



Universidad de
Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025-2026

MATEMÁTICAS II

➤ Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste una única opción, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➤ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A. Un cliente de una cafetería compra 1 café, 2 té y 2 zumos y paga 11 euros. Al día siguiente compra 1 café, 3 té y 3 zumos y paga 16 euros. El tercer día compra 3 cafés, 3 té y los zumos que pueda pagar con 21 euros exactos (no deben darle vuelta). Se pide:

- (a) **(1.5 puntos)** Encuentra un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema de calcular el precio de cada producto en función del número p de zumos que le den el tercer día. Discute el sistema obtenido en función del número de zumos pagados el último día.
- (b) **(0.5 puntos)** El camarero del tercer día le dice “Por ese dinero te daré dos zumos”, el cliente dice “Eso es imposible, el precio está mal calculado” ¿quién tiene razón? Justifica la respuesta.
- (c) **(0.5 puntos)** El camarero le responde, en efecto, tiene usted razón, en realidad le tengo que dar 4 zumos y el cliente queda satisfecho. ¿A qué precio le ha cobrado cada bebida?

Pregunta 1. Opción B. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- (b) **(0.5 puntos)** Si una matriz B de tamaño 3×3 verifica que $B^2 = 2I$ ¿Qué valores puede tomar $\det(B)$?
- (c) **(1 punto)** Calcula el rango y el determinante de la matriz A para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

Pregunta 2. Opción A. Una empresa inicia su cotización en bolsa, con un precio de 5 euros la acción. A partir de ahí, el precio de cada acción se modelizó en función del tiempo pasado en bolsa desde ese momento inicial y durante el primer mes. Se obtuvo la siguiente función

$$f(t) = \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1}, \quad t \in [0, 30].$$

- (a) **(1 punto)** Si la empresa necesita que el valor de cada acción llegue a 6.5 euros para que se alcancen los objetivos previstos ¿se alcanzan en el intervalo estudiado?
- (b) **(0.75 puntos)** Estudia los intervalos en los que el precio de cada acción sube y los intervalos donde baja.
- (c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál sería el valor de la acción si esta función modelizase el valor de las acciones a lo largo de toda la vida de la empresa?

Pregunta 2. Opción B. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax + 11 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Se pide

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular el valor de A para el que f es una función continua.
(b) **(1.25 puntos)** Si $A = 6$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
(c) **(0.5 puntos)** Para $A = 6$ ¿es $x = 2$ un extremo relativo de la función? ¿de qué tipo?.
-

Pregunta 3. Opción A. Se sabe que la función $F(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ es una primitiva de f. Se

pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular la función f.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula una función que sea una primitiva de f y tal que en $x = 0$ tome el valor 6.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.
-

Pregunta 3. Opción B. Dada la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Calcular una primitiva de la función f.
(b) **(1.25 puntos)** Calcular el área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.
-

Pregunta 4. Opción A. Se considera el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y el punto $P(0, -1, -2)$. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Encontrar la ecuación de una recta paralela a π y que contenga al punto P. ¿Es única esa recta?
(b) **(1.25 puntos)** Calcular el punto $Q \in \pi$ que menos dista de P. ¿Qué distancia hay entre P y Q?

Pregunta 4. Opción B. Un móvil se desplaza en línea recta desde el punto $P(2, 1, 3)$ hacia el punto $Q(0, -1, 1)$. Cuando llega a la mitad de la distancia de P a Q da un giro y se desplaza por la recta que pasa por $H(1, 1, 1)$.

- (a) **(0.5 puntos)** Calcula las coordenadas del punto en el que se realiza el giro.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta por la que se desplaza el móvil tras realizar el giro.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula el ángulo de giro del móvil.
-

Pregunta 5. Opción A. En una industria textil se fabrican pantalones vaqueros. Se observan que se pueden producir dos tipos de defectos en la producción, en la longitud y en las costuras. Se hace un estudio y se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud, mientras que no pasan el test de las costuras el 5 %. Además, un 0.8% de las prendas suspenden ambos test. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Calcular la probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test.
(b) **(1.25 puntos)** Si una prenda seleccionada al azar ha suspendido el test de longitud ¿qué probabilidad hay de que también suspenda el test de costuras?
-

Pregunta 5. Opción B. Una grúa debe levantar una serie de cajas. Cuando el brazo de la grúa intenta levantar más de 40kgs el sistema de seguridad se activa y la grúa no puede continuar. Supongamos que el peso de las cajas sigue una distribución $N(38, 1.2)$.

- (a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de seguridad se active al intentar levantar una caja?
- (b) (1.25 puntos) Se realiza el levantamiento de 10 cajas, una detrás de otra ¿cuál es la probabilidad de que el sistema salte al menos una vez?

