



UNIVERSIDAD
DE MURCIA



Universidad
Politécnica
de Cartagena

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

307 - MATEMÁTICAS CCSS

PAU2026 - JUNIO

NOTA IMPORTANTE: Las dos primeras preguntas son obligatorias. En las preguntas tres y cuatro, debe seleccionar una opción (A o B) y contestar a todos los apartados. Cada cuestión tiene una puntuación de entre 2 y 3 puntos. Se permite una calculadora no gráfica ni programable.

PREGUNTA 1: (3 puntos)

Para celebrar el fin de la PAU, Lorena, Ana y Sofía planean un interrail por Italia. En Roma dudan entre dos rutas en tren: Roma Trastévere–La Giustiniana (ruta 1) y La Giustiniana–Bracciano (ruta 2). Para decidir qué ruta hacer consultan en www.interrail.eu los resultados de un estudio realizado a 2.000 jóvenes, de los cuales 800 eligieron la ruta 1, 1.400 la ruta 2 y 300 hicieron ambas rutas. Seleccionando al azar a uno de estos jóvenes:

- Calcule la probabilidad de que el joven seleccionado haya realizado al menos una de las dos rutas. **[0,25 puntos]**
- Calcule la probabilidad de que no haya hecho ninguna de las dos rutas. **[0,5 puntos]**
- Calcule la probabilidad de que haya hecho únicamente la ruta 1. **[0,5 puntos]**
- Si el joven seleccionado no realizó la ruta 1, calcule la probabilidad de que tampoco haya realizado la ruta 2. **[0,5 puntos]**

El gasto diario por joven en Roma sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica $\sigma=27$ euros. Tomando una muestra aleatoria de 81 jóvenes, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (94,12, 105,88).

- Calcule el nivel de confianza del intervalo y el valor de la media muestral. **[0,75 puntos]**
- ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93,42%? **[0,5 puntos]**

PREGUNTA 2: (3 puntos)

Wiam podrá acceder a una importante cantidad de dinero si consigue desbloquear una caja fuerte con un PIN de cinco dígitos, resolviendo un reto de análisis matemático. Para ello, y dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6}{x - 1}$$

tiene que:

- Calcular el dominio de $f(x)$. **[0,25 puntos]**
- Estudiar la existencia de asíntotas. **[0,5 puntos]**
- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Identificar los extremos relativos utilizando el criterio de la primera derivada. **[0,75 puntos]**
- Escribir la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. **[0,5 puntos]**

Por último:

- Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 2$ y las rectas $y = x$, $x = 0$ y $x = 1$. **[1 punto]**

PREGUNTA 3: (2 puntos)**OPCIÓN A**

Una panadería artesana de Murcia proveerá el pan para The Champions Burger Murcia 2026. Produce dos tipos de panes: el pan Premium y el pan Clásico. Cada hornada de pan Premium genera un beneficio de 900 euros, y cada hornada de pan Clásico, de 700 euros. Una hornada de pan Premium requiere 1 hora de horno, mientras que el pan clásico requiere 2 horas. La panadería tiene disponibles un máximo de 8 horas de horno al día. Por otro lado, cada hornada de pan premium requiere 3 kg de masa madre, y cada hornada de pan clásico, 2 kg. La panadería dispone de un máximo de 12 kg de masa madre preparada diariamente.

Se pide:

- Si la panadería quiere maximizar el beneficio diario, formule el problema identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
- Represente la región factible. **[0,5 puntos]**
- Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**
- ¿Cuántas hornadas de cada tipo de pan debe hacer la panadería para maximizar el beneficio diario? Calcule el beneficio máximo diario. **[0,5 puntos]**
- Justifique razonadamente si la panadería puede hacer 4 hornadas de pan Premium y 2 hornadas de pan Clásico por día. **[0,25 puntos]**

OPCIÓN B

Resuelva el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } f(x, y) = x + y \text{ sujeta a: } \begin{cases} 3x + 2y \geq 12 \\ x + 2y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Represente la región factible. **[0,75 puntos]**
- Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**
- Dibuje la línea de nivel 0 y las líneas de nivel que pasan por los vértices de la región factible. **[0,5 puntos]**
- Identifique el punto de la región factible donde la función objetivo alcanza el mínimo y el valor mínimo de dicha función. **[0,5 puntos]**

PREGUNTA 4: (2 puntos)**OPCIÓN A**

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k & -k \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Averigüe para qué valores de k la matriz A es regular. **[0,5 puntos]**
- Para $k=1$, calcule A^{-1} . **[0,75 puntos]**
- Para $k=1$, resuelva $AX - A = 5(B \cdot C)^t$. **[0,75 puntos]**

OPCIÓN B

Haroun se ha propuesto seguir un plan de entrenamiento mensual que combine rutinas de tres influencers de fitness: Sergio Peinado, Patry Jordán y Coco Constans. En total, deben ser 18 rutinas al mes. Las rutinas de Sergio Peinado incluyen 4 ejercicios de cardio, las de Patry Jordán, 3, y las de Coco Constans, 2. Haroun ha decidido hacer exactamente 59 ejercicios de cardio en total. Además, quiere que el número de rutinas de Sergio Peinado sea el doble que el número de rutinas de Coco Constans.

