



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: ORDINÀRIA 2026	CONVOCATORIA: ORDINARIA 2026
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se ha de contestar un problema del apartado 1, un problema del apartado 2 y el problema del apartado 3. En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una de ellas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Apartado 1. Responde **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4XB + C^t D = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C . (2 puntos)
- b) Una matriz A se dice que es idempotente si $A^2 = A$. Consideramos la matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Determina para qué valores de z la matriz FC es idempotente. (1,5 puntos)

Problema 1. B. Una granja desea crear una mezcla fertilizante líquida utilizando dos compuestos comerciales, NutriMax y BioGrow. Cada litro de estos compuestos aporta diferentes cantidades de unidades de nitrógeno, fósforo y potasio. Para que el cultivo sea productivo, los agrónomos han determinado que se deben aplicar al terreno como mínimo 8 unidades de nitrógeno, 6 unidades de fósforo y 10 unidades de potasio. Se sabe que un litro de NutriMax contiene 2 unidades de nitrógeno, 1 unidad de fósforo y 1 unidad de potasio, mientras que un litro de BioGrow contiene 1 unidad de nitrógeno, 1 unidad de fósforo y 2 unidades de potasio. El coste de un litro de NutriMax es de 5 euros y el de BioGrow es de 4 euros.

- a) ¿Cuántos litros de cada producto han de utilizarse para que el coste de la mezcla sea mínimo? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? (0,5 puntos)

Apartado 2. Responde **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 2. A. El valor de mercado de una empresa (en millones de euros) depende del tiempo t (en años) y viene dado por la función:

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ ct + \frac{b}{t^2} & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

- Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c . (1 punto)
- La empresa ha tenido tres gerentes, el primero cuando $t \in [0,1]$, el segundo cuando $t \in (1,2]$ y el tercero cuando $t \in (2,4]$. Determina si con todos los gerentes el valor de mercado ha ido creciendo. (1 punto)
- Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos para el valor de mercado. (0,5 puntos)
- El salario de un gerente al año es cien mil veces la integral de la función g durante el período que ha estado. Calcula el salario del primer gerente. (1 punto)

Problema 2. B. Cierta empresa tecnológica ofrece servicio de almacenamiento de datos en la nube. Sus ingresos I (en unidades monetarias) dependen de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $I(x) = 400x$, y su función de gastos G (en unidades monetarias) depende también de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $G(x) = 4x^2 + 100$.

- Calcula la cantidad de datos que maximiza el beneficio (ingresos menos gastos), e indica cuál es el beneficio máximo que puede obtener la empresa. (1 punto)
- El ratio ingresos/gastos mide la eficiencia financiera de la empresa. Calcula la cantidad de datos para los cuales la eficiencia financiera de la empresa es máxima, e indica cuál es esa eficiencia máxima. (1,5 puntos)
- Calcula $\int_0^2 G(x)^2 dx$ (1 punto)

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado.

Problema 3. En una empresa de pinturas se sabe que hay tres tipos de empleados: becarios, aprendices y maestros. El 50% de los empleados son becarios y el 35% aprendices. Entre los becarios, el 80% tiene estudios superiores y entre los maestros tan solo el 15% no tiene estudios superiores. Se sabe que el 79% de los empleados de la empresa tiene estudios superiores. Seleccionamos al azar un empleado de esta empresa.

- Calcula la probabilidad de que el empleado seleccionado tenga estudios superiores y sea aprendiz. (1 punto)
- Si sabemos que el empleado no tiene estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que sea aprendiz? (1 punto)
- Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "el empleado seleccionado es aprendiz o becario" y "el empleado seleccionado tiene estudios superiores o es aprendiz". (1 punto)

Soluciones

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4XB + C^t D = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C . (2 puntos)

b) Una matriz A se dice que es idempotente si $A^2 = A$. Consideramos la matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Determina para qué valores de z la matriz FC es idempotente. (1,5 puntos)

a) Comprobamos que la matriz B es invertible y calculamos su inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{10} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial y hallamos su expresión.

$$4XB + C^t D = I \Rightarrow 4XB = I - C^t D \Rightarrow XB = \frac{1}{4}(I - C^t D) \Rightarrow X = \frac{1}{4}(I - C^t D)B^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - C^t D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+0+1 & -1+0+3 \\ 0-2+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I - C^t D)B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3-4 & -1-8 \\ 6+2 & 2+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}(I - C^t D)B^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/40 & -9/40 \\ 1/5 & 3/20 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -7/40 & -9/40 \\ 1/5 & 3/20 \end{pmatrix}$.

b) Determinamos la expresión de la matriz FC.

$$FC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+1+0 \\ 0+0+z & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz FC sea idempotente debe cumplirse $(FC)^2 = FC$.

$$(FC)^2 = FC \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+z & 1+0 \\ z+0 & z+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1+z=1 \\ z=0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \boxed{z=0}$$

Para $z=0$ la matriz FC es idempotente.

