



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- Duración: 1 hora y 30 minutos**
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Se proporciona la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Una ventana tiene forma de rectángulo y esta coronada por un semicírculo. Sabiendo que el perímetro de la ventana mide 8 metros, halla las dimensiones de la ventana que permitan la mayor entrada de luz.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(2, m, 1)$, $C(3, 4, 2)$ y $D(1, -1, m)$.

- [1,5 puntos]** Halla los valores de m para los cuales los puntos anteriores son coplanarios.
- [1 punto]** Para $m=1$, calcula el área del triángulo de vértices A, B, C y el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D.

PARTE OPTATIVA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Considera el sistema
$$\begin{cases} 3x - y = a^2 \\ (1-a)y + 2z = 0 \\ 4y + (3-a)z = a-5 \end{cases}.$$

- [1,75 puntos]** Discútelo según los valores de a .
- [0,75 puntos]** Para $a=0$ resuelve el sistema, si es posible.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$ que cumple $|A| = -2$.

a) [1,5 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix}$.

b) [1 punto] Calcula $|A^{-1}(A^t)^2 A|$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

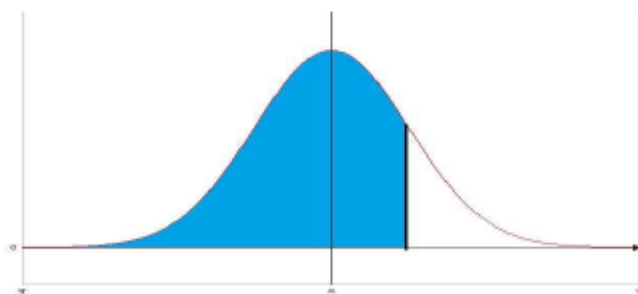
Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1 + e^x}$, halla la primitiva de f cuya gráfica tiene por tangente a la recta $y = 2x + 12 \ln(2)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
(Sugerencia: puedes hacer el cambio $e^x = t$)

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Disponemos de dos bolsas con monedas de oro y monedas de plata. En la primera hay 2 monedas de oro y 3 monedas de plata. En la segunda hay 6 monedas de oro y 3 de plata. Sin mirar, extraemos una moneda al azar de la primera bolsa y la depositamos en la segunda bolsa. Luego extraemos una moneda de la segunda bolsa.

- a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro, sabiendo que la moneda que se extrajo de la primera bolsa era de plata.
- b) [1,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la moneda que se extrajo de la primera bolsa fuera de plata, sabiendo que la segunda moneda es de oro.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0, 1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

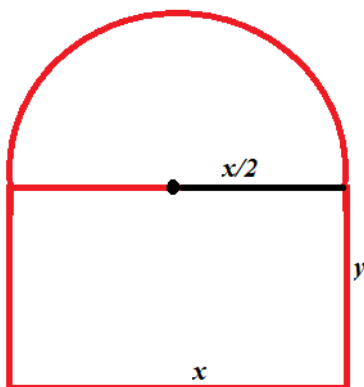
SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Una ventana tiene forma de rectángulo y esta coronada por un semicírculo. Sabiendo que el perímetro de la ventana mide 8 metros, halla las dimensiones de la ventana que permitan la mayor entrada de luz.



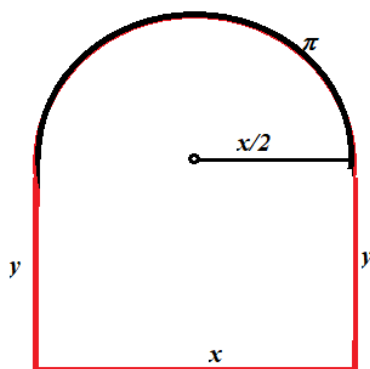
Hallamos el área de la ventana. Debemos maximizar dicha área.



