



El examen consta de cinco preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2 puntos. Las tres primeras preguntas son obligatorias, mientras que en las dos últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 4 y 5. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. En un ecosistema interactúan tres especies que llamaremos A, B y C. La población de cada especie en el mes k viene dada por a_k , b_k y c_k , respectivamente. La evolución de sus poblaciones puede modelizarse mediante la relación existente entre las poblaciones en un mes $k + 1$ y en el mes anterior, k :

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \text{ con } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (0,5 puntos) Si en el instante inicial ($k = 0$) hay 100 ejemplares de la especie A, 124 de la especie B y 234 de la especie C, ¿cuántos ejemplares hay de cada especie dos meses después?
- b) (0,5 puntos) Razona (sin calcular M^k) que se cumple la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

donde a_0 , b_0 y c_0 son el número de ejemplares de cada especie en el instante inicial.

- c) (1 punto) Calcula M^k con $k \in \mathbb{N}$. ¿Qué ocurrirá con el número de ejemplares de cada una de las especies con el paso del tiempo?

2. Sea $f(x)$ una función continua definida en $[0, +\infty)$ tal que $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$, y

$$f(1) = 2e - 2:$$

- a) (1 punto) Calcula $f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- b) (1 punto) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . Justifica que $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$.

3. Sean los planos $\pi: x - 2y + 4z + 1 = 0$ y $\pi_d: 2x - 3y + 6z = d$, con $d \in \mathbb{R}$.

- a) (1 punto) ¿Hay algún valor de $d \in \mathbb{R}$ para el cual los planos π y π_d no se corten?
- b) (1 punto) Calcula, para $d = -2$, los puntos de corte entre los planos π y π_d .

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Para una prueba de Bachillerato se ha preparado un cuestionario tipo test de 4 preguntas con 5 respuestas posibles a cada pregunta. Cada pregunta correctamente respondida suma 2,5 puntos. Por cada respuesta incorrecta se restan 0,625 puntos. Si no se contesta a la pregunta, se puntúa con 0.

- (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de sacar sobresaliente (nota mayor o igual a 9) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?
- (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de suspender (nota menor que 5) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

4.2 En un hospital se realizan dos técnicas diferentes de intervención para una misma lesión. Se muestra en la siguiente tabla el número de intervenciones realizadas en los últimos años clasificadas por tipo de técnica y gravedad de la lesión antes de la intervención:

	Nº intervenciones	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	44	140
Leves	136	40

En la tabla siguiente se muestra el número de intervenciones que fueron efectivas ante la lesión:

	Nº intervenciones efectivas	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	30	102
Leves	120	36

- (0,5 puntos) Se elige al azar el expediente de una intervención realizada en el hospital para esta lesión. Sabiendo que la intervención ha sido efectiva, ¿cuál de las dos técnicas es más probable que se haya usado?
- (1 punto) Con los datos anteriores, un cirujano del hospital quiere elegir la técnica que le proporcione mayor probabilidad de éxito. ¿Qué técnica elegirá para una lesión leve?, ¿y para una lesión grave?
- (0,5 puntos) El protocolo del hospital cuando se desconoce la gravedad de la lesión es aplicar la técnica 1. Justifica por qué este protocolo no es el más adecuado.

5. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

5.1 (2 puntos) En un archivo de la universidad se están digitalizando los expedientes allí almacenados. La universidad dispone de 70 archiveros que pueden realizar el trabajo y de un número limitado de equipos informáticos. Inicialmente se crea un equipo de trabajo con 50 archiveros. Se ha observado que cada uno de los integrantes de ese equipo digitaliza 80 expedientes mensualmente y que por cada archivero más que se añada al equipo, se reduce en uno los expedientes que digitaliza cada archivero al mes. Determina el número de archiveros que deben formar el equipo para que el número de expedientes digitalizados al mes sea máximo.

5.2 (2 puntos) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{1 - \cos(x)}$.

Nota: Puedes utilizar las siguientes fórmulas si te resultan de utilidad en alguno de los ejercicios anteriores.

- En el paralelogramo ABCD podemos calcular su área con la expresión $\text{Área} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$.
- Dado un triángulo ABC, su área puede obtenerse con la expresión $\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$.
- Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, entonces su volumen puede ser obtenido por la expresión $\text{Volumen} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$.
- El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D puede ser obtenido por la expresión $\text{Volumen} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$.