Problema 1. B. Una granja desea crear una mezcla fertilizante líquida utilizando dos compuestos comerciales, NutriMax y BioGrow. Cada litro de estos compuestos aporta diferentes cantidades de unidades de nitrógeno, fósforo y potasio. Para que el cultivo sea productivo, los agrónomos han determinado que se deben aplicar al terreno como mínimo 8 unidades de nitrógeno, 6 unidades de fósforo y 10 unidades de potasio. Se sabe que un litro de NutriMax contiene 2 unidades de nitrógeno, 1 unidad de fósforo y 1 unidad de potasio, mientras que un litro de BioGrow contiene 1 unidad de nitrógeno, 1 unidad de fósforo y 2 unidades de potasio. El coste de un litro de NutriMax es de 5 euros y el de BioGrow es de 4 euros.

a) ¿Cuántos litros de cada producto han de utilizarse para que el coste de la mezcla sea mínimo?

(3 puntos)

b) ¿Cuál es dicho coste mínimo?

(0,5 puntos)

a) Llamamos x = litros de NutriMax en la mezcla e y = litros de BioGrow en la mezcla.

Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Nitrógeno	Fósforo	Potasio	Coste
Litros de NutriMax (x)	$2x$	x	x	$5x$
Litros de BioGrow (y)	y	y	$2y$	$4y$
TOTALES	$2x + y$	$x + y$	$x + 2y$	$5x + 4y$

La función objetivo que deseamos minimizar es el coste $C(x, y) = 5x + 4y$.

Las restricciones son:

“Se deben aplicar al terreno como mínimo 8 unidades de nitrógeno, 6 unidades de fósforo y 10 unidades de potasio” $\rightarrow 2x + y \geq 8$; $x + y \geq 6$; $x + 2y \geq 10$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 8 \\ x + y \geq 6 \\ x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$2x + y = 8$$

$$x + y = 6$$

$$x + 2y = 10$$

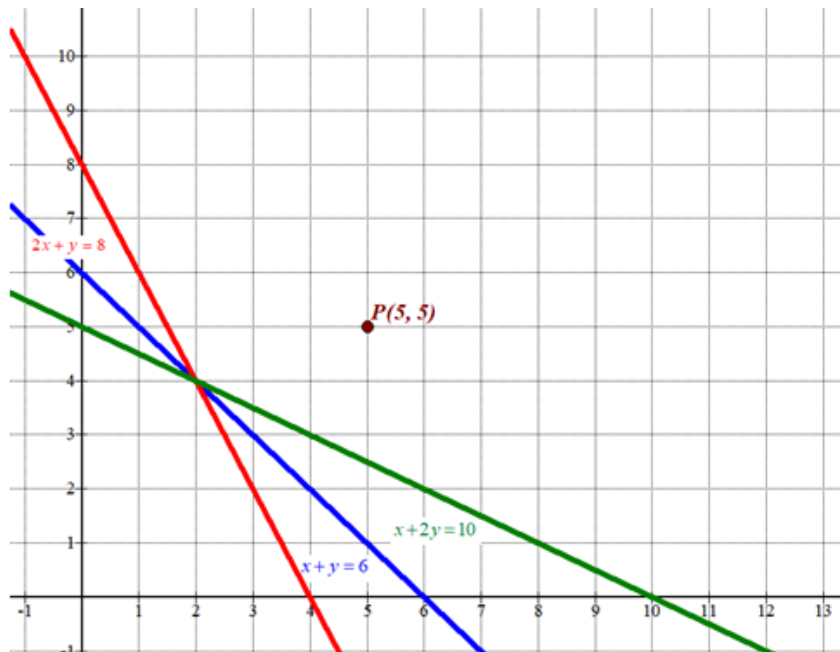
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 8 - 2x$
0	8
2	4
8	0