- a) Plantee un sistema de ecuaciones que nos permita saber cuántas rutinas de cada influencer de fitness debe incluir Juan en su plan de entrenamiento. **[1 punto]**
- b) Resuelva razonadamente el sistema planteado. **[1 punto]**

SOLUCIONES**PREGUNTA 1: (3 puntos)**

Para celebrar el fin de la PAU, Lorena, Ana y Sofía planean un interrail por Italia. En Roma dudan entre dos rutas en tren: Roma Trastévere–La Giustiniana (ruta 1) y La Giustiniana–Bracciano (ruta 2). Para decidir qué ruta hacer consultan en www.interrail.eu los resultados de un estudio realizado a 2.000 jóvenes, de los cuales 800 eligieron la ruta 1, 1.400 la ruta 2 y 300 hicieron ambas rutas. Seleccionando al azar a uno de estos jóvenes:

a) Calcule la probabilidad de que el joven seleccionado haya realizado al menos una de las dos rutas. **[0,25 puntos]**

b) Calcule la probabilidad de que no haya hecho ninguna de las dos rutas. **[0,5 puntos]**

c) Calcule la probabilidad de que haya hecho únicamente la ruta 1. **[0,5 puntos]**

d) Si el joven seleccionado no realizó la ruta 1, calcule la probabilidad de que tampoco haya realizado la ruta 2. **[0,5 puntos]**

El gasto diario por joven en Roma sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 27$ euros. Tomando una muestra aleatoria de 81 jóvenes, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (94,12, 105,88).

e) Calcule el nivel de confianza del intervalo y el valor de la media muestral. **[0,75 puntos]**

f) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93,42%? **[0,5 puntos]**

a) Llamamos A al suceso “elegir ruta 1” y B a “elegir ruta 2”. Por la información proporcionada sabemos que $P(A) = \frac{800}{2000} = \frac{2}{5} = 0.4$, $P(B) = \frac{1400}{2000} = \frac{7}{10} = 0.7$, $P(A \cap B) = \frac{300}{2000} = \frac{3}{20} = 0.15$.

Nos piden calcular $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.7 - 0.15 = \boxed{0.95}$$

b) Debemos calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.95 = \boxed{0.05}$$

c) Debemos calcular $P(A \cap \bar{B})$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0.4 = 0.15 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.4 - 0.15 = 0.25$$

d) Debemos calcular $P(\bar{B} / \bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{1 - P(A)} = \frac{0.05}{1 - 0.4} = \frac{1}{12} \approx 0.8333$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Realizamos una tabla de contingencia.

	Hace ruta 2	No hace ruta 2	
Hace ruta 1	300		800
No hace ruta 1			
	1400		2000

Completamos la tabla.

	Hace ruta 2	No hace ruta 2	
Hace ruta 1	300	500	800
No hace ruta 1	1100	100	1200
	1400	600	2000

Aplicamos la regla de Laplace para obtener las probabilidades pedidas.

- a) De los 2000 jóvenes hay 100 que no han hecho ninguna de las dos rutas y $2000 - 100 = 1900$ que hicieron alguna de las rutas. La probabilidad de que el joven seleccionado haya realizado al menos una de las dos rutas vale $\frac{1900}{2000} = 0.95$.
- b) De los 2000 jóvenes hay 100 que no hicieron ninguna ruta. La probabilidad de que el joven seleccionado no haya hecho ninguna de las dos rutas vale $\frac{100}{2000} = 0.05$.
- c) De los 2000 jóvenes hay 500 que han hecho la ruta 1 y no han hecho la ruta 2. La probabilidad de que el joven seleccionado haya hecho únicamente la ruta 1 vale $\frac{500}{2000} = 0.25$.
- d) De los 1200 jóvenes que no han hecho la ruta 1 hay 100 que tampoco hicieron la ruta 2. La probabilidad de que el joven seleccionado que no hizo la ruta 1 tampoco haya hecho la ruta 2 vale $\frac{100}{1200} = \frac{1}{12} \approx 0.8333$.

Seguimos con el resto del ejercicio.

- e) Consideramos $X = \text{"El gasto diario por joven en Roma"}$. $X = N(\mu, 27)$.

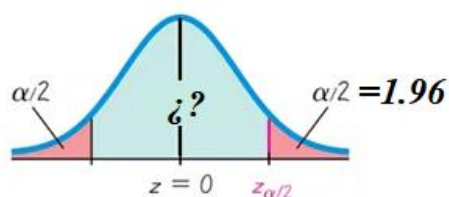
Tamaño de la muestra = $n = 81$. Como el intervalo de confianza es (94,12, 105,88) el error del intervalo es la mitad de su amplitud $Error = \frac{105.88 - 94.12}{2} = 5.88$.