La superficie de la ventana es la suma del área del rectángulo más la mitad del área del círculo de radio $x/2$.

$$A(x, y) = xy + \frac{\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xy + \frac{\pi x^2}{8}$$

Hallamos la relación entre x e y utilizando que el perímetro de la ventana es de 8 metros.



$$\left. \begin{aligned} \text{Perímetro} &= 8 \\ \text{Perímetro} &= 2y + x + \frac{2\pi \frac{x}{2}}{2} = 2y + x + \frac{\pi x}{2} = 2y + \frac{(2 + \pi)x}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2y + \frac{(2 + \pi)x}{2} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y + (2 + \pi)x = 16 \Rightarrow 4y = 16 - (2 + \pi)x \Rightarrow \boxed{y = \frac{16}{4} - \frac{2 + \pi}{4}x = 4 - \frac{2 + \pi}{4}x}$$

Con lo que la superficie de la ventana queda:

$$\left. \begin{array}{l} y = 4 - \frac{2+\pi}{4}x \\ A(x, y) = xy + \frac{\pi x^2}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x \left(4 - \frac{2+\pi}{4}x \right) + \frac{\pi x^2}{8} = 4x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = 4x - \frac{4+2\pi}{8}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} = 4x + \frac{(-4-2\pi+\pi)x^2}{8} = 4x + \frac{(-4-\pi)x^2}{8} = 4x - \frac{4+\pi}{8}x^2$$

La superficie de la ventana tiene la expresión $A(x) = 4x - \frac{4+\pi}{8}x^2$.

Hallamos los valores que anulan su derivada (puntos críticos).

$$A(x) = 4x - \frac{4+\pi}{8}x^2 \Rightarrow A'(x) = 4 - \frac{4+\pi}{4}x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \Rightarrow \frac{4+\pi}{4}x = 4 \Rightarrow (4+\pi)x = 16 \Rightarrow \boxed{x = \frac{16}{\pi+4}}$$

Sustituimos $x = \frac{16}{\pi+4}$ en la segunda derivada.

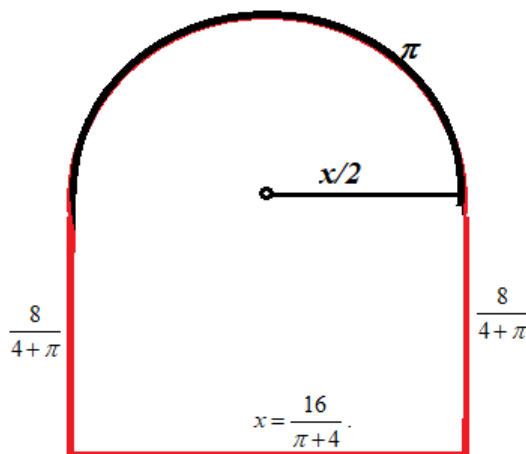
$$A'(x) = 4 - \frac{4+\pi}{4}x \Rightarrow A''(x) = -\frac{4+\pi}{4} \Rightarrow A''\left(\frac{16}{\pi+4}\right) = -\frac{4+\pi}{4} < 0$$

En $x = \frac{16}{\pi+4}$ la primera derivada se anula y la segunda toma valor negativo. Podemos

afirmar que el área es máxima para $x = \frac{16}{\pi+4}$.

Para este valor tenemos que $y = 4 - \frac{2+\pi}{4} \cdot \frac{16}{\pi+4} = 4 - 4 \frac{2+\pi}{4+\pi} = \frac{16+4\pi-8-4\pi}{4+\pi} = \frac{8}{4+\pi}$.

Las dimensiones de la ventana que permiten la mayor entrada de luz son:



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(2, m, 1)$, $C(3, 4, 2)$ y $D(1, -1, m)$.