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1.6667) = 0.9520$, $F(0.9520) = 0.83$, $F(0.83) = 0.7975$, $F(0.79) = 0.7852$..
Si los valores obtenidos no están entre los expuestos debe tomarse el más cercano.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. Un cliente de una cafetería compra 1 café, 2 té y 2 zumos y paga 11 euros. Al día siguiente compra 1 café, 3 té y 3 zumos y paga 16 euros. El tercer día compra 3 cafés, 3 té y los zumos que pueda pagar con 21 euros exactos (no deben darle vuelta). Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Encuentra un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema de calcular el precio de cada producto en función del número p de zumos que le den el tercer día. Discute el sistema obtenido en función del número de zumos pagados el último día.

(b) **(0.5 puntos)** El camarero del tercer día le dice “Por ese dinero te daré dos zumos”, el cliente dice “Eso es imposible, el precio está mal calculado” ¿quién tiene razón? Justifica la respuesta.

(c) **(0.5 puntos)** El camarero le responde, en efecto, tiene usted razón, en realidad le tengo que dar 4 zumos y el cliente queda satisfecho. ¿A qué precio le ha cobrado cada bebida?

(a) Llamamos “c” al precio de un café, “t” al precio de un té y “z” al precio de un zumo.

“Un cliente de una cafetería compra 1 café, 2 té y 2 zumos y paga 11 euros” →

$$c + 2t + 2z = 11.$$

“Al día siguiente compra 1 café, 3 té y 3 zumos y paga 16 euros” → $c + 3t + 3z = 16.$

“El tercer día compra 3 cafés, 3 té y los zumos que pueda pagar con 21 euros exactos (no deben darle vuelta)” → $3c + 3t + pz = 21$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\begin{cases} c + 2t + 2z = 11 \\ c + 3t + 3z = 16 \\ 3c + 3t + pz = 21 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & p \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & p & 21 \end{pmatrix}$

. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & p & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 16 \\ -1 \quad -2 \quad -2 \quad -11 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 3 \quad p \quad 21 \\ -3 \quad -6 \quad -6 \quad -33 \\ \hline 0 \quad -3 \quad p-6 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & p-6 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad p-6 \quad -12 \\ 0 \quad 3 \quad 3 \quad 15 \\ \hline 0 \quad 0 \quad p-3 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad 2 \quad 11}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 5 \\ 0 \quad 0 \quad \underbrace{p-3 \quad 3}_A \end{pmatrix}$$

Tenemos dos situaciones diferentes.

Si $p \neq 3$ el rango de la matriz A es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

Si $p = 3$ la matriz ampliada queda $\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$. El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los

rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

(b) Para $p = 2$ hemos visto que el sistema tiene solución. Lo resolvemos partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + 2t + 2z = 11 \\ t + z = 5 \\ -z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + 2t + 2z = 11 \\ t + z = 5 \\ \textcolor{red}{z = -3?} \end{array} \right\}$$

El precio de un zumo no puede tener un valor negativo.

La situación planteada no es posible. El cliente tiene razón.

(c) Para $p = 4$ el sistema tiene solución. Lo resolvemos partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado (a).

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + 2t + 2z = 11 \\ t + z = 5 \\ \boxed{z = 3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + 2t + 2 \cdot 3 = 11 \\ t + 3 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + 2t = 5 \\ \boxed{t = 2} \end{array} \right\} \Rightarrow c + 2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Le ha cobrado el café a 1 €, el té a 2 € y el zumo a 3 €.

Pregunta 1. Opción B. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
 (b) **(0.5 puntos)** Si una matriz B de tamaño 3×3 verifica que $B^2 = 2I$ ¿Qué valores puede tomar $\det(B)$?
 (c) **(1 punto)** Calcula el rango y el determinante de la matriz A para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

(a) Resolvemos la igualdad $A^2 = I$.

$$\begin{aligned}
 A^2 = I &\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+0-2a & -2+6-4 & 2-8+6 \\ 0+0-4a & 0+9-8 & 0-12+12 \\ -a+0-3a & 2a+6-6 & -2a-8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-2a & 0 & 0 \\ -4a & 1 & 0 \\ -4a & 2a & -2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1-2a=1 \\ -4a=0 \\ -4a=2a \\ -2a+1=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a=0}
 \end{aligned}$$

La igualdad $A^2 = I$ se cumple para $a = 0$.

(b) Si $B^2 = 2I$ tomamos determinantes y tenemos:

$$\begin{aligned}
 B^2 = 2I &\Rightarrow B \cdot B = 2I \Rightarrow |B \cdot B| = |2I| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I \text{ es } 3 \times 3 \\ |2I| = 2^3 \cdot |I| \end{array} \right\} \Rightarrow |B| \cdot |B| = 8|I| \Rightarrow \\
 &\Rightarrow |B|^2 = 8 \Rightarrow \boxed{|B| = \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

El determinante de la matriz B debe ser $|B| = \pm 2\sqrt{2}$.

(c) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 8a + 0 + 6a - 0 - 8 = 1 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

Si $a \neq \frac{1}{2}$ el determinante de A vale $1-2a$ que es distinto de cero y el rango de A es 3.