Aplicamos la fórmula del error para obtener el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$\left. \begin{array}{l} Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ Error = 5.88 \\ n = 81 \\ \sigma = 27 \end{array} \right\} \Rightarrow 5.88 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{27}{\sqrt{81}} \Rightarrow 5.88 = z_{\alpha/2} \cdot 3 \Rightarrow \boxed{z_{\alpha/2} = \frac{5.88}{3} = 1.96}$$

Obtenemos el valor del nivel de confianza $1 - \alpha$.

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.95}$$



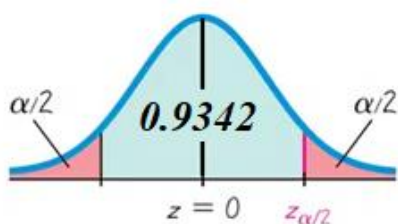
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9712	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

El nivel de confianza es del 95 %.

f) Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 93.42%.

$$1 - \alpha = 0.9342 \Rightarrow \alpha = 0.0658 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0329 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9671 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.84$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678
1.9	0.9712	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744

El tamaño de la muestra es $n = 100$. Calculamos el error máximo admisible.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.84 \cdot \frac{27}{\sqrt{100}} = 1.84 \cdot 2.7 = 4.968$$

El error máximo admisible es de 4.968 euros.

PREGUNTA 2: (3 puntos)

Wiam podrá acceder a una importante cantidad de dinero si consigue desbloquear una caja fuerte con un PIN de cinco dígitos, resolviendo un reto de análisis matemático. Para ello, y dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6}{x - 1}$$

tiene que:

a) Calcular el dominio de $f(x)$. [0,25 puntos]

b) Estudiar la existencia de asíntotas. [0,5 puntos]

c) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Identificar los extremos relativos utilizando el criterio de la primera derivada. [0,75 puntos]

d) Escribir la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. [0,5 puntos]

Por último:

e) Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 2$ y las rectas $y = x$, $x = 0$ y $x = 1$. [1 punto]

a) La función es racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) **Asíntotas verticales** $x = a$.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 6}{x - 1} = \frac{2 \cdot 1^2 + 6}{1 - 1} = \frac{8}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + \frac{6}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{2 + 0}{0 - 0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 6}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2 + \frac{6}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 6}{x - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6 - 2x^2 + 2x}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{6}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2 + \frac{6}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2$$

La recta $y = 2x + 2$ es asíntota oblicua de la función.

c) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x \cdot (x-1) - 1 \cdot (2x^2 + 6)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 6}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 6}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 4x - 6}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1=x} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x = -1$ y $x = 3$. Estudiamos el signo antes, entre y después de estos valores y el valor excluido del dominio $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 6}{(-2-1)^2} = \frac{10}{9} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 6}{(0-1)^2} = -6 < 0$.

La función decrece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 6}{(2-1)^2} = -6 < 0$.

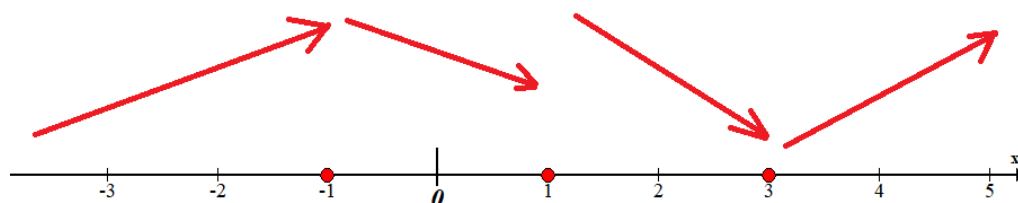
La función decrece en $(1, 3)$.

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 6}{(4-1)^2} = \frac{10}{9} > 0$.

La función crece en $(3, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

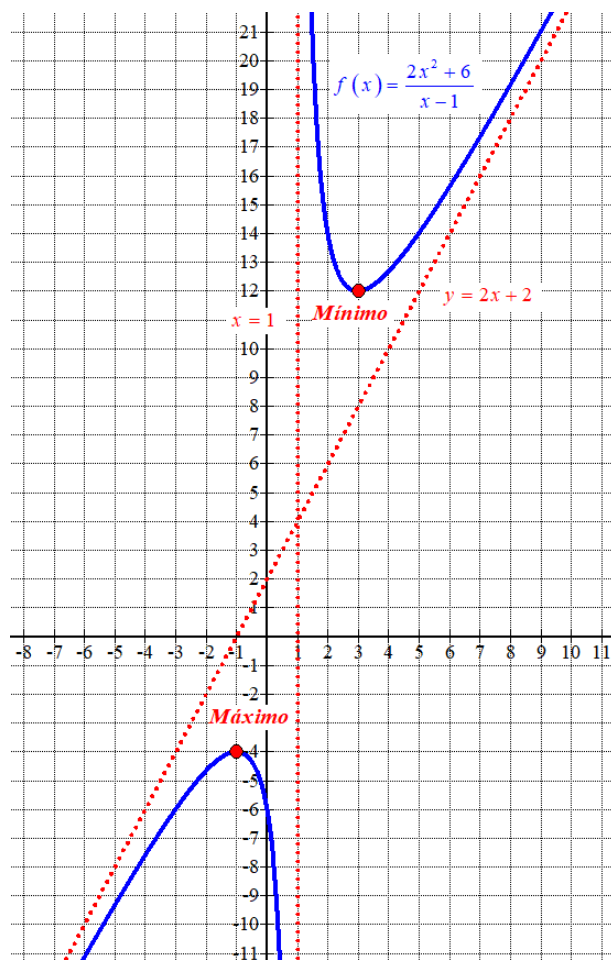
La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

Como $f(-1) = \frac{2 \cdot (-1)^2 + 6}{-1-1} = \frac{8}{-2} = -4$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, -4)$.

