cada nivel educativo (grado, máster y doctorado). [1.25 puntos]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

[2.5 puntos en total]

Un médico empieza a hacer divulgación sobre salud en las redes sociales. A medida que publica contenidos relacionados con este tema, observa un aumento en su número de seguidores. En un momento determinado graba un vídeo polémico y pierde un pequeño número de seguidores, pero al cabo de unos días publica otro que tiene mucho éxito y, a partir de entonces, su número de seguidores vuelve a crecer. La función que describe su número de seguidores en función del tiempo t , medido en semanas, es $f(t) = 10t^3 - 120t^2 + 450t + 700$, $t \in [0, 10]$.

1.1. ¿Cuántos seguidores tiene al principio? ¿Cuántos tiene al cabo de 10 semanas?

Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y determine sus extremos locales. Haga un esbozo de la gráfica utilizando la información obtenida.

[1.5 puntos]

1.2. ¿En qué semana cuelga el vídeo polémico y cuántos seguidores tiene en aquel momento? ¿En qué semana cuelga el vídeo que tiene mucho éxito? A lo largo de las 10 semanas, ¿en qué momento tiene más seguidores?

[1 punto]

1.1. Hallamos el valor de la función para $t = 0$.

$$f(0) = 10 \cdot 0^3 - 120 \cdot 0^2 + 450 \cdot 0 + 700 = 700$$

Al comienzo tiene 700 seguidores.

Hallamos el valor de la función para $t = 10$.

$$f(10) = 10 \cdot 10^3 - 120 \cdot 10^2 + 450 \cdot 10 + 700 = 3200$$

Al cabo de 10 semanas tiene 3200 seguidores.

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$f'(t) = 30t^2 - 240t + 450$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 30t^2 - 240t + 450 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{8+2}{2} = 5 = t \\ \frac{8-2}{2} = 3 = t \end{cases}$$

Analizamos el signo de la derivada antes, entre y después de los dos valores obtenidos.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 30 \cdot 1^2 - 240 \cdot 1 + 450 = 240 > 0. \text{ La función crece en } [0, 3).$$

- En el intervalo $(3, 5)$ tomamos $t = 4$ y la derivada vale

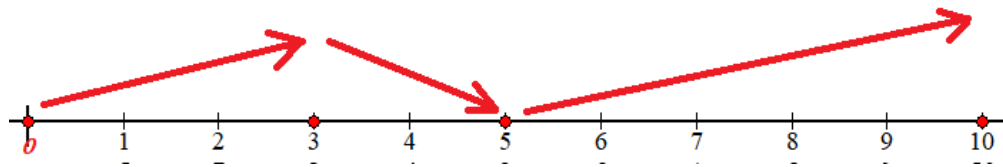
$$f'(4) = 30 \cdot 4^2 - 240 \cdot 4 + 450 = -30 < 0. \text{ La función decrece en } (3, 5).$$

- En el intervalo $(5, 10]$ tomamos $t = 6$ y la derivada vale

$$f'(6) = 30 \cdot 6^2 - 240 \cdot 6 + 450 = 90 > 0. \text{ La función crece en } (5, 10].$$

La función crece en $[0, 3) \cup (5, 10]$ y decrece en $(3, 5)$.

La función sigue el esquema siguiente.