Si $a = \frac{1}{2}$ el determinante de A vale 0 y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1/2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la fila y columna tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a \neq \frac{1}{2}$ el rango de A es 3 y si $a = \frac{1}{2}$ el rango de A es 2.

Pregunta 2. Opción A. Una empresa inicia su cotización en bolsa, con un precio de 5 euros la acción. A partir de ahí, el precio de cada acción se modelizó en función del tiempo pasado en bolsa desde ese momento inicial y durante el primer mes. Se obtuvo la siguiente función

$$f(t) = \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1}, \quad t \in [0, 30].$$

- (a) **(1 punto)** Si la empresa necesita que el valor de cada acción llegue a 6.5 euros para que se alcancen los objetivos previstos ¿se alcanzan en el intervalo estudiado?
- (b) **(0.75 puntos)** Estudia los intervalos en los que el precio de cada acción sube y los intervalos donde baja.
- (c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál sería el valor de la acción si esta función modelizase el valor de las acciones a lo largo de toda la vida de la empresa?

(a) Buscamos t tal que $f(t) = 6.5$.

$$f(t) = 6.5 \Rightarrow \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1} = 6.5 \Rightarrow 5t^2 + 2t + 5 = 6.5t^2 + 6.5 \Rightarrow 0 = 1.5t^2 - 2t + 1.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{6} = \text{No Existe}$$

En ningún momento se alcanza el valor de 6.5 euros.

(b) Hallamos los puntos críticos donde se anula la derivada de la función.

$$f(t) = \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1} \Rightarrow f'(t) = \frac{(10t + 2)(t^2 + 1) - 2t(5t^2 + 2t + 5)}{(t^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{10t^3} + 10t + 2t^2 + 2 - \cancel{10t^3} - 4t^2 - \cancel{10t}}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-2t^2 + 2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-2(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-2(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -2(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Solo consideramos el valor positivo. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $t = 1$.

- En el intervalo $[0, 1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{-2(0.5^2 - 1)}{(0.5^2 + 1)^2} = \frac{24}{25} > 0. \text{ La función crece en } [0, 1).$$

- En el intervalo $(1, 30]$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2(2^2 - 1)}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-6}{25} < 0.$

La función decrece en $(1, 30]$.

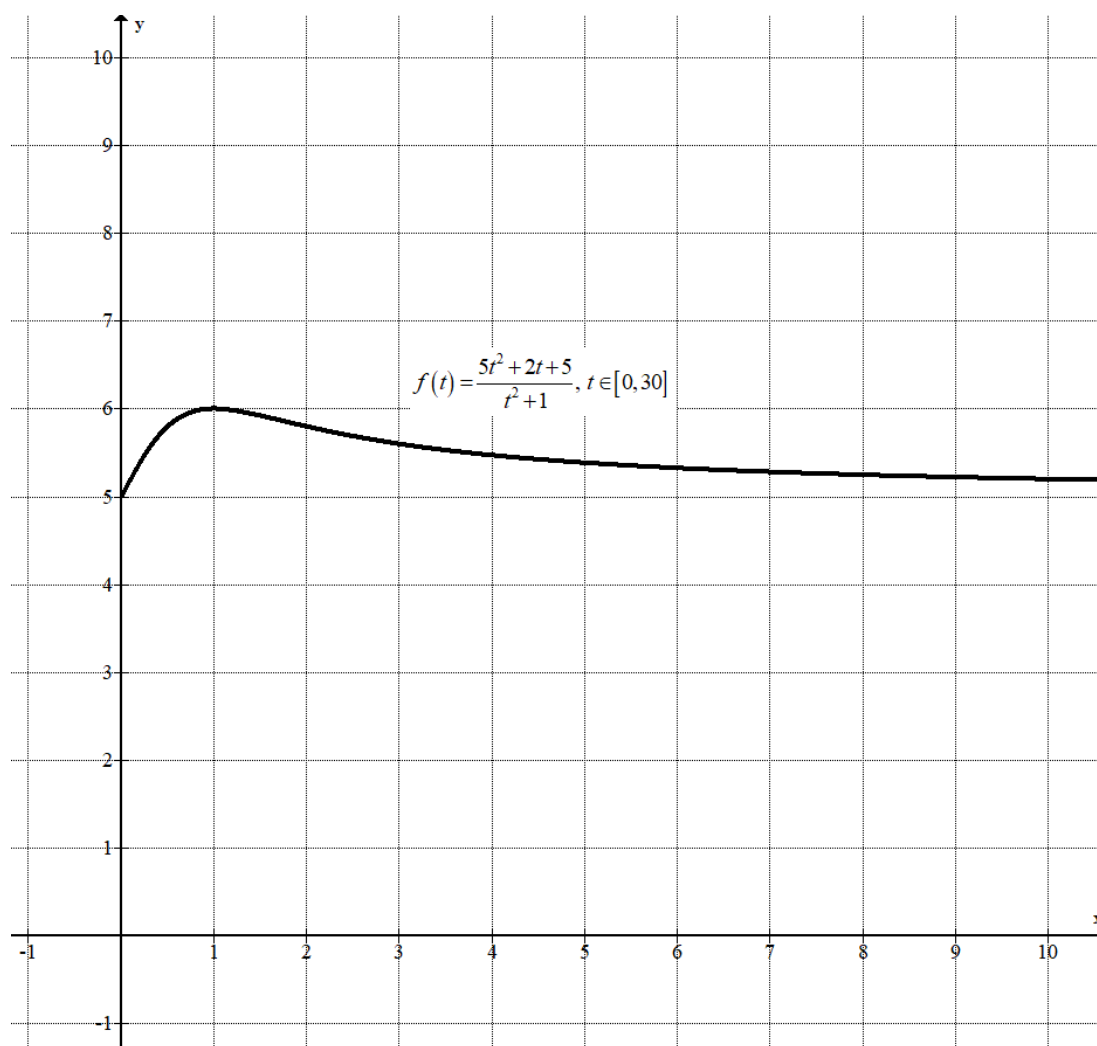
La función crece en $[0,1)$ y decrece en $(1,30]$.