- a) **[1,5 puntos]** Halla los valores de m para los cuales los puntos anteriores son coplanarios.
 b) **[1 punto]** Para $m=1$, calcula el área del triángulo de vértices A , B , C y el volumen del tetraedro de vértices A , B , C , D .

a) Hallamos la ecuación del plano π definido por los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 0) \\ B(2, m, 1) \\ C(3, 4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, m, 1) - (1, 2, 0) = (1, m-2, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 2) - (1, 2, 0) = (2, 2, 2) \rightarrow \vec{u} = (1, 1, 1) \\ A(1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & m-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (m-2)(x-1) + y-2 + z - (m-2)z - y + 2 - x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mx - m - 2x + 2 + \cancel{y} - \cancel{y} + z - mz + 2z - \cancel{y} + \cancel{y} - x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : (m-3)x + (3-m)z + 3 - m = 0$$

Para que los puntos A , B , C y D sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : (m-3)x + (3-m)z + 3 - m = 0 \\ D(1, -1, m) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow (m-3) \cdot 1 + (3-m)m + 3 - m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m - \cancel{3} + 3m - m^2 + \cancel{3} - m = 0 \Rightarrow 3m - m^2 = 0 \Rightarrow m(3-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=3 \end{cases}$$

Para $m=0$ y $m=3$ los cuatro puntos son coplanarios.

- b) Para $m=1$ los puntos quedan $A(1, 2, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, 4, 2)$. El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 0) \\ B(2, 1, 1) \\ C(3, 4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1, 1) - (1, 2, 0) = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 2) - (1, 2, 0) = (2, 2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2i + 2j + 2k + 2k - 2j - 2i = -4i + 4k = (-4, 0, 4)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \boxed{2\sqrt{2} \approx 2.83u^2}$$

Para $m=1$ los cuatro puntos quedan $A(1,2,0)$, $B(2,1,1)$, $C(3,4,2)$ y $D(1,-1,1)$. Los cuatro puntos no pertenecen al mismo plano y el tetraedro existe. El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$

$$\left. \begin{array}{l} A(1,2,0) \\ B(2,1,1) \\ C(3,4,2) \\ D(1,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,1,1) - (1,2,0) = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (3,4,2) - (1,2,0) = (2,2,2) \\ \overrightarrow{AD} = (1,-1,1) - (1,2,0) = (0,-3,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 6 - 0 + 2 + 6 = 4.$$

$$\text{Volumen } ABCD = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} u^3$$

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Considera el sistema
$$\begin{cases} 3x - y = a^2 \\ (1-a)y + 2z = 0 \\ 4y + (3-a)z = a-5 \end{cases}.$$

a) [1,75 puntos] Discútelo según los valores de a .

b) [0,75 puntos] Para $a = 0$ resuelve el sistema, si es posible.

a) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 4 & 3-a \end{pmatrix}$ y la matriz

ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3-a & a-5 \end{pmatrix}.$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 4 & 3-a \end{vmatrix} = 3(1-a)(3-a) - 0 + 0 - 0 - 0 - 24 = 3(3-a-3a+a^2) - 24 =$$

$$= 9 - 12a + 3a^2 - 24 = 3a^2 - 12a - 15 = 3(a^2 - 4a - 5)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3(a^2 - 4a - 5) = 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{4+6}{2} = \boxed{5=a} \\ \frac{4-6}{2} = \boxed{-1=a} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 5$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz de

coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta

de quitar la fila y columna terceras tenemos que su determinante es no nulo y el rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la segunda columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -36 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de la matriz A. El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a = 5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz de

coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta

de quitar la fila y columna terceras tenemos que su determinante es no nulo y el rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12 \neq 0$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que la cuarta columna

es proporcional a la primera, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 2. El rango de la matriz A y la matriz A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a \neq -1$ y $a \neq 5$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = 5$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución)

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 4y + 3z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ y = -2z \\ 4y + 3z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 4(-2z) + 3z = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ -8z + 3z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ -5z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ \boxed{z = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 0 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow \boxed{x = \frac{-2}{3}} \\ \boxed{y = -2 \cdot 1 = -2} \end{cases}$$