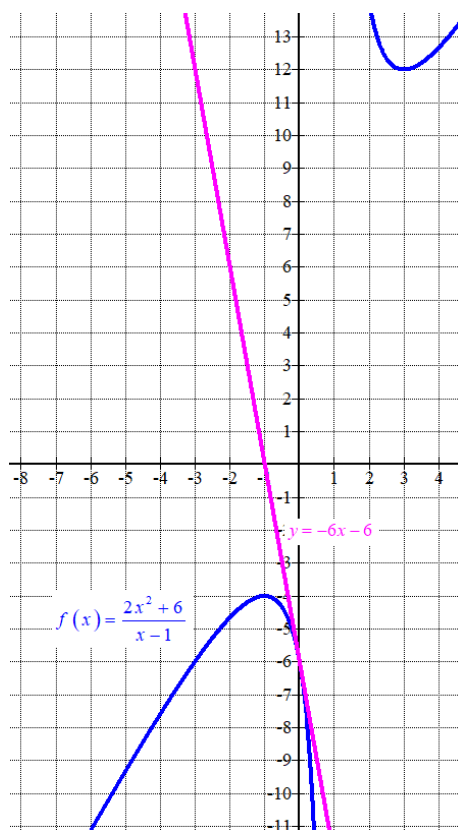
Como $f(3) = \frac{2 \cdot 3^2 + 6}{3-1} = \frac{12}{2} = 12$ el mínimo relativo tiene coordenadas (3, 12).



- d) La recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$\left. \begin{aligned} y - f(0) &= f'(0)(x - 0) \\ f(0) &= \frac{2 \cdot 0^2 + 6}{0 - 1} = -6 \\ f'(0) &= \frac{2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 6}{(0 - 1)^2} = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - (-6) = -6x \Rightarrow \boxed{y = -6x - 6}$$

La recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación $y = -6x - 6$.



e) Hallamos los puntos de corte entre la curva $y = x^2 + 2$ y la recta $y = x$.

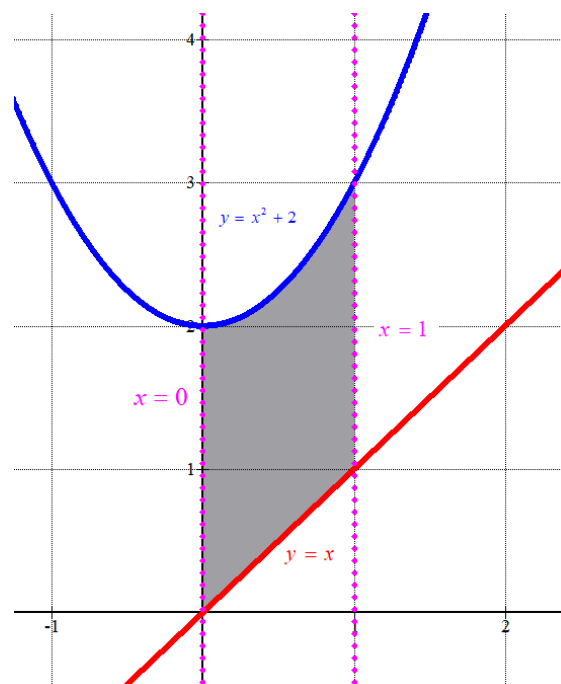
$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 + 2 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \text{¡No existe!}$$

No hay puntos de corte y el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 2$ y las rectas $y = x$, $x = 0$ y $x = 1$ es el valor absoluto de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia entre la curva $y = x^2 + 2$ y la recta $y = x$.

$$\text{Área} = \int_0^1 x^2 + 2 - x dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} = \frac{2 + 12 - 3}{6} = \frac{11}{6} \approx 1.8333 u^2$$



PREGUNTA 3: (2 puntos)**OPCIÓN A**

Una panadería artesana de Murcia proveerá el pan para The Champions Burger Murcia 2026. Produce dos tipos de panes: el pan Premium y el pan Clásico. Cada hornada de pan Premium genera un beneficio de 900 euros, y cada hornada de pan Clásico, de 700 euros. Una hornada de pan Premium requiere 1 hora de horno, mientras que el pan clásico requiere 2 horas. La panadería tiene disponibles un máximo de 8 horas de horno al día. Por otro lado, cada hornada de pan premium requiere 3 kg de masa madre, y cada hornada de pan clásico, 2 kg. La panadería dispone de un máximo de 12 kg de masa madre preparada diariamente.