El precio de cada acción sube el primer día y a partir de ese día baja.

(c) Calculamos el límite de la función cuando t crece hasta $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5t^2}{t^2} + \frac{2t}{t^2} + \frac{5}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} + \frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{5 + \frac{2}{\infty} + \frac{5}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{5 + 0 + 0}{1 + 0} = 5$$

El precio de la acción tiende a estabilizarse en 5 euros.



Pregunta 2. Opción B. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax + 11 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Se pide

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular el valor de A para el que f es una función continua.
 (b) **(1.25 puntos)** Si $A=6$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
 (c) **(0.5 puntos)** Para $A=6$ ¿es $x=2$ un extremo relativo de la función? ¿de qué tipo?.

(a) Para que la función sea continua debe serlo en $x=2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{5x-1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - Ax + 11 = 2^2 - A \cdot 2 + 11 = 15 - 2A \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 15 - 2A = 3 \Rightarrow 12 = 2A \Rightarrow \boxed{A=6}$$

Para $A=6$ la función es continua.

(b) Si $A=6$ la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Su derivada tiene la

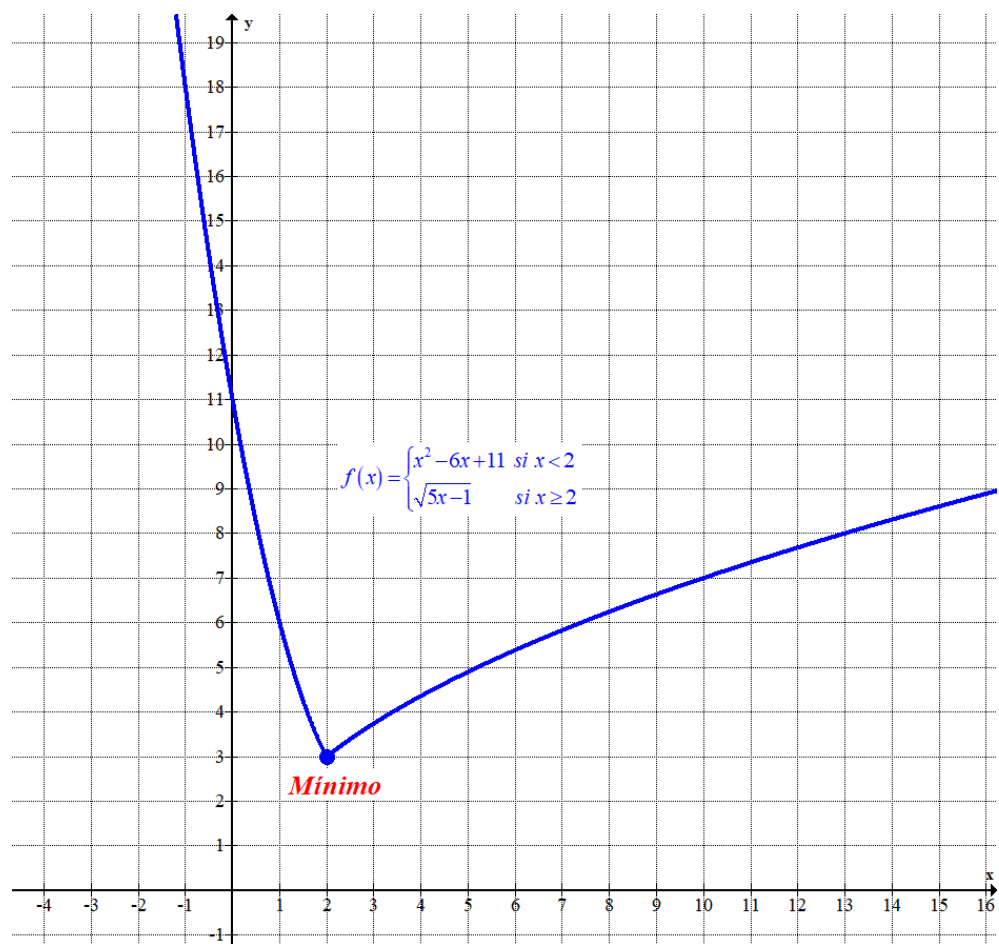
$$\text{expresión } f'(x) = \begin{cases} 2x-6 & \text{si } x < 2 \\ \frac{5}{2\sqrt{5x-1}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