La solución es $x = \frac{-2}{3}$, $y = -2$, $z = 1$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$ que cumple $|A| = -2$.

a) [1,5 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix}$.

b) [1 punto] Calcula $|A^{-1}(A^t)^2 A|$.

a) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos 4 factor común} \\ \text{en la tercera fila} \end{array} \right\} = 4 \begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{El determinante no cambia de valor} \\ \text{si le sumamos a la 2ª fila la 3ª fila} \end{array} \right\} = 4 \begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos -1 factor común} \\ \text{en la primera fila} \end{array} \right\} = (-1)4 \begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{El determinante cambia de signo} \\ \text{si intercambiamos la 2ª y la 1ª fila} \end{array} \right\} =$$

$$= (-1)4(-1) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 3 & 4 & \alpha \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{El determinante cambia de signo} \\ \text{si intercambiamos la 2ª y la 3ª fila} \end{array} \right\} =$$

$$= (-1)4(-1)(-1) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = \{|A| = -2\} = (-1)4(-1)(-1)(-2) = \boxed{8}$$

b) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$|A^{-1}(A^t)^2 A| = |A^{-1} A^t A^t A| = \left\{ \begin{array}{l} \text{El determinante de un producto} \\ \text{de matrices es igual al producto} \\ \text{de los determinantes de cada matriz} \end{array} \right\} = |A^{-1}| \cdot |A^t| \cdot |A^t| \cdot |A| =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \\ |A^t| = |A| \end{array} \right\} = \frac{1}{|A|} \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^2 = (-2)^2 = \boxed{4}$$

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1+e^x}$, halla la primitiva de f cuya gráfica tiene por tangente a la recta $y = 2x + 12\ln(2)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

(Sugerencia: puedes hacer el cambio $e^x = t$)

Calculo la primitiva de la función.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1+e^x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \\
 &= \int \frac{8t - 4t^2}{1+t} \frac{dt}{t} = \int \frac{(8-4t) \cancel{t}}{1+t} \frac{dt}{\cancel{t}} = \int \frac{8-4t}{1+t} dt = \int \frac{12-4-4t}{1+t} dt = \\
 &= \int \frac{12}{1+t} dt + \int \frac{-4-4t}{1+t} dt = 12 \int \frac{1}{1+t} dt - 4 \int \frac{1+t}{1+t} dt = 12 \int \frac{1}{1+t} dt - 4 \int 1 dt = \\
 &= 12 \ln|1+t| - 4t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \end{array} \right\} = 12 \ln(1+e^x) - 4e^x + K
 \end{aligned}$$

La primitiva de la función es $F(x) = 12 \ln(1+e^x) - 4e^x + K$.

Si la gráfica de la primitiva tiene por tangente a la recta $y = 2x + 12\ln(2)$ en el punto de abscisa $x = 0$ significa que la primitiva pasa por $(0, 2 \cdot 0 + 12\ln(2)) \rightarrow F(0) = 12\ln(2)$.

Determinamos el valor de K para que se cumpla $F(0) = 12\ln(2)$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = 12 \ln(1+e^x) - 4e^x + K \\ F(0) = 12 \ln(2) \end{array} \right\} \Rightarrow 12 \ln(\cancel{1+e^0}) - 4e^0 + K = \cancel{12 \ln(2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K - 4 = 0 \Rightarrow K = 4 \Rightarrow \boxed{F(x) = 12 \ln(1+e^x) - 4e^x + 4}$$

Comprobamos que la pendiente de la recta tangente a la primitiva en $x = 0$ vale 2, es decir, que la derivada de la primitiva que es la función $f(x)$ vale 2 para $x = 0 \rightarrow f(0) = 2$.