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1. En un ecosistema interactúan tres especies que llamaremos A, B y C. La población de cada especie en el mes k viene dada por a_k , b_k y c_k , respectivamente. La evolución de sus poblaciones puede modelizarse mediante la relación existente entre las poblaciones en un mes $k + 1$ y en el mes anterior, k :

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \text{ con } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (0,5 puntos) Si en el instante inicial ($k = 0$) hay 100 ejemplares de la especie A, 124 de la especie B y 234 de la especie C, ¿cuántos ejemplares hay de cada especie dos meses después?

b) (0,5 puntos) Razona (sin calcular M^k) que se cumple la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

donde a_0 , b_0 y c_0 son el número de ejemplares de cada especie en el instante inicial.

c) (1 punto) Calcula M^k con $k \in \mathbb{N}$. ¿Qué ocurrirá con el número de ejemplares de cada una de las especies con el paso del tiempo?

a) Calculamos los ejemplares que hay un mes después.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 124 \\ 234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 + 124 \\ 100 + 234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 224 \\ 334 \end{pmatrix}$$

Calculamos los ejemplares que hay dos meses después.

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 224 \\ 334 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 + 224 \\ 100 + 334 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 324 \\ 434 \end{pmatrix}$$

Pasados 2 meses hay 100 ejemplares de la especie A (no cambia), 324 de la especie B (200 más que al principio) y 334 de la especie C (200 más que al principio).

b)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M \cdot M \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^2 \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M \cdot M^2 \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^3 \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}}$$

c) Calculamos la potencia k -ésima de M .

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+1 & 1 & 0 \\ 1+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+1 & 1 & 0 \\ 2+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3+1 & 1 & 0 \\ 3+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que $M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo visto en el apartado anterior cuando pasa un mes la especie A se mantiene en número de ejemplares, la especie B y C aumentan en 100 ejemplares.

Cuando pasen k meses la especie A seguirá con 100 ejemplares y las especies B y C habrán aumentado en $k \cdot 100$ ejemplares.

2. Sea $f(x)$ una función continua definida en $[0, +\infty)$ tal que $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \forall x > 0$, y

$$f(1) = 2e - 2 :$$

a) (1 punto) Calcula $f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b) (1 punto) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . Justifica que $f'(x) \geq 0, \forall x \geq 0$.

a) La función $f(x)$ es la primitiva de $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \forall x > 0$. Determinamos su expresión.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \rightarrow dx = 2\sqrt{x} dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{e^t}{\cancel{\sqrt{x}}} 2\cancel{\sqrt{x}} dt = \int 2e^t dt = 2e^t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x} = t \end{array} \right\} = 2e^{\sqrt{x}} + K$$

Hemos obtenido que $f(x) = 2e^{\sqrt{x}} + K$. Aplicamos que $f(1) = 2e - 2$ para obtener el valor de K .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2e^{\sqrt{x}} + K \\ f(1) = 2e - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2e - 2 = 2e + K \Rightarrow \boxed{K = -2}$$

La función tiene la expresión $f(x) = 2e^{\sqrt{x}} - 2$.

Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2e^{\sqrt{x}} - 2 = 2e^{\sqrt{0}} - 2 = 2 - 2 = 0$$

b) Calculamos la derivada de $f(x)$.

$$f(x) = 2e^{\sqrt{x}} - 2 \Rightarrow f'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

Esta expresión de la derivada es positiva para todo valor de $x > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \rightarrow \sqrt{x} > 0 \\ e^{\sqrt{x}} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} > 0$$

Tenemos que $f(0) = 0$, la función es continua y creciente entonces la función siempre tendrá valores positivos.

3. Sean los planos $\pi : x - 2y + 4z + 1 = 0$ y $\pi_d : 2x - 3y + 6z = d$, con $d \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) ¿Hay algún valor de $d \in \mathbb{R}$ para el cual los planos π y π_d no se corten?

b) (1 punto) Calcula, para $d = -2$, los puntos de corte entre los planos π y π_d .

a) Estudiamos la posición relativa de los dos planos. Los dos planos son paralelos o coincidentes si sus vectores normales tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - 2y + 4z + 1 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, -2, 4) \\ \pi_d : 2x - 3y + 6z = d \rightarrow \vec{n}_d = (2, -3, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-3} = \frac{4}{6}$$

Los vectores normales de los dos planos no tienen coordenadas proporcionales. Los planos se cortan independientemente del valor de d .