En el intervalo $(-\infty, 2)$ la derivada es $f'(x) = 2x-6$ que se anula para $x=3$ que no pertenece a este intervalo. Si tomamos $x=0$ la derivada vale $f'(0) = 2 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$. La derivada es negativa en todo el intervalo y la función decrece en $(-\infty, 2)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la derivada es $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$ que es siempre positiva. La función crece en $(2, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

(c) Para $A=6$ hemos visto que la función es continua y decrece antes de $x=2$ y crece después de $x=2$. La función tiene un mínimo relativo en $x=2$. Como $f(2) = \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 3$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(2, 3)$.



Pregunta 3. Opción A. Se sabe que la función $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$ es una primitiva de f . Se pide:

(a) **(1 punto)** Calcular la función f .

(b) **(0.75 puntos)** Calcular una función que sea una primitiva de f y tal que en $x = 0$ tome el valor 6.

(c) **(0.75 puntos)** Calcular el área del recinto encerrado por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(a) La función f es la derivada de la primitiva.

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} 2x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) = \frac{\pi x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$$

(b) Las primitivas de f son $G(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) + K$. Hallamos el valor de K para qué $G(0) = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} G(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) + K \\ G(0) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0^2\right) + K = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 + K = 6 \Rightarrow \boxed{K = 6}$$

La primitiva buscada es $G(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) + 6$.

(c) Buscamos los puntos de corte de la función con el eje OX .

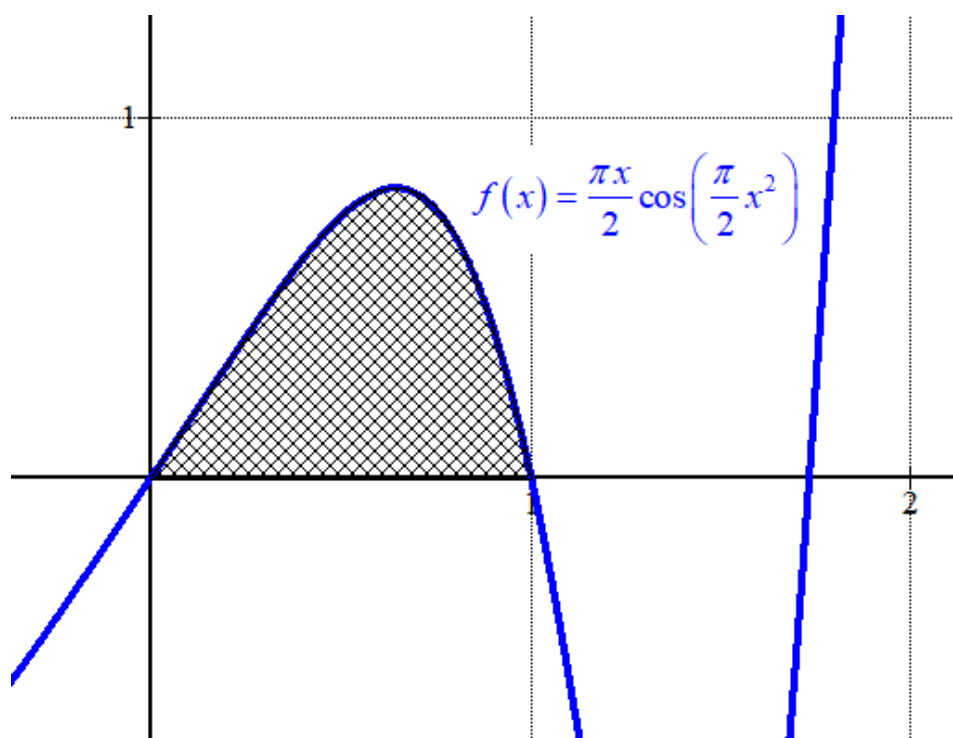
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{\pi x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} x^2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \pm 1 \\ \frac{\pi}{2} x^2 = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \sqrt{3} \\ \dots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

En el intervalo $[0, 1]$ la función corta el eje en los extremos.

El área será el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{\pi x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1^2\right) \right] - \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0^2\right) \right] = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

El área del recinto encerrado por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ vale 0.5 unidades cuadradas.



Pregunta 3. Opción B. Dada la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Calcular una primitiva de la función f .
 (b) **(1.25 puntos)** Calcular el área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f el eje X y las rectas $x=0$ y $x=1$.