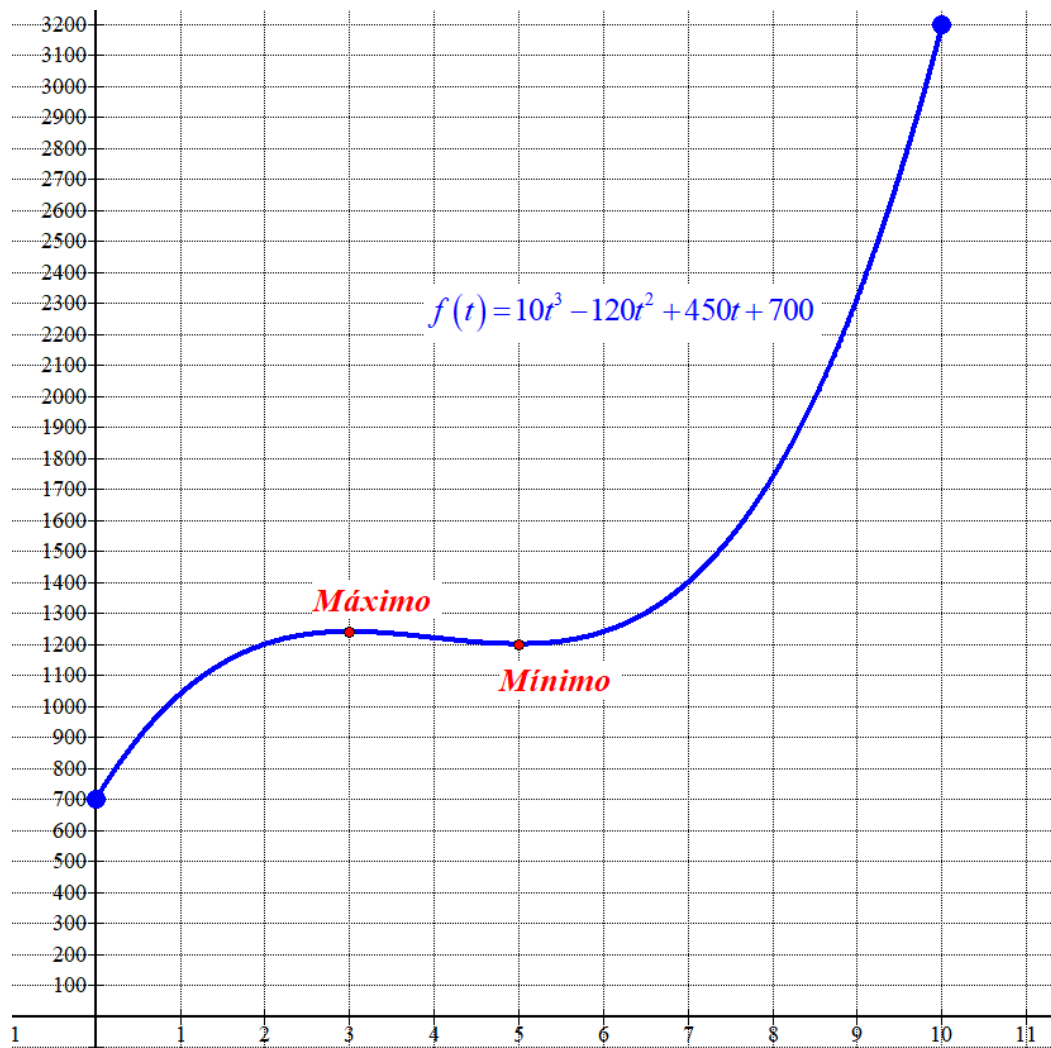


La función presenta un máximo relativo en $t = 3$.

Como $f(3) = 10 \cdot 3^3 - 120 \cdot 3^2 + 450 \cdot 3 + 700 = 1240$ el máximo relativo tiene coordenadas $(3, 1240)$.

La función presenta un mínimo relativo en $t = 5$.

Como $f(5) = 10 \cdot 5^3 - 120 \cdot 5^2 + 450 \cdot 5 + 700 = 1200$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(5, 1200)$.



- 1.2. El video polémico lo graba en la tercera semana cuando tenía 1240 seguidores. Al cabo de las 5 semanas publica el video con el que tiene mucho éxito y empieza a aumentar su número de seguidores alcanzando su máximo valor en la décima semana con 3200 seguidores.

Ejercicio 2

Un campesino produce diferentes tipos de frutas: fresas, albaricoques y cerezas, que se venden en cajas a precios diferentes. Se sabe que un pedido de 5 cajas de fresas, 3 de albaricoques y 4 de cerezas tiene un coste total de 120 €. Por otro lado, un pedido de 2 cajas de fresas, 1 de albaricoques y 3 de cerezas tiene un coste total de 56 €.

2.1. Calcule el precio de una caja de fresas y el precio de una caja de albaricoques en función del precio de una caja de cerezas.