No existe ningún valor $d \in \mathbb{R}$ para el cual los planos π y π_d no se corten.

b) Para $d = -2$ hallamos la ecuación de la recta que contiene los puntos de corte de ambos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - 2y + 4z + 1 = 0 \\ \pi_d : 2x - 3y + 6z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2y - 4z - 1 \\ 2x - 3y + 6z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(2y - 4z - 1) - 3y + 6z = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y - 8z - 2 - 3y + 6z + 2 = 0 \Rightarrow y - 2z = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2 \cdot 2z - 4z - 1 = -1} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Los puntos de corte entre los planos π y π_d son los puntos pertenecientes a la recta con

ecuaciones paramétricas $r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

4.1 Para una prueba de Bachillerato se ha preparado un cuestionario tipo test de 4 preguntas con 5 respuestas posibles a cada pregunta. Cada pregunta correctamente respondida suma 2,5 puntos. Por cada respuesta incorrecta se restan 0,625 puntos. Si no se contesta a la pregunta, se puntúa con 0.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de sacar sobresaliente (nota mayor o igual a 9) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de suspender (nota menor que 5) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

a) Para sacar nota mayor o igual a 9 solo se puede conseguir sacando un 10, es decir, respondiendo correctamente a las 4 preguntas.

La probabilidad de que respondiendo al azar a una pregunta esta respuesta sea correcta vale

$$\frac{1}{5}. \text{ La probabilidad de responder correctamente a las 4 preguntas vale } \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} = 0.016.$$

b) Si se responde mal a las 4 preguntas se obtiene un 0.

Si se responde mal a 3 preguntas y correctamente a 1 obtenemos $2.5 - 3 \cdot 0.625 = 0.625$.

Si se responde mal a 2 preguntas y correctamente a las otras 2 obtenemos $2.5 \cdot 2 - 2 \cdot 0.625 = 3.75$.

Si se responde mal a 1 pregunta y correctamente a las otras 3 obtenemos $2.5 \cdot 3 - 0.625 = 6.875$.

Si se responde bien a todas las preguntas obtenemos 10.

Solo se obtiene una nota superior a 5 cuando se responde bien a todas las preguntas o cuando respondemos mal a solo una de ellas.

Sabemos que la probabilidad de acertar las 4 preguntas vale $\frac{1}{625}$.

Calculamos la probabilidad de fallar 1 de las 4 preguntas.

Esto puede ocurrir de 4 formas distintas (fallando la 1ª, la 2ª, la 3ª o la 4ª) y la probabilidad de fallar la 1ª pregunta y acertar el resto vale $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5^4}$.

La probabilidad de fallar una cualquiera de las 4 preguntas y acertar las otras tres vale

$$4 \cdot \frac{4}{5^4} = \frac{16}{625}.$$

Para sacar nota mayor que 5 debemos fallar 1 pregunta o ninguna. La probabilidad de sacar nota mayor que 5 vale $\frac{1}{625} + \frac{16}{625} = \frac{17}{625}$.

La probabilidad de sacar nota menor que 5 vale $1 - \frac{17}{625} = \frac{608}{625} = 0.9728$.

4.2 En un hospital se realizan dos técnicas diferentes de intervención para una misma lesión. Se muestra en la siguiente tabla el número de intervenciones realizadas en los últimos años clasificadas por tipo de técnica y gravedad de la lesión antes de la intervención:

	Nº intervenciones	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	44	140
Leves	136	40

En la tabla siguiente se muestra el número de intervenciones que fueron efectivas ante la lesión:

	Nº intervenciones efectivas	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	30	102
Leves	120	36

- a) (0,5 puntos) Se elige al azar el expediente de una intervención realizada en el hospital para esta lesión. Sabiendo que la intervención ha sido efectiva, ¿cuál de las dos técnicas es más probable que se haya usado?
- b) (1 punto) Con los datos anteriores, un cirujano del hospital quiere elegir la técnica que le proporcione mayor probabilidad de éxito. ¿Qué técnica elegirá para una lesión leve?, ¿y para una lesión grave?
- c) (0,5 puntos) El protocolo del hospital cuando se desconoce la gravedad de la lesión es aplicar la técnica 1. Justifica por qué este protocolo no es el más adecuado.

Llamamos T1 al suceso “se utiliza la técnica 1 en la intervención”, T2 al suceso “se utiliza la técnica 2 en la intervención”, G a “La lesión es grave”, L a “La lesión es leve” y E a “la intervención ha sido efectiva”.

- a) Ha habido $30 + 120 + 102 + 36 = 288$ intervenciones efectivas. De estas $120 + 30 = 150$ han sido realizadas con la técnica 1 y $102 + 36 = 138$ con la técnica 2. Como $150 > 138$ podemos afirmar que si la intervención ha sido efectiva es más probable que se haya utilizado la técnica 1.

- b) Para lesiones leves con la técnica 1 se han realizado 136 intervenciones siendo efectivas

120 de ellas. La proporción de efectividad con la técnica 1 es $\frac{120}{136} = \frac{15}{17} \approx 0.8824$.