(a) Calculamos la integral de la función.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{x-2}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{2}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \boxed{\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctg(x) + K} \end{aligned}$$

Una primitiva de la función f la podemos obtener tomando $K=0$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctg(x)$$

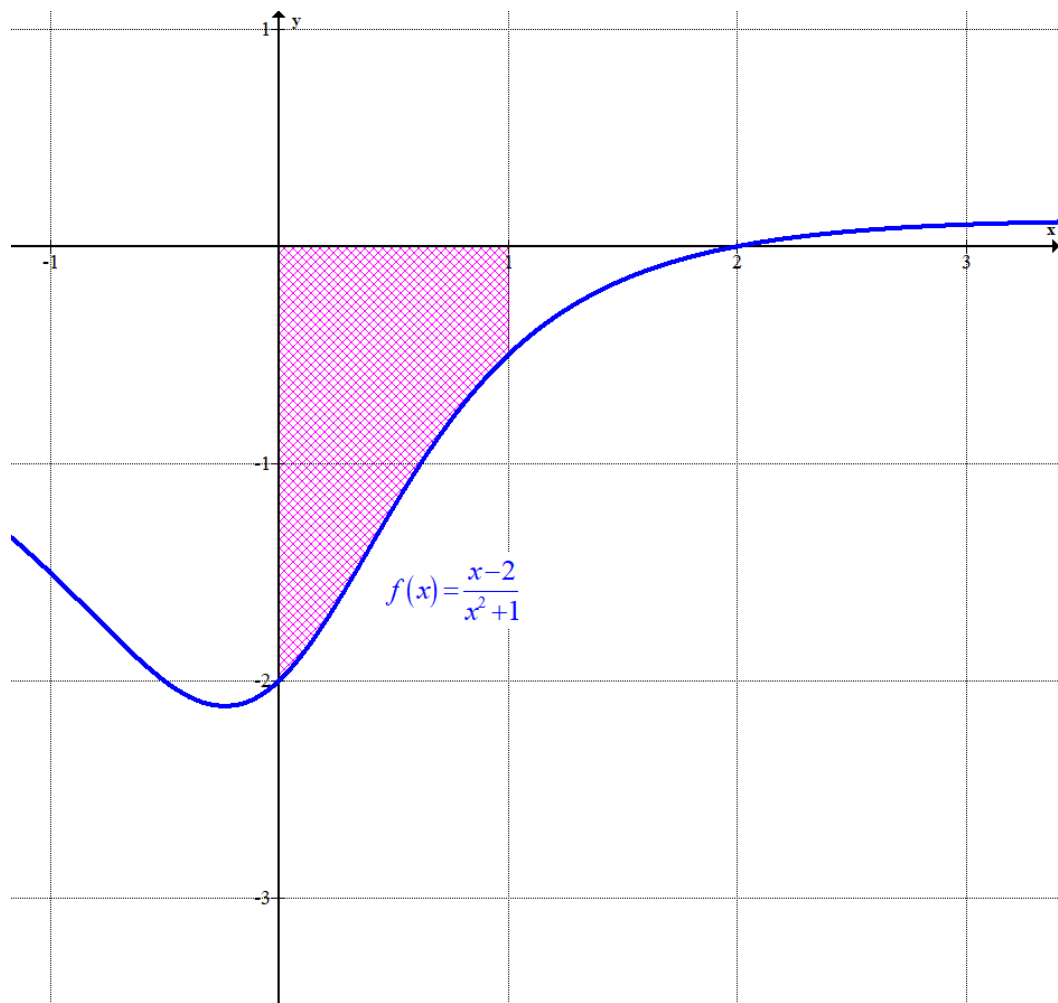
(b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función f con el eje X .

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \notin (0,1)$$

El punto de corte no pertenece al intervalo $(0, 1)$. El área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f el eje X y las rectas $x=0$ y $x=1$ es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{x-2}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctg(x) \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(1^2+1) - 2 \arctg(1) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln(0^2+1) - 2 \arctg(0) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - 2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 1 + 2 \cdot 0 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\ln 2 - \pi}{2} \simeq -1.22 \end{aligned}$$

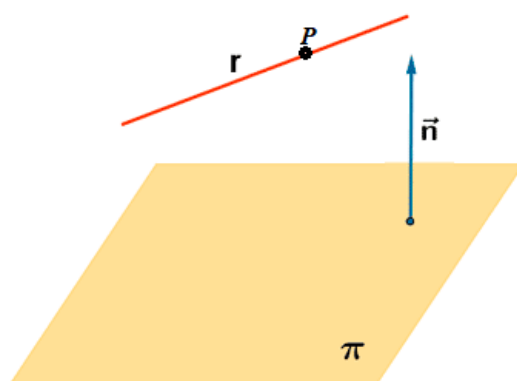
El área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f el eje X y las rectas $x=0$ y $x=1$ tiene un valor de $\frac{\pi - \ln 2}{2} \simeq 1.22$ unidades cuadradas.