Con esta información, calcule cuál es el precio de un pedido de 6 cajas de fresas, 4 de albaricoques y 2 de cerezas.

2.2. Si se sabe que el precio de una caja de albaricoques es de 12,50 €, calcule cuál es el precio de las otras dos cajas de fruta.

2.1. Llamamos “f” al precio de una caja de fresas, “a” al precio de una caja de albaricoques y “c” al precio de una caja de cerezas. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

Un pedido de 5 cajas de fresas, 3 de albaricoques y 4 de cerezas tiene un coste total de 120 €
 $\rightarrow 5f + 3a + 4c = 120$.

Un pedido de 2 cajas de fresas, 1 de albaricoques y 3 de cerezas tiene un coste total de 56 €
 $\rightarrow 2f + a + 3c = 56$.

Disponemos de 2 ecuaciones y 3 incógnitas, por lo que el sistema va a ser compatible indeterminado (nos falta información para obtener con precisión los tres precios).

$$\left. \begin{array}{l} 5f + 3a + 4c = 120 \\ 2f + a + 3c = 56 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5f + 3a + 4c = 120 \\ a = 56 - 2f - 3c \end{array} \right\} \Rightarrow 5f + 3(56 - 2f - 3c) + 4c = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5f + 168 - 6f - 9c + 4c = 120 \Rightarrow 48 - f - 5c = 0 \Rightarrow \boxed{48 - 5c = f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 56 - 2(48 - 5c) - 3c \Rightarrow a = 56 - 96 + 10c - 3c \Rightarrow \boxed{a = 7c - 40}$$

Una caja de albaricoques cuesta 40 euros menos que siete cajas de cerezas.

Un pedido de 6 cajas de fresas, 4 de albaricoques y 2 de cerezas cuesta $6f + 4a + 2c$.

$$\left. \begin{array}{l} f = 48 - 5c \\ a = 7c - 40 \end{array} \right\} \Rightarrow 6f + 4a + 2c = 6(48 - 5c) + 4(7c - 40) + 2c =$$

$$= 288 - 30c + 28c - 160 + 2c = 128$$

El pedido cuesta 128 euros.

2.2. Añadimos la ecuación $a = 12.5$ y obtenemos la solución del sistema.

$$\left. \begin{array}{l} f = 48 - 5c \\ a = 7c - 40 \\ a = 12.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f = 48 - 5c \\ 12.5 = 7c - 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f = 48 - 5c \\ 52.5 = 7c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f = 48 - 5c \\ c = \frac{52.5}{7} = 7.5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f = 48 - 5 \cdot 7.5 = 10.5}$$

La caja de fresas cuesta 10.5 euros y la de cerezas cuesta 7.5 euros.

Ejercicio 3

Una empresa de telecomunicaciones considera que una página web es eficiente si su tiempo de carga es inferior a 3 segundos. La empresa afirma que al menos el 50 % de las páginas web que gestiona son eficientes. Para comprobar esta afirmación, se selecciona una muestra aleatoria de $n = 2.500$ páginas web gestionadas por esta empresa.

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$

- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0, 1)$

- para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

- para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

3.1. Se supone que, cada vez que se selecciona una página web para la muestra, esta puede ser eficiente (o no serlo) con una probabilidad $p = 0,5$ y que el hecho de que una página sea eficiente (o no) es independiente de que el resto de las páginas lo sean (o no). Se considera la variable aleatoria X , que cuenta el número de páginas, de entre las 2.500 de la muestra, que son eficientes. ¿Qué distribución tiene la variable X ? Calcule la probabilidad de que como mucho 1.299 páginas sean eficientes. Para ello, utilice la aproximación por la distribución normal sin hacer la corrección por continuidad.

3.2. En la muestra de $n = 2.500$ páginas web, se ha obtenido una media muestral del tiempo de carga de $\bar{x} = 2,95$ segundos y una desviación típica muestral de $s = 0,38$ segundos. Construya un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo medio de carga de las páginas web que gestiona la empresa. A partir del intervalo obtenido, ¿qué se puede decir sobre la afirmación de la empresa de que al menos el 50 % de las páginas web que gestiona son eficientes?