Se pide:

- Si la panadería quiere maximizar el beneficio diario, formule el problema identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
- Represente la región factible. **[0,5 puntos]**
- Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**
- ¿Cuántas hornadas de cada tipo de pan debe hacer la panadería para maximizar el beneficio diario? Calcule el beneficio máximo diario. **[0,5 puntos]**
- Justifique razonadamente si la panadería puede hacer 4 hornadas de pan Premium y 2 hornadas de pan Clásico por día. **[0,25 puntos]**

- a) Llamamos “x” a las hornadas de pan Premium al día e “y” a las hornadas de pan Clásico. Realizamos una tabla con los datos del problema

	Horas de horno	Kg de masa madre	Beneficio
Nº hornadas Premium (x)	x	3x	900x
Nº hornadas Clásico (y)	2y	2y	700y
TOTALES	x + 2y	3x + 2y	900x + 700y

La función que queremos maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x, y) = 900x + 700y$.

Las restricciones son las siguientes.

La panadería dispone de un máximo de 12 kg de masa madre preparada diariamente $\rightarrow 3x + 2y \leq 12$

La panadería tiene disponibles un máximo de 8 horas de horno al día $\rightarrow x + 2y \leq 8$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 8 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$3x + 2y = 12$$

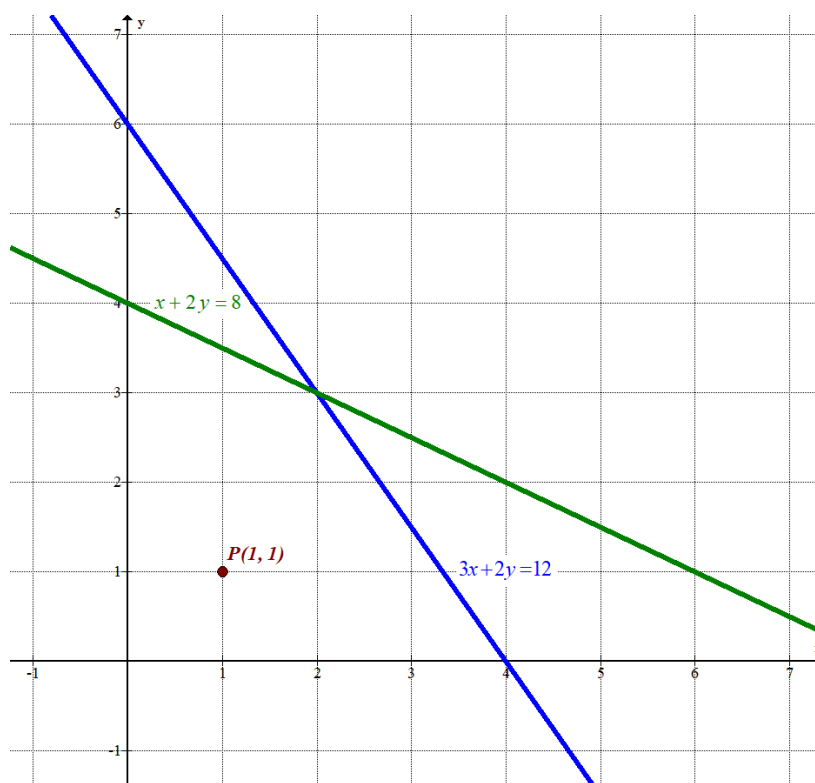
x	$y = \frac{12 - 3x}{2}$
0	6
2	3
4	0

$$x + 2y = 8$$

x	$y = \frac{8 - x}{2}$
0	4
2	3
8	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