x	$y = 6 - x$
0	6
2	4
6	0

x	$y = \frac{10 - x}{2}$
0	5
2	4
10	0

Primer
cuadrante

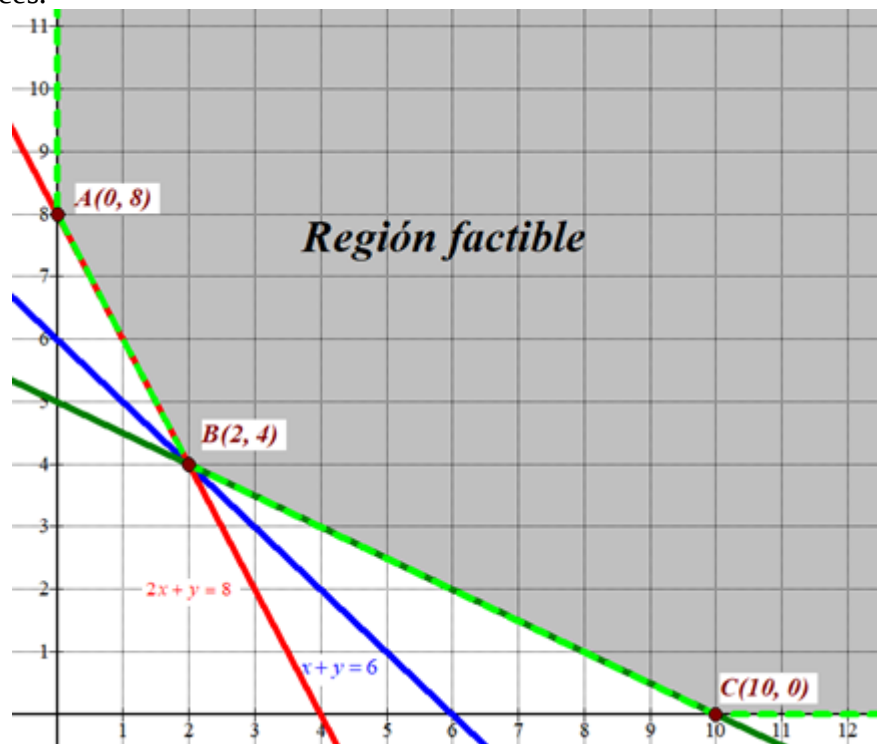


Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 8 \\ x + y \geq 6 \\ x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de las rectas azul, roja y verde. Comprobamos que el punto } P(5, 5) \text{ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 5 + 5 \geq 8 \\ 5 + 5 \geq 6 \\ 5 + 2 \cdot 5 \geq 10 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(0, 8); B(2, 4) y C(10, 0).

Valoramos la función objetivo $C(x, y) = 5x + 4y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

$$A(0, 8) \rightarrow C(0, 8) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 8 = 32$$

$$B(2, 4) \rightarrow C(2, 4) = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = \mathbf{26 \text{ Mínimo}}$$

$$C(10, 0) \rightarrow C(10, 0) = 5 \cdot 10 + 4 \cdot 0 = 50$$

El valor mínimo de la función coste se obtiene en el vértice B(2, 4). Se han de utilizar 2 litros de NutriMax y 4 de BioGrow para que el coste tenga un valor mínimo de 26 euros.

b) El mínimo coste es de 26 €.

Problema 2. A. El valor de mercado de una empresa (en millones de euros) depende del tiempo t (en años) y viene dado por la función:

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ ct + \frac{b}{t^2} & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

- a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c . (1 punto)
- b) La empresa ha tenido tres gerentes, el primero cuando $t \in [0,1]$, el segundo cuando $t \in (1,2]$ y el tercero cuando $t \in (2,4]$. Determina si con todos los gerentes el valor de mercado ha ido creciendo. (1 punto)
- c) Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos para el valor de mercado. (0,5 puntos)
- d) El salario de un gerente al año es cien mil veces la integral de la función g durante el período que ha estado. Calcula el salario del primer gerente. (1 punto)

a) La función debe ser continua en $t = 1$.

$$\left. \begin{aligned} g(1) &= 1^2 + 2 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} t^2 + 2 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{a}{t} + 2 = \frac{a}{1} + 2 = a + 2 \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = g(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

La función queda $g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{t} + 2 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ ct + \frac{b}{t^2} & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$.

La función debe ser continua en $t = 2$.

$$\left. \begin{aligned} g(2) &= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \\ \lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{1}{t} + 2 = \frac{5}{2} \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} ct + \frac{b}{t^2} = 2c + \frac{b}{2^2} = 2c + \frac{b}{4} \\ \lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) = g(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c + \frac{b}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow 8c + b = 10 \Rightarrow \boxed{b = 10 - 8c}$$

La función es derivable en $[0,4] - \{1,2\}$, siendo su derivada $g'(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ \frac{-1}{t^2} & \text{si } 1 < t < 2 \\ c - \frac{2b}{t^3} & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$.