Pregunta 4. Opción A. Se considera el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y el punto $P(0, -1, -2)$. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Encontrar la ecuación de una recta paralela a π y que contenga al punto P. ¿Es única esa recta?
 (b) **(1.25 puntos)** Calcular el punto $Q \in \pi$ que menos dista de P. ¿Qué distancia hay entre P y Q?

- (a) El plano π' paralelo al plano π que contiene el punto P es único. Dicho plano contiene a las infinitas rectas paralelas al plano π que contienen el punto P.



Hallamos una de esas rectas paralelas al plano π que contiene el punto P. Esta recta debe tener un vector director perpendicular al vector normal del plano. Dicho vector no es único. Obtenemos uno de ellos.

$$\pi \equiv x + 2y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (1, 2, 3)(a, b, c) = 0 \Rightarrow a + 2b + 3c = 0$$

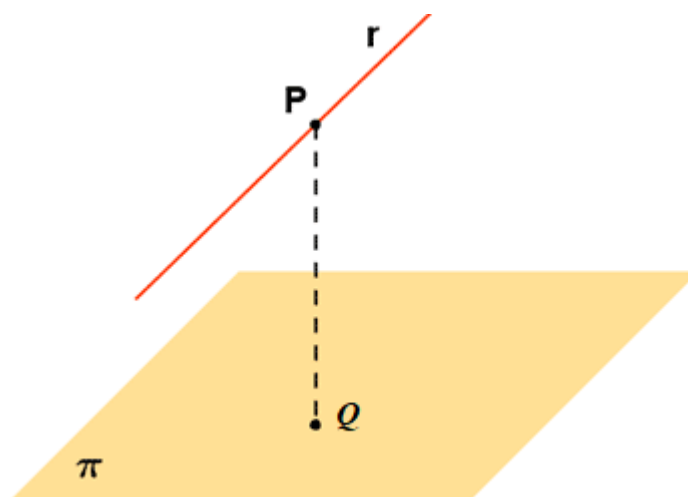
Si tomamos el vector $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$ se cumple que $\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, 2, 3)(1, 1, -1) = 1 + 2 - 3 = 0$.

Hallamos la ecuación de la recta que tiene como vector director $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$ y contiene el punto $P(0, -1, -2)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(0, -1, -2) \in r \\ \vec{v}_r = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

Una recta paralela al plano y que contiene el punto P es la recta $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$.

- (b) Buscamos el punto Q del dibujo.



Para determinar el punto Q hallamos la recta s perpendicular al plano π que pasa por el punto P. El punto Q es el punto de corte de la recta s y el plano π .

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta s . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x + 2y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(0, -1, -2) \in s \\ \vec{u}_s = \vec{n} = (1, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta s y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x + 2y + 3z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 2(-1 + 2\lambda) + 3(-2 + 3\lambda) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda - 2 + 4\lambda - 6 + 9\lambda = 6 \Rightarrow 14\lambda = 14 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2 = 1 \\ z = -2 + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1, 1, 1)}$$

El punto $Q \in \pi$ que menos dista de P tiene coordenadas $Q(1, 1, 1)$.

La distancia entre P y Q es la distancia del punto P al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} P(0, -1, -2) \\ \pi \equiv x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, Q) = d(P, \pi) = \frac{|0 + 2(-1) + 3(-2) - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

La distancia del punto P al punto Q es de $\sqrt{14} \approx 3.7$ unidades de distancia.

Pregunta 4. Opción B. Un móvil se desplaza en línea recta desde el punto $P(2, 1, 3)$ hacia el punto $Q(0, -1, 1)$. Cuando llega a la mitad de la distancia de P a Q da un giro y se desplaza por la recta que pasa por $H(1, 1, 1)$.

- (a) **(0.5 puntos)** Calcula las coordenadas del punto en el que se realiza el giro.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta por la que se desplaza el móvil tras realizar el giro.
 (c) **(0.75 puntos)** Calcula el ángulo de giro del móvil.

(a) Se realiza el giro en el punto medio del segmento PQ .

$$G = \frac{(2, 1, 3) + (0, -1, 1)}{2} = (1, 0, 2)$$

El punto donde hace el giro tiene coordenadas $G = (1, 0, 2)$.

(b) La recta r por la que se desplaza tras el giro es la recta que contiene los puntos G y H .

$$\left. \begin{array}{l} G(1, 0, 2) \in r \\ H(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{GH} = (1, 1, 1) - (1, 0, 2) = (0, 1, -1) \\ H(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

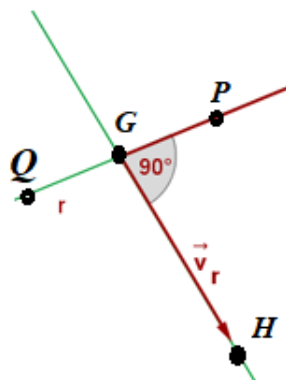
La recta por la que se desplaza el móvil tiene ecuación $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

(c) El ángulo de giro del móvil es el ángulo entre el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector $\overrightarrow{GH}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (0, -1, 1) - (2, 1, 3) = (-2, -2, -2) \\ \overrightarrow{GH} = (0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{GH}) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{GH}|} \Rightarrow$$

$$\cos(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{GH}) = \frac{(-2, -2, -2)(0, 1, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{-2 + 2}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{2}} = 0$$

Los vectores son perpendiculares. El ángulo de giro es de 90° .