3.1. Sea X = el número de páginas web que cargan en menos de 3 segundos de un grupo de 2500. Esta variable es binomial pues las repeticiones son independientes entre si.

Los parámetros de esta variable son n = número de repeticiones = 2500 y p = probabilidad de que una página sea eficiente = 0.5. $X = B(2500, 0.5)$.

Nos piden que calculemos $P(X \leq 1299)$.

Como el número de repeticiones es muy alto calculamos esta probabilidad aproximando la variable binomial X a una variable normal Y de media $np = 2500 \cdot 0.5 = 1250$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 25$. $Y = N(1250, 25)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 1250 > 5$ y $nq = 2500 \cdot 0.5 = 1250 > 5$.

$$P(X \leq 1299) = \{\text{Sin corrección de Yates}\} = P(Y \leq 1299) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 1250}{25} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{1299 - 1250}{25}\right) = P(Z \leq 1.96) = \dots$$

$$\begin{aligned} P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) &= 0.95 \rightarrow P(Z \leq 1.96) - P(Z \leq -1.96) = 0.95 \rightarrow \\ &\rightarrow P(Z \leq 1.96) - P(Z \geq 1.96) = 0.95 \rightarrow P(Z \leq 1.96) - [1 - P(Z \leq 1.96)] = 0.95 \rightarrow \\ &\rightarrow 2P(Z \leq 1.96) - 1 = 0.95 \rightarrow P(Z \leq 1.96) = \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975 \end{aligned}$$

$$\dots = \boxed{0.975}$$

3.2. El tamaño muestral es $n = 2500$. La media muestral es $\bar{x} = 2,95$ segundos.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

Calculamos el error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{0.38}{\sqrt{2500}} = 0.015 \text{ segundos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left[\bar{x} - z_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = [2.95 - 0.015, 2.95 + 0.015] = [2.935, 2.965]$$

¿qué se puede decir sobre la afirmación de la empresa de que al menos el 50 % de las páginas web que gestiona son eficientes?

Es cierta la afirmación pues 2.965 es menor que 3 segundos. Con un nivel de confianza del 95% la media muestral será inferior a 3 segundos. Por lo que, al menos, el 50% de las páginas web cargarán en menos de 3 segundos (serán eficientes).

Ejercicio 4

La siguiente tabla recoge el número de estudiantes de grado (G), máster (M) y doctorado (D) matriculados en las tres facultades —Ciencias (C), Ingeniería (I) y Letras (L)— de una pequeña universidad.

Facultad	Grado (G)	Máster (M)	Doctorado (D)	Total
Ciencias (C)	450	172	41	663
Ingeniería (I)	445	178	45	668
Letras (L)	438	183	48	669
Total	1.333	533	134	2.000

OPCIÓN A

4.1. Si se escoge un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un estudiante de doctorado de la Facultad de Letras?

Si se escoge al azar un estudiante que cursa un máster, ¿cuál es la probabilidad de que estudie en la Facultad de Ingeniería?

4.2. Expresa la información de la tabla (sin los totales) mediante una matriz 3×3 y calcule, utilizando un producto de matrices, el vector con el número total de estudiantes de grado, máster y doctorado de la universidad.

Se sabe que los estudiantes de grado pagan 1.000 € de matrícula; los de máster, 1.500 €, y los de doctorado, 500 €. Mediante un producto de matrices, calcule el importe total que ingresa la universidad en concepto de matrículas.

4.1. Debemos calcular $P(D \cap L)$. Hay 2000 estudiantes en la universidad y 48 son de doctorado de Letras. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar sea un estudiante de doctorado de la Facultad de Letras vale $\frac{48}{2000} = 0.024$.

También se nos pide el cálculo de $P(I / M)$. En la universidad hay 533 estudiantes de Máster y de ellos 178 son de ingeniería. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al escoger un estudiante de máster estudie en la Facultad de Ingeniería vale $\frac{178}{533} \approx 0.334$.