Nos dicen que $g'(3) = 23/27$.

$$\left. \begin{aligned} g'(3) &= \frac{23}{27} \\ g'(3) &= c - \frac{2b}{3^3} = c - \frac{2b}{27} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c - \frac{2b}{27} = \frac{23}{27} \Rightarrow \boxed{c = \frac{23+2b}{27}}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{23+2b}{27} \\ b &= 10-8c \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = \frac{23+2(10-8c)}{27} = \frac{23+20-16c}{27} = \frac{43-16c}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27c = 43-16c \Rightarrow 43c = 43 \Rightarrow \boxed{c=1} \Rightarrow \boxed{b=10-8 \cdot 1=2}$$

Los valores buscados son $a=1$, $b=2$, $c=1$.

b) La función queda $g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{t} + 2 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ t + \frac{2}{t^2} & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$ y su derivada en $[0,4] - \{1,2\}$ es

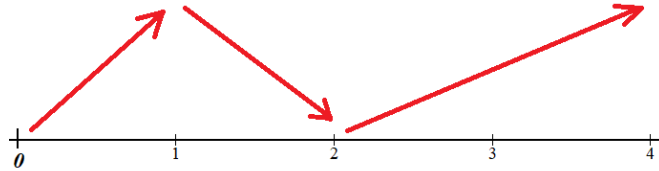
$$g'(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ \frac{-1}{t^2} & \text{si } 1 < t < 2 \\ 1 - \frac{4}{t^3} & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases} \text{ . Estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo.}$$

- En $[0,1)$ la derivada es $g'(t) = 2t$. Esta derivada es positiva en el intervalo $[0,1)$. La función crece en $[0,1)$.
- En $(1,2)$ la derivada es $g'(t) = \frac{-1}{t^2}$. Esta derivada es negativa en el intervalo $(1,2)$. La función decrece en $(1,2)$.
- En $(2,4]$ la derivada es $g'(t) = 1 - \frac{4}{t^3}$. Esta derivada es positiva en el intervalo $(2,4]$. La función crece en $(2,4]$.

$$t > 2 \rightarrow t^3 > 2^3 \rightarrow \frac{1}{t^3} < \frac{1}{8} \rightarrow \frac{4}{t^3} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{4}{t^3} > -\frac{1}{2} \rightarrow 1 - \frac{4}{t^3} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Solo es decreciente en el intervalo $(1, 2)$. Falló el segundo gerente.

c) La función es continua y sabemos que sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $t = 1$ y un mínimo relativo en $t = 2$. Calculamos el valor de la función en 0, 1, 2 y 4 para determinar donde se alcanza el mínimo y máximo absolutos.

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= 0^2 + 2 = 2 \text{ Mínimo} \\ g(1) &= 1^2 + 2 = 3 \\ g(2) &= \frac{1}{2} + 2 = 2.5 \\ g(4) &= 4 + \frac{2}{4^2} = 4.125 \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

La función tiene un máximo absoluto para $t = 4$ y un mínimo absoluto para $t = 0$.

d) Calculamos $\int_0^1 g(t) dt$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) dt &= \int_0^1 t^2 + 2 dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right] - \left[\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0 \right] = \\ &= \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} \approx 2.33333333 \end{aligned}$$

El sueldo del primer gerente es de $100000 \cdot 2.33333333 = 233\,333.333$ euros.

Problema 2. B. Cierta empresa tecnológica ofrece servicio de almacenamiento de datos en la nube. Sus ingresos I (en unidades monetarias) dependen de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $I(x) = 400x$, y su función de gastos G (en unidades monetarias) depende también de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $G(x) = 4x^2 + 100$.

- a) Calcula la cantidad de datos que maximiza el beneficio (ingresos menos gastos), e indica cuál es el beneficio máximo que puede obtener la empresa. (1 punto)
- b) El ratio ingresos/gastos mide la eficiencia financiera de la empresa. Calcula la cantidad de datos para los cuales la eficiencia financiera de la empresa es máxima, e indica cuál es esa eficiencia máxima. (1,5 puntos)
- c) Calcula $\int_0^2 G(x)^2 dx$ (1 punto)

a) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$B(x) = I(x) - G(x) = 400x - (4x^2 + 100) = -4x^2 + 400x - 100$$

Derivamos esta función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$B(x) = -4x^2 + 400x - 100 \Rightarrow B'(x) = -8x + 400$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -8x + 400 = 0 \Rightarrow 8x = 400 \Rightarrow x = \frac{400}{8} = 50$$

Sustituimos el valor obtenido en la segunda derivada para saber si es máximo o mínimo.

$$B'(x) = -8x + 400 \Rightarrow B''(x) = -8 \Rightarrow B''(50) = -8 < 0$$

Para $x = 50$ la primera derivada se anula y la segunda es negativa. La función presenta un máximo relativo para este valor. Los beneficios son máximos para un almacenamiento de 50 terabytes.