$$F'(0) = f(0) = \frac{8e^0 - 4e^{2 \cdot 0}}{1+e^0} = \frac{8-4}{1+1} = 2$$

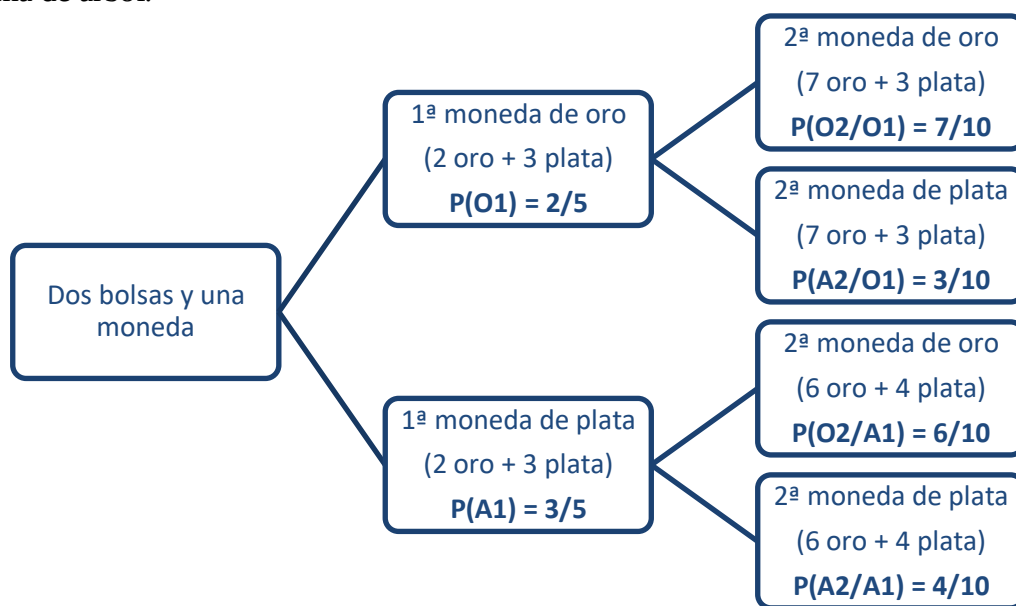
Se cumple lo pedido y la primitiva buscada es $F(x) = 12 \ln(1+e^x) - 4e^x + 4$.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Disponemos de dos bolsas con monedas de oro y monedas de plata. En la primera hay 2 monedas de oro y 3 monedas de plata. En la segunda hay 6 monedas de oro y 3 de plata. Sin mirar, extraemos una moneda al azar de la primera bolsa y la depositamos en la segunda bolsa. Luego extraemos una moneda de la segunda bolsa.

- a) **[0,75 puntos]** Calcula la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro, sabiendo que la moneda que se extrajo de la primera bolsa era de plata.
- b) **[1,75 puntos]** Calcula la probabilidad de que la moneda que se extrajo de la primera bolsa fuera de plata, sabiendo que la segunda moneda es de oro.

Llamamos O1 y O2 a extraer una moneda de oro en la 1ª y 2ª bolsa respectivamente. De forma análoga llamamos A1 y A2 a sacar moneda de plata en la 1ª y 2ª bolsa. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Si de la primera bolsa se extrae una moneda de plata y se añade a la segunda bolsa entonces tenemos en su interior 6 monedas de oro y 3 + 1 de plata. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una moneda de oro de esta segunda bolsa vale $\frac{6}{10} = 0.6$.

- b) Calculamos la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro aplicando el teorema de la probabilidad total.

$$P(O2) = P(O1)P(O2/O1) + P(A1)P(O2/A1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10} = \frac{32}{50} = 0.64$$

Nos piden calcular la probabilidad $P(A1/O2)$ que es una probabilidad a posteriori. Usamos el teorema de Bayes.

$$P(A1/O2) = \frac{P(A1 \cap O2)}{P(O2)} = \frac{P(A1)P(O2/A1)}{P(O2)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{32}{50}} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16} = 0.5625$$

La probabilidad de que la moneda que se extrajo de la primera bolsa fuera de plata, sabiendo que la segunda moneda es de oro vale 0.5625.