

CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

- Este examen consta de CUATRO problemas. En los problemas TERCERO y CUARTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas de examen.
- Las respuestas deben estar escritas con bolígrafo azul o negro (excepto, quizás, las gráficas). No pueden usarse ni lápiz ni bolígrafo borrable.
- El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
- Cuando un problema consta de varios apartados, la puntuación correspondiente a cada uno de ellos aparece reflejada en el enunciado del examen.
- En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.
- En el cuaderno de examen deberán figurar todas las operaciones y cálculos necesarios para la resolución de cada problema. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas ya que, si solo aparece la solución, sin ningún tipo de explicación, el problema tendrá una puntuación de cero puntos.
- Se penalizará con 0,5 puntos la falta de homogeneidad en el uso de las unidades de medida a lo largo de la resolución de un problema.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN de cada uno de los problemas

PROBLEMA 1. (2 puntos)

- (a) **0,75 puntos.**
- Concretar la función objetivo: **0,25 puntos.**
 - Determinar las restricciones: **0,5 puntos.**
- (b) Dibujar la región factible: **0,75 puntos.**
- (c) **0,5 puntos.**
- Valorar la función en los vértices: **0,25 puntos.**
 - Determinar el máximo: **0,25 puntos.**

PROBLEMA 2. (3 puntos)

- (a) **0,75 puntos.**
- Expresar matemáticamente los datos del problema: **0,25 puntos.**
 - Calcular la probabilidad solicitada: **0,5 puntos.**
- (b) **0,75 puntos.**
- Indicar la probabilidad condicionada solicitada: **0,25 puntos.**
 - Indicar la fórmula del principio de inclusión-exclusión o el diagrama equivalente: **0,25 puntos.**
 - Calcular la probabilidad condicionada: **0,25 puntos.**
- (c) **0,5 puntos.**
- Indicar la probabilidad solicitada: **0,25 puntos.**
 - Calcular la probabilidad solicitada: **0,25 puntos.**
- (d) **1 punto.**
- Plantear el problema: **0,5 puntos.**
 - Calcular la probabilidad pedida: **0,5 puntos.**

PROBLEMA 3. (3 puntos)

OPCIÓN 3A

(a) **1,5 puntos.**

- Calcular los puntos de corte: **0,5 puntos.**
- Representar las funciones: **0,75 puntos.**
- Determinar el recinto: **0,25 puntos.**

(b) **1,5 puntos.**

- Determinar la integral definida A_1 : **0,5 puntos.**
- Calcular A_1 : **0,25 puntos.**
- Determinar la integral definida A_2 : **0,5 puntos.**
- Calcular A_2 : **0,25 puntos.**

OPCIÓN 3B

(a) **1 punto.**

- Calcular la primera y segunda derivada: **0,25 puntos.**
- Obtener los valores que anulan la primera derivada: **0,25 puntos.**
- Determinar el mínimo relativo: **0,25 puntos.**
- Determinar la cantidad mínima: **0,25 puntos.**

(b) **0,5 puntos.**

- Analizar los signos de la primera derivada: **0,25 puntos.**
- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento: **0,25 puntos.**

(c) **0,5 puntos.**

- Obtener el valor que anula la segunda derivada y comprobar que la tercera derivada no se anula en él: **0,25 puntos.**
- Determinar el punto de inflexión: **0,25 puntos.**

(d) **1 punto.**

- Determinar la pendiente de la recta: **0,25 puntos.**
- Determinar el punto de tangencia: **0,5 puntos.**
- Escribir la recta tangente: **0,25 puntos.**

PROBLEMA 4. (2 puntos)

OPCIÓN 4A

- (a) Demostrar que el determinante es distinto de 0: **0,5 puntos**.
- (b) **1,5 puntos**.
- Calcular B^{-1} : **0,5 puntos**.
 - Calcular A^2 : **0,25 puntos**.
 - Calcular X : **0,75 puntos**.

OPCIÓN 4B

- (a) **1 punto**.
- Calcular el determinante de la matriz de coeficientes y obtener el valor del parámetro que lo anula: **0,25 puntos**.
 - Discutir el sistema según el valor del parámetro: **0,75 puntos**.
- (b) **1 punto**.
- Resolver para $k \neq -7$: **0,25 puntos**.
 - Resolver para $k = -7$: **0,75 puntos**.