Como $B(50) = -4 \cdot 50^2 + 400 \cdot 50 - 100 = 9900$ los ingresos máximos que se pueden conseguir son 9900 euros.

- b) Obtenemos la expresión de la eficiencia financiera de la empresa $E(x) = \frac{I(x)}{G(x)}$.

$$E(x) = \frac{I(x)}{G(x)} = \frac{400x}{4x^2 + 100} = \frac{100x}{x^2 + 25}$$

Derivamos esta función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$E(x) = \frac{100x}{x^2 + 25} \Rightarrow E'(x) = \frac{100(x^2 + 25) - 2x \cdot 100x}{(x^2 + 25)^2} = \frac{100x^2 + 2500 - 200x^2}{(x^2 + 25)^2} = \frac{2500 - 100x^2}{(x^2 + 25)^2}$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2500 - 100x^2}{(x^2 + 25)^2} = 0 \Rightarrow 2500 - 100x^2 = 0 \Rightarrow 25 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=5$.

- En el intervalo $(0,5)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

$$E'(1) = \frac{2500 - 100 \cdot 1^2}{(1^2 + 25)^2} = \frac{2400}{26^2} > 0. \text{ La función crece en } (0,5).$$

- En el intervalo $(5, +\infty)$ tomamos $x=10$ y la derivada vale

$$E'(10) = \frac{2500 - 100 \cdot 10^2}{(10^2 + 25)^2} = \frac{-7500}{125^2} < 0. \text{ La función decrece en } (5, +\infty).$$

Antes de $x=5$ la función crece y después decrece. La función presenta un máximo para $x=5$.

Como $E(5) = \frac{100 \cdot 5}{5^2 + 25} = 10$ la eficiencia financiera alcanza un valor máximo de 10 para un almacenamiento de 5 terabytes.

c) Calculamos la integral pedida.

$$\int_0^2 G(x)^2 dx = \int_0^2 (4x^2 + 100)^2 dx = \int_0^2 16x^4 + 10000 + 2 \cdot 4x^2 \cdot 100 dx =$$

$$= \int_0^2 16x^4 + 10000 + 800x^2 dx = \left[16 \frac{x^5}{5} + 10000x + 800 \frac{x^3}{3} \right]_0^2 =$$

$$= \left[16 \frac{2^5}{5} + 10000 \cdot 2 + 800 \frac{2^3}{3} \right] - \left[16 \frac{0^5}{5} + 10000 \cdot 0 + 800 \frac{0^3}{3} \right] =$$

$$= \frac{512}{5} + 20000 + \frac{6400}{3} = \boxed{\frac{333536}{15} \simeq 22235.7333}$$

Problema 3. En una empresa de pinturas se sabe que hay tres tipos de empleados: becarios, aprendices y maestros. El 50% de los empleados son becarios y el 35% aprendices. Entre los becarios, el 80% tiene estudios superiores y entre los maestros tan solo el 15% no tiene estudios superiores. Se sabe que el 79% de los empleados de la empresa tiene estudios superiores. Seleccionamos al azar un empleado de esta empresa.

- Calcula la probabilidad de que el empleado seleccionado tenga estudios superiores y sea aprendiz. (1 punto)
- Si sabemos que el empleado no tiene estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que sea aprendiz? (1 punto)
- Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "el empleado seleccionado es aprendiz o becario" y "el empleado seleccionado tiene estudios superiores o es aprendiz". (1 punto)