4.2. Consideramos la matriz de la tabla

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Grado} & \text{Máster} & \text{Doctorado} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 T = \begin{pmatrix} 450 & 172 & 41 \\ 445 & 178 & 45 \\ 438 & 183 & 48 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{Ciencias} \\ \rightarrow \text{Ingeniería} \\ \rightarrow \text{Letras} \end{array}
 \end{array}$$

Multiplicamos la matriz fila $(1 \ 1 \ 1)$ por la matriz T.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Grado} & \text{Máster} & \text{Doctorado} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 450 & 172 & 41 \\ 445 & 178 & 45 \\ 438 & 183 & 48 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{Ciencias} \\ \rightarrow \text{Ingeniería} \\ \rightarrow \text{Letras} \end{array} & = (1333 \ 533 \ 134)
 \end{array}$$

$$1 \times \boxed{3 \quad \cdot \quad 3} \times 3 \longrightarrow 1 \times 3$$

La matriz de precios es $\begin{pmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 500 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Grado} \\ \rightarrow \text{Máster} \\ \rightarrow \text{Doctorado} \end{matrix}$. Hacemos el producto de la matriz obtenida con el total de estudiantes de grado, máster y doctorado por la matriz de precios.

Grado Máster Doctorado

↓ ↓ ↓

$$(1333 \quad 533 \quad 134) \begin{pmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 500 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Grado} \\ \rightarrow \text{Máster} \\ \rightarrow \text{Doctorado} \end{matrix} = 1333 \cdot 1000 + 533 \cdot 1500 + 134 \cdot 500 = 2199500 \text{€}$$

Ejercicio 4

La siguiente tabla recoge el número de estudiantes de grado (G), máster (M) y doctorado (D) matriculados en las tres facultades —Ciencias (C), Ingeniería (I) y Letras (L)— de una pequeña universidad.

Facultad	Grado (G)	Máster (M)	Doctorado (D)	Total
Ciencias (C)	450	172	41	663
Ingeniería (I)	445	178	45	668
Letras (L)	438	183	48	669
Total	1.333	533	134	2.000

OPCIÓN B

4.1. Si se escoge un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un estudiante de máster de la Facultad de Ciencias?

Si se escoge al azar un estudiante de la Facultad de Ingeniería, ¿cuál es la probabilidad de que curse un máster?

4.2. Se sabe que, en total, hay 1.036 estudiantes que disfrutan de una beca. También se sabe que, si se consideran conjuntamente los estudiantes de grado y máster, la mitad están becados, y que hay el mismo número de estudiantes becados de máster que de doctorado.

Determine cuántos estudiantes becados hay de cada nivel educativo (grado, máster y doctorado).

4.1. Debemos calcular $P(M \cap C)$. Hay 2000 estudiantes en la universidad y 172 son de máster de la Facultad de Ciencias. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar sea de máster de la Facultad de Ciencias vale $\frac{172}{2000} = 0.086$.

También se nos pide el cálculo de $P(M / I)$. En la universidad hay 668 estudiantes de Ingeniería y de ellos 178 son de máster. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al escoger un estudiante de la Facultad de Ingeniería este curse un máster vale $\frac{178}{668} \approx 0.2665$

4.2. Llamamos g, m y d al número de alumnos becados de grado, máster y doctorado.

Hay 1.036 estudiantes que disfrutan de una beca $\rightarrow g + m + d = 1036$.

Si se consideran conjuntamente los estudiantes de grado y máster, la mitad están becados $\rightarrow$

$$g + m = \frac{1333 + 533}{2}.$$

Hay el mismo número de estudiantes becados de máster que de doctorado $\rightarrow m = d$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} g + m + d = 1036 \\ g + m = \frac{1333 + 533}{2} = 933 \\ m = d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g + d + d = 1036 \\ g + d = 933 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g + 2d = 1036 \\ g = 933 - d \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 933 - d + 2d = 1036 \Rightarrow \boxed{d = 103} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{m = 103} \\ \boxed{g = 933 - 103 = 830} \end{array} \right.$$

Los 1036 estudiantes becados se reparten 830 en grados, 103 en máster y otros 103 en doctorado.