SOLUCIONES

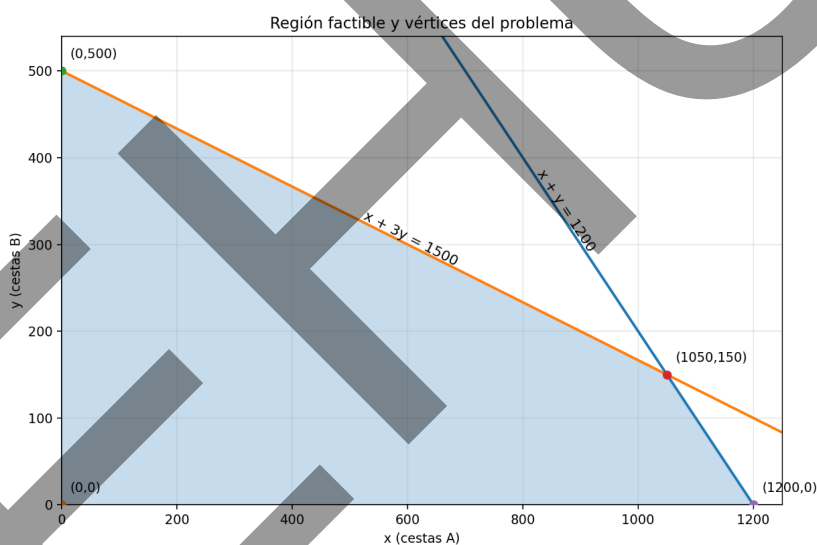
PROBLEMA 1. Sea x el número de cestas de tipo A y sea y el número de cestas de tipo B.

(a) La función objetivo es: $f(x, y) = 20x + 30y$.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 2400 \Leftrightarrow x + y \leq 1200 \\ x + 3y \leq 1500 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

(b) La región factible es:



Los vértices de la región factible son: $(0, 0)$, $(1200, 0)$, $(1050, 150)$ y $(0, 500)$.

(c) La función objetivo evaluada en cada vértice es: $f(0, 0) = 0$, $f(1200, 0) = 24000$, $f(1050, 150) = 25500$ y $f(0, 500) = 15000$.

Se tendrán que preparar 1050 cestas de tipo A y 150 de tipo B.

El beneficio será de 25500 euros.

PROBLEMA 2. Se definen los sucesos A = “leer novelas” y B = “leer cómics”.

(a) Los datos son: $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,4$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2$.

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

(b) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(A)} = \frac{0,7 + 0,4 - 0,8}{0,7} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7} = 0,4286.$

(c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,3 = 0,4.$

(d) Planteamiento del problema:

Se define la variable aleatoria X = “número de jóvenes que leen cómics de entre los 600 elegidos”. Esta variable es $X \sim B(600, 0,4)$. Se puede aproximar X por $X' \sim N(240, 12)$.

Se pide $P(228 < X < 270)$. Para calcular esta probabilidad tipificamos la variable X' : $Z = \frac{X' - 240}{12}$.

Sin corrección: $P(228 < X < 270) = P(228 < X' < 270) = P(-1 < Z < 2,5) = P(Z < 2,5) - P(Z < -1) = P(Z < 2,5) - (1 - P(Z < 1)) = 0,9938 - 1 + 0,8413 = 0,8351.$