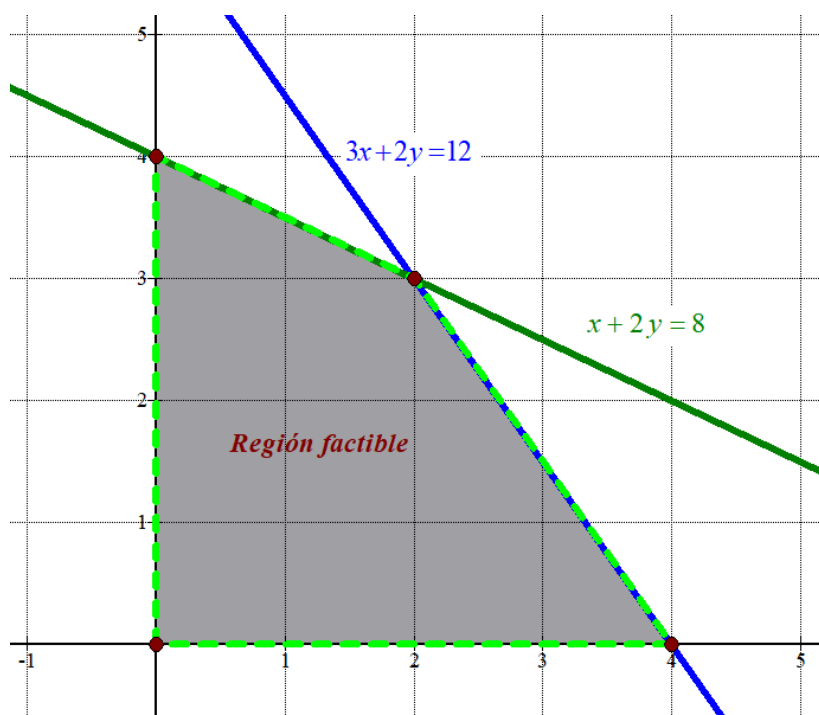
Primer
cuadrante



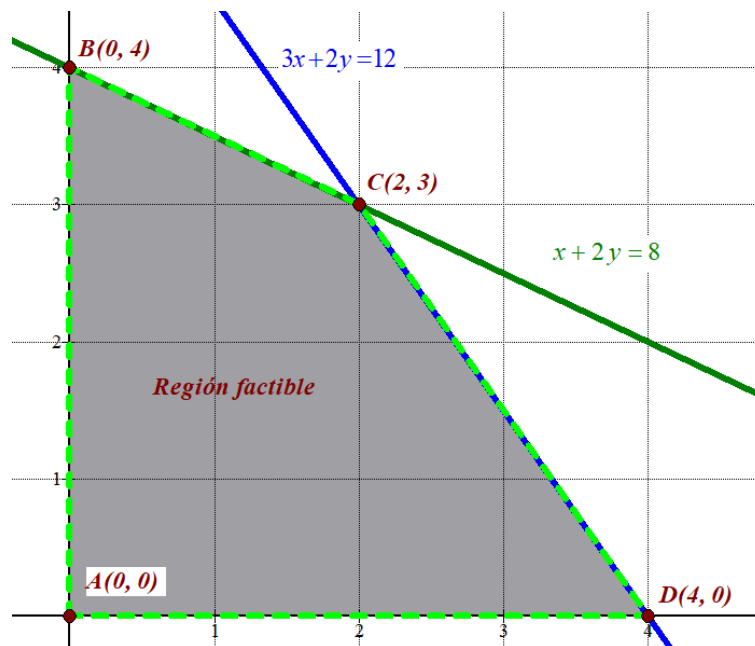
La región factible está situada en el primer cuadrante por debajo de las rectas oblicuas azul y verde. Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2 \cdot 1 \leq 8 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \leq 12 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



- c) Las coordenadas de los vértices se pueden obtener del dibujo y de las tablas de valores que hemos elaborado. Los vértices de la región factible son $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(2, 3)$ y $D(4, 0)$.



- d) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 900x + 700y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 4) \rightarrow B(0, 4) = 900 \cdot 0 + 700 \cdot 4 = 2800$$

$$C(2, 3) \rightarrow B(2, 3) = 900 \cdot 2 + 700 \cdot 3 = 3900 \text{ Máximo}$$

$$D(4, 0) \rightarrow B(4, 0) = 900 \cdot 4 + 700 \cdot 0 = 3600$$

El valor máximo es 3900 y se alcanza en el vértice $C(2, 3)$.

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 3900 euros con 2 hornadas de pan Premium y 3 de pan Clásico.

PREGUNTA 3: (2 puntos)**OPCIÓN B**

Resuelva el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } f(x, y) = x + y \text{ sujeta a: } \begin{cases} 3x + 2y \geq 12 \\ x + 2y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Represente la región factible. **[0,75 puntos]**

b) Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**

c) Dibuje la línea de nivel 0 y las líneas de nivel que pasan por los vértices de la región factible. **[0,5 puntos]**

d) Identifique el punto de la región factible donde la función objetivo alcanza el mínimo y el valor mínimo de dicha función. **[0,5 puntos]**