Para lesiones leves con la técnica 2 se han realizado 40 intervenciones siendo efectivas 36 de ellas. La proporción de efectividad con la técnica 2 es $\frac{36}{40} = 0.9$.

Como $0.9 > 0.8824$ podemos decir que la técnica 2 tiene más probabilidad de ser efectiva en una intervención de lesión leve.

Para lesiones graves con la técnica 1 se han realizado 44 intervenciones siendo efectivas 30 de ellas. La proporción de efectividad con la técnica 1 es $\frac{30}{44} = \frac{15}{22} \approx 0.6818$.

Para lesiones graves con la técnica 2 se han realizado 140 intervenciones siendo efectivas 102 de ellas. La proporción de efectividad con la técnica 2 es $\frac{102}{140} = \frac{51}{70} \approx 0.7286$.

Como $0.7286 > 0.6818$ podemos decir que la técnica 2 tiene más probabilidad de ser efectiva en una intervención de lesión grave.

- c) Calculamos la probabilidad de que la intervención sea efectiva con la técnica 1 y con la técnica 2 para determinar cual de ellas es mayor.

$$P(E / T1) = \frac{30+120}{44+136} = \frac{150}{180} \approx 0.8333$$

$$P(E / T2) = \frac{102+36}{140+40} = \frac{138}{180} \approx 0.7666$$

Como $\frac{150}{180} > \frac{138}{180}$ podemos decir que la probabilidad de efectividad de la intervención es mayor con la técnica 1.

Esta conclusión la hemos realizado teniendo en cuenta el total de intervenciones, independientemente de la gravedad de la lesión.

Sin embargo, en el apartado anterior teniendo en cuenta si la lesión es leve o grave era más efectiva la técnica 2 en ambos casos. La técnica 2 parece ser la más efectiva si estudiamos por separado los casos leves y los graves.

5.1 (2 puntos) En un archivo de la universidad se están digitalizando los expedientes allí almacenados. La universidad dispone de 70 archiveros que pueden realizar el trabajo y de un número limitado de equipos informáticos. Inicialmente se crea un equipo de trabajo con 50 archiveros. Se ha observado que cada uno de los integrantes de ese equipo digitaliza 80 expedientes mensualmente y que por cada archivero más que se añada al equipo, se reduce en uno los expedientes que digitaliza cada archivero al mes.
Determina el número de archiveros que deben formar el equipo para que el número de expedientes digitalizados al mes sea máximo.

Llamamos x al número de archiveros que se añaden al equipo y $f(x)$ el número de expedientes que se digitalizan mensualmente por el equipo de archiveros.

Si $x = 0$ nos dicen que $f(0) = 80 \cdot 50 = 4000$.

Si $x = 1$ nos dicen que $f(1) = (80 - 1)(50 + 1) = 4029$.

Si $x = 2$ nos dicen que $f(2) = (80 - 2)(50 + 2) = 4056$.

Tenemos que $f(x) = (80 - x)(50 + x) = 4000 + 80x - 50x - x^2 = -x^2 + 30x + 4000$, siendo $x \in [0, 20]$.

Obtenemos la derivada de esta función y buscamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = -x^2 + 30x + 4000 \Rightarrow f'(x) = -2x + 30$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 30 = 0 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow \boxed{x = 15}$$

Sustituimos $x = 15$ en la segunda derivada.

$$f'(x) = -2x + 30 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(15) = -2 < 0$$

Para $x = 15$ se anula la primera derivada y la segunda toma valor negativo. La función tiene un máximo relativo para este valor.

Con $50 + 15 = 65$ archiveros se digitalizan $(80 - 15)(50 + 15) = 4225$, que es el máximo número de expedientes que se pueden digitalizar mensualmente.

5.2 (2 puntos) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{1 - \cos(x)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{1 - \cos(x)} = \frac{e^{\sin(0)} - e^0}{1 - \cos(0)} = \frac{e^0 - e^0}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot e^{\sin(x)} - e^x}{-(-\sin(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot e^{\sin(x)} - e^x}{\sin(x)} = \frac{\cos(0) \cdot e^{\sin(0)} - e^0}{\sin(0)} =$$

$$= \frac{1 \cdot e^0 - e^0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) \cdot e^{\sin(x)} + \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} - e^x}{\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos^2(x) - \sin(x)] \cdot e^{\sin(x)} - e^x}{\cos(x)} =$$

$$= \frac{[\cos^2(0) - \sin(0)] \cdot e^{\sin(0)} - e^0}{\cos(0)} = \frac{[1^2 - 0] e^0 - e^0}{1} = \boxed{0}$$