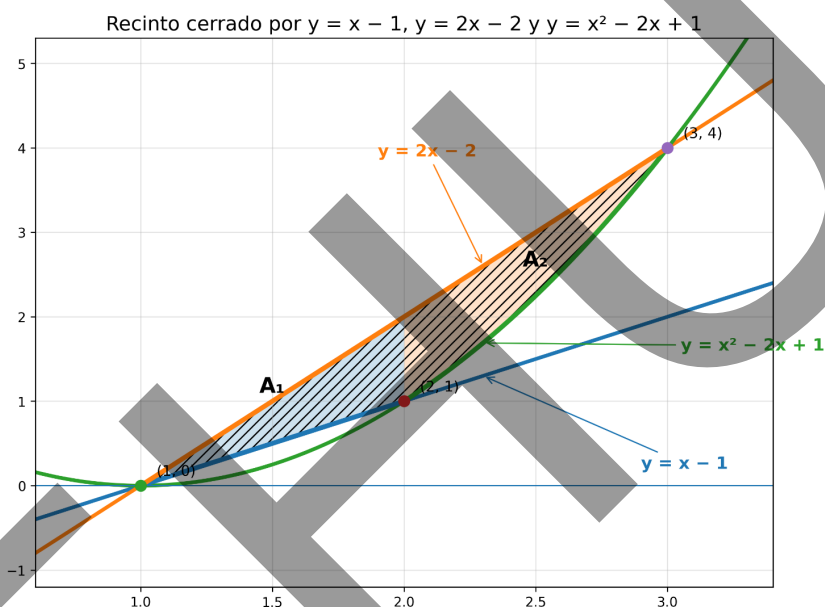
Con corrección: $P(228 < X < 270) = P(228,5 \leq X' \leq 269,5) = P(-0,96 \leq Z \leq 2,46) = P(Z \leq 2,46) - P(Z \leq -0,96) = P(Z \leq 2,46) - (1 - P(Z \leq 0,96)) = 0,9931 - 1 + 0,8315 = 0,8246.$

PROBLEMA 3.

(OPCIÓN 3A)

(a) Los puntos de corte son: $(1, 0)$, $(2, 1)$ y $(3, 4)$.

La representación gráfica es:



$$b) A_1 = \int_1^2 (2x - 2 - (x - 1)) dx = \frac{1}{2} u^2.$$

$$A_2 = \int_2^3 (2x - 2 - (x^2 - 2x + 1)) dx = \frac{2}{3} u^2.$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{7}{6} u^2.$$

(OPCIÓN 3B)

- (a) La primera y segunda derivadas de $f(t)$ son $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1$ y $f''(t) = 6t - 4$, respectivamente.

Se cumple que $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ o $t = 1$.

Además, $f''(\frac{1}{3}) = -2$ y $f''(1) = 2$. Así, $(1, 0)$ es un mínimo relativo.

Por lo tanto, la máquina consume en $t = 1$ la menor cantidad de agua. Y esa cantidad es $f(1) = 0$.

- (b) $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1 = 3(t - \frac{1}{3})(t - 1)$. Así, $f'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (0, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$ y $f'(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (\frac{1}{3}, 1)$.

Por lo tanto, $f(t)$ crece en $(0, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$ y decrece en $(\frac{1}{3}, 1)$.

- (c) $f''(t) = 6t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$. Además, $f'''(t) = 6 \neq 0$. Por lo tanto, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{27})$ es el punto de inflexión.

- (d) La pendiente de la recta $y - \frac{7}{4}t = 5$ es $\frac{7}{4}$.

Se cumple que $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}$ o $t = \frac{3}{2}$.

El intervalo de definición de $f(t)$ es $(0, \infty)$ por lo que consideramos solo $t = \frac{3}{2}$. Se cumple que $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{8}$. Por lo tanto, el punto de tangencia es $(\frac{3}{2}, \frac{3}{8})$.

Así, la recta tangente a $f(t)$ paralela a $y - \frac{7}{4}t = 5$ es $y - \frac{3}{8} = \frac{7}{4}(t - \frac{3}{2})$. Escrita de otra forma, $y = \frac{7}{4}t - \frac{9}{4}$.

PROBLEMA 4.

(OPCIÓN 4A)

(a) $\det B = 2$ luego la matriz B es invertible.

(b) $BX - A = A^2 \Leftrightarrow X = B^{-1}(A^2 + A)$.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 + A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(OPCIÓN 4B)

(a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -k & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se cumple que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$. Por lo tanto, el sistema es compatible.

Además, $\det A = 6k + 42$ que se anula en $k = -7$. Entonces, $\text{ran}(A) = 3 \Leftrightarrow k \neq -7$.

En resumen, si $k \neq -7$ el sistema es compatible determinado y si $k = -7$ el sistema es compatible indeterminado.

(b) Si $k \neq -7$ entonces $(0, 0, 0)$ es la única solución del sistema.

Si $k = -7$, las soluciones son $(\lambda, 2\lambda, 5\lambda)$ para cualquier número real λ .