Llamamos B a "ser becario", A a "ser aprendiz", M a "ser maestro" y S a "tener estudios superiores". Sabemos que: $P(B) = 0.5$, $P(A) = 0.35$, $P(M) = 1 - 0.5 - 0.35 = 0.15$,

$$P(S/B) = 0.80, P(S/M) = 1 - 0.15 = 0.85.$$

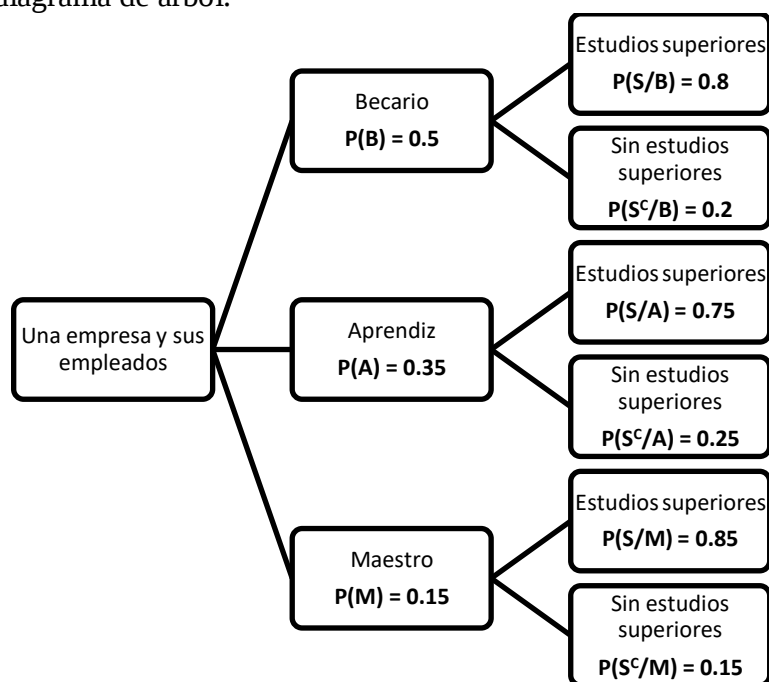
Hallamos el valor de $P(S/A)$ partiendo de que $P(S) = 0.79$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = 0.79 \Rightarrow P(B)P(S/B) + P(A)P(S/A) + P(M)P(S/M) = 0.79 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 \cdot 0.8 + 0.35P(S/A) + 0.15 \cdot 0.85 = 0.79 \Rightarrow 0.4 + 0.35P(S/A) + 0.1275 = 0.79 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.35P(S/A) = 0.2625 \Rightarrow P(S/A) = \frac{0.2625}{0.35} = 0.75$$

Realizamos un diagrama de árbol.



- Debemos calcular $P(S \cap A)$.

$$P(S \cap A) = P(A)P(S/A) = 0.35 \cdot 0.75 = \boxed{0.2625}$$

- b) Debemos calcular $P(A/S^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/S^c) = \frac{P(A \cap S^c)}{P(S^c)} = \frac{P(A)P(S^c/A)}{1 - P(S)} = \frac{0.35 \cdot 0.25}{1 - 0.79} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4167}$$

- c) La intersección de los sucesos "el empleado seleccionado es aprendiz o becario" y "el empleado seleccionado tiene estudios superiores o es aprendiz" es "El empleado es aprendiz o es un becario con estudios superiores."

Como los dos sucesos son incompatibles pues no tienen nada en común esta probabilidad es la suma de las probabilidades de ser aprendiz o ser becario con estudios superiores.

La probabilidad pedida es $P(A \cup (B \cap S))$.

$$P(A \cup (B \cap S)) = P(A) + P(B \cap S) = P(A) + P(B)P(S/B) = 0.35 + 0.5 \cdot 0.8 = \boxed{0.75}$$

OTRA FORMA DE CALCULARLO.

Pasamos los datos porcentuales a valores absolutos. Suponemos que la empresa tiene 10000 empleados. En la empresa son becarios $0.5 \cdot 10000 = 5000$ empleados y $0.35 \cdot 10000 = 3500$ son aprendices. De los becarios $0.8 \cdot 5000 = 4000$ tienen estudios superiores. De los aprendices $0.75 \cdot 3500 = 2625$ tienen estudios superiores. Hacemos una tabla de contingencia.

	Becario	Aprendiz	TOTALES
Estudios superiores	4000	2625	
Sin estudios superiores			
	5000	3500	8500

Completamos la tabla.

	Becario	Aprendiz	TOTALES
Estudios superiores	4000	2625	6625
Sin estudios superiores	1000	875	1875
	5000	3500	8500

En la intersección de los sucesos "el empleado seleccionado es aprendiz o becario" y "el empleado seleccionado tiene estudios superiores o es aprendiz" están los 3500 aprendices y los 4000 becarios con estudios superiores.

La probabilidad pedida vale $\frac{3500 + 4000}{10000} = \boxed{0.75}$