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$3x + 2y = 12$$

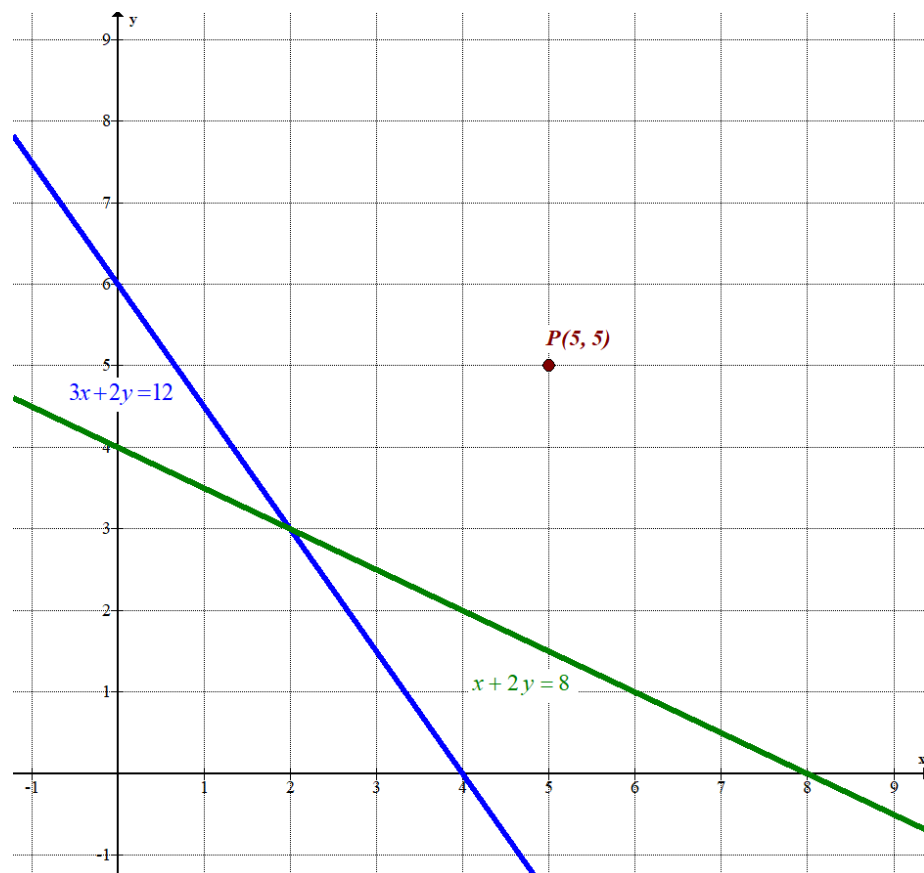
x	y = $\frac{12-3x}{2}$
0	6
2	3
4	0

$$x + 2y = 8$$

x	y = $\frac{8-x}{2}$
0	4
2	3
8	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

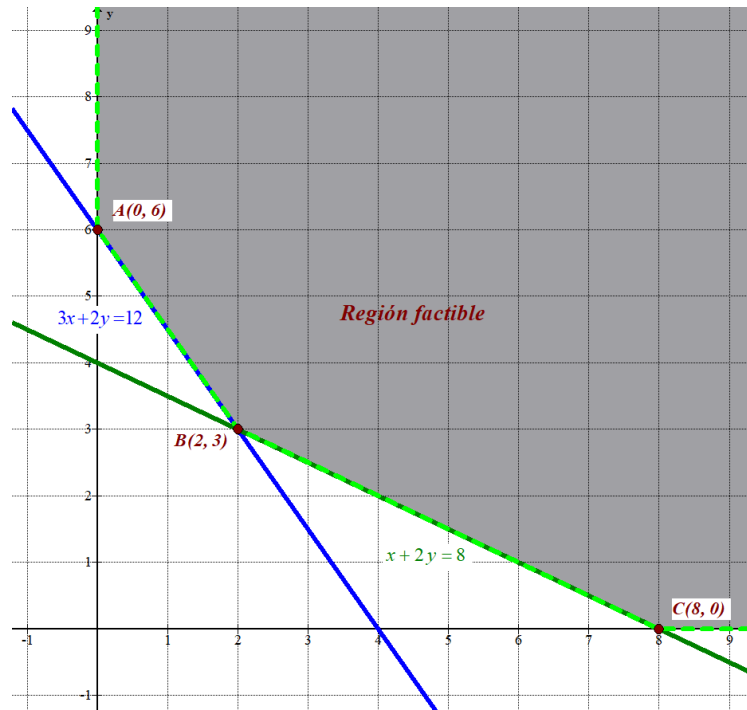
Primer
cuadrante



La región factible está situada en el primer cuadrante por encima de las rectas oblicuas azul y verde. Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 + 2 \cdot 5 \geq 8 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \geq 12 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



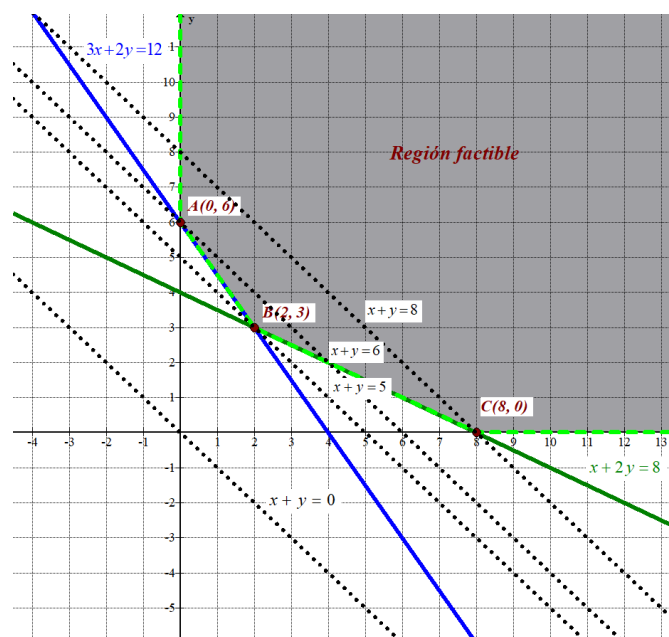
b) Las coordenadas de los vértices se pueden obtener del dibujo y de la tabla de valores que hemos elaborado. Los vértices de la región factible son A(0, 6), B(2, 3) y C(8, 0).