Pregunta 5. Opción A. En una industria textil se fabrican pantalones vaqueros. Se observan que se pueden producir dos tipos de defectos en la producción, en la longitud y en las costuras. Se hace un estudio y se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud, mientras que no pasan el test de las costuras el 5 %. Además, un 0.8% de las prendas suspenden ambos test. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Calcular la probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test.
- (b) **(1.25 puntos)** Si una prenda seleccionada al azar ha suspendido el test de longitud ¿qué probabilidad hay de que también suspenda el test de costuras?

Llamamos DL a “el pantalón vaquero tiene defecto en longitud” y DC a “el pantalón vaquero tiene defecto en costuras”.

“Se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud, mientras que no pasan el test de las costuras el 5 %” $\rightarrow P(DL) = 0.10$, $P(DC) = 0.05$

“Además, un 0.8% de las prendas suspenden ambos test” $\rightarrow P(DL \cap DC) = 0.008$

- (a) Nos piden calcular $P(DL \cup DC)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(DL \cup DC) = P(DL) + P(DC) - P(DL \cap DC) = 0.1 + 0.05 - 0.008 = \boxed{0.142}$$

La probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test es 0.142.

- (b) Debemos calcular $P(DC / DL)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(DC / DL) = \frac{P(DL \cap DC)}{P(DL)} = \frac{0.008}{0.1} = \boxed{0.08}$$

Si una prenda seleccionada al azar ha suspendido el test de longitud la probabilidad de que también suspenda el test de costuras es de 0.08.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos relativos a absolutos. Para ello suponemos que se producen 1000 pantalones.

Se hace un estudio y se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud $\rightarrow 0.10 \cdot 1000 = 100$, mientras que no pasan el test de las costuras el 5 % $\rightarrow 0.05 \cdot 1000 = 50$. Además, un 0.8% de las prendas suspenden ambos test $\rightarrow 0.008 \cdot 1000 = 8$.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Defecto en costuras	Sin defectos en costuras	
Defecto en longitud	8		100
Sin defecto en longitud			
	50		1000

Completamos la tabla.

	Defecto en costuras	Sin defectos en costuras	
Defecto en longitud	8	92	100
Sin defecto en longitud	42	858	900
	50	950	1000

(a) Hay 1000 prendas y son $8 + 92 + 42$ las prendas que suspenden alguno de los test.

Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que una prenda seleccionada al azar

suspenda al menos uno de los test vale $\frac{8+92+42}{1000} = \frac{142}{1000} = 0.142$.

(b) Hay 100 prendas que suspenden el test de longitud y 8 de estas suspenden el de costuras.

Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que una prenda que ha suspendido el tes

de longitud también suspenda el test de costuras vale $\frac{8}{100} = 0.08$.

Pregunta 5. Opción B. Una grúa debe levantar una serie de cajas. Cuando el brazo de la grúa intenta levantar más de 40kgs el sistema de seguridad se activa y la grúa no puede continuar. Supongamos que el peso de las cajas sigue una distribución $N(38, 1.2)$.

- (a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de seguridad se active al intentar levantar una caja?
- (b) (1.25 puntos) Se realiza el levantamiento de 10 cajas, una detrás de otra ¿cuál es la probabilidad de que el sistema salte al menos una vez?

Consideramos $X = \text{“El peso en kilogramos de las cajas”}$. $X = N(38, 1.2)$

- (a) Nos piden calcular $P(X > 40)$.

$$P(X > 40) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 38}{1.2} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{40 - 38}{1.2}\right) = P(Z > 1.6667) = 1 - P(Z \leq 1.6667) =$$

$$= \{F(1.6667) = 0.9520\} = 1 - 0.952 = \boxed{0.048}$$

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, **$F(1.6667) = 0.9520$** , $F(0.9520) = 0.83$, $F(0.83) = 0.7975$, $F(0.79) = 0.7852$.

- (b) Consideramos el suceso contrario a “El sistema salta al menos una vez”, que es el suceso “el sistema no salta ninguna vez”. La probabilidad del suceso contrario es más sencilla de calcular. Como suponemos que lo que ocurre con cada caja es independiente entre sí la probabilidad de que no salte en sistema en las 10 cajas que se levantan es el producto de las probabilidades de no saltar cada una de las veces.

$$P(\text{El sistema no salta en las 10 cajas}) = P(\text{no salta}) \cdot \dots \cdot P(\text{no salta}) =$$

$$= P(\text{no salta})^{10} = (1 - 0.048)^{10}$$

La probabilidad de que el sistema salte al menos una vez vale $1 - (1 - 0.048)^{10} \approx 0.3885$.