c) La recta de nivel 0 tiene ecuación $x + y = 0$. Las que pasan por los vértices son:

$$A(0, 6) \rightarrow x + y = 0 + 6 = 6$$

$$B(2, 3) \rightarrow x + y = 2 + 3 = 5$$

$$C(8, 0) \rightarrow x + y = 8 + 0 = 8$$



- d) Observando las tres rectas de nivel que pasan por los vértices el valor mínimo de la función es 5, pues la recta de nivel que pasa por el punto B(2, 3) es la más baja.
También podemos decidir el valor mínimo de la función y el punto donde se alcanza valorando la función $f(x, y) = x + y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo. También valoramos la función en un punto lejano, por ejemplo D(100, 100).

$$A(0, 6) \rightarrow f(0, 6) = 0 + 6 = 6$$

$$B(2, 3) \rightarrow f(2, 3) = 2 + 3 = 5 \text{ Mínimo}$$

$$C(8, 0) \rightarrow f(8, 0) = 8 + 0 = 8$$

$$D(100, 100) \rightarrow f(100, 100) = 100 + 100 = 200$$

El valor mínimo es 5 y se alcanza en el vértice B(2, 3).

PREGUNTA 4: (2 puntos)**OPCIÓN A**

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k & -k \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Averigüe para qué valores de k la matriz A es regular. **[0,5 puntos]**b) Para $k=1$, calcule A^{-1} . **[0,75 puntos]**c) Para $k=1$, resuelva $AX - A = 5(B \cdot C)^t$. **[0,75 puntos]**a) La matriz A es regular si su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & k & -k \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 - \cancel{k} - 0 - k + \cancel{k} - 0 = 6 - k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 6 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 6}$$

La matriz A es regular para cualquier valor de k distinto de 6.b) Para $k=1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y es invertible. Hallamos su matriz inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}}{6-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4-1 \\ -(-4+4) & -6+1 & -(-12+2) \\ 1 & 1 & -3-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz inversa de } A \text{ es } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Para $k=1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y es invertible. Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX - A = 5(B \cdot C)^t \Rightarrow A(X - I) = 5(B \cdot C)^t \Rightarrow X - I = A^{-1}(5(B \cdot C)^t) \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(5(B \cdot C)^t) + I}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0 & 0+1 & 1-1 \\ 0+0 & 0-2 & 0+2 \\ 2+0 & 0+0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$

$$(B \cdot C)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 5(B \cdot C)^t = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 10 \\ 5 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(5(B \cdot C)^t) = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & 0 & 10 \\ 5 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2+0 & 0-4-10 & 4+0+5 \\ 0-5+0 & 0+10+20 & 0+0-10 \\ -2+1+0 & 0-2-10 & 2+0+5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(5(B \cdot C)^t) = \begin{pmatrix} -2 & -14 & 9 \\ -5 & 30 & -10 \\ -1 & -12 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}(5(B \cdot C)^t) + I = \begin{pmatrix} -2 & -14 & 9 \\ -5 & 30 & -10 \\ -1 & -12 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -14 & 9 \\ -5 & 31 & -10 \\ -1 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -1 & -14 & 9 \\ -5 & 31 & -10 \\ -1 & -12 & 8 \end{pmatrix}$.

PREGUNTA 4: (2 puntos)**OPCIÓN B**

Haroun se ha propuesto seguir un plan de entrenamiento mensual que combine rutinas de tres influencers de fitness: Sergio Peinado, Patry Jordán y Coco Constans. En total, deben ser 18 rutinas al mes. Las rutinas de Sergio Peinado incluyen 4 ejercicios de cardio, las de Patry Jordán, 3, y las de Coco Constans, 2. Haroun ha decidido hacer exactamente 59 ejercicios de cardio en total. Además, quiere que el número de rutinas de Sergio Peinado sea el doble que el número de rutinas de Coco Constans.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que nos permita saber cuántas rutinas de cada influencer de fitness debe incluir Juan en su plan de entrenamiento. **[1 punto]**

b) Resuelva razonadamente el sistema planteado. **[1 punto]**

a) Llamamos “x” al número de rutinas de Sergio Peinado que debe hacer Juan, “y” al número de rutinas de Patry Jordán y “z” al número de rutinas de Coco Constans.

Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada en el ejercicio.

En total, deben ser 18 rutinas al mes $\rightarrow x + y + z = 18$.

Las rutinas de Sergio Peinado incluyen 4 ejercicios de cardio, las de Patry Jordán, 3, y las de Coco Constans, 2. Haroun ha decidido hacer exactamente 59 ejercicios de cardio en total $\rightarrow 4x + 3y + 2z = 59$.

Quiere que el número de rutinas de Sergio Peinado sea el doble que el número de rutinas de Coco Constans $\rightarrow x = 2z$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ 4x + 3y + 2z = 59 \\ x = 2z \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ 4x + 3y + 2z = 59 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 18 \\ 8z + 3y + 2z = 59 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 18 \\ 3y + 10z = 59 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 18 - 3z \\ 3y + 10z = 59 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(18 - 3z) + 10z = 59 \Rightarrow 54 - 9z + 10z = 59 \Rightarrow \boxed{z = 5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 2 \cdot 5 = 10} \\ \boxed{y = 18 - 3 \cdot 5 = 3} \end{array} \right.$$

Juan debe hacer 10 rutinas de Sergio Peinado, 3 de Patry Jordán y 5 de Coco Constans.