

MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A Un cliente de una cafetería compra 1 café, 2 té y 2 zumos y paga 11 euros. Al día siguiente compra 1 café, 3 té y 3 zumos y paga 16 euros. El tercer día compra 3 cafés, 3 té y los zumos que pueda pagar con 21 euros exactos (no deben darle vuelta). Se pide:

- (a) **(1.5 puntos)** Encuentra un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema de calcular el precio de cada producto en función del número p de zumos que le den el tercer día. Discute el sistema obtenido en función del número de zumos pagados el último día.
- (b) **(0.5 puntos)** El camarero del tercer día le dice “Por ese dinero te daré dos zumos”, el cliente dice “Eso es imposible, el precio está mal calculado” ¿quién tiene razón? Justifica la respuesta.
- (c) **(0.5 puntos)** El camarero le responde, en efecto, tiene usted razón, en realidad le tengo que dar 4 zumos y el cliente queda satisfecho. ¿A qué precio le ha cobrado cada bebida?

Solución:

Llamaremos x al precio de cada café, y al de cada té y z al de cada zumo.

- (a) Cada ecuación relaciona lo que se ha pagado en total con lo que se ha pagado por cada producto. El primer día:

$$x + 2y + 2z = 11$$

El segundo día:

$$x + 3y + 3z = 16$$

y el tercer día debemos poner el número de zumos como un parámetro, desconocido pero fijo, al que llamaremos p.

$$3x + 3y + pz = 21$$

Por lo tanto, un sistema de ecuaciones lineales que modeliza el problema es:

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & +2y & +2z & = 11 \\ x & +3y & +3z & = 16 \\ 3x & +3y & +pz & = 21 \end{array} \right\}$$

Para discutir el sistema, vamos a aplicar Gauss a la matriz ampliada del sistema:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & p & 21 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1}]{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & p-6 & -12 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & p-3 & 3 \end{array} \right)$$

Por lo tanto el sistema tiene solución única si $p \neq 3$ y para $p = 3$ el sistema no tiene solución.

- (b) Si $p = 2$, con la matriz escalonada calculada en el apartado anterior se ve que $z = -3 < 0$ y esto no es posible dado que los precios no pueden ser negativos.
- (c) En efecto, para $p = 4$ el sistema tendría solución única, y esta sería: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Pregunta 1. Opción B Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- (b) **(0.5 puntos)** Si una matriz B de tamaño 3×3 verifica que $B^2 = 2I$ ¿Qué valores puede tomar $\det(B)$?
- (c) **(1 punto)** Calcula el rango y el determinante de la matriz A para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

(a) Como

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-2a & 0 & 0 \\ -4a & 1 & 0 \\ -4a & 2a & 1-2a \end{pmatrix}$$

la única solución es $a = 0$

(b) Como $\det(I) = 1$ entonces $\det(B^2) = \det 2I = 8$ y $\det(B) = \pm 2\sqrt{2}$.

(c) $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix} = 1 - 2a$. Si $a \neq \frac{1}{2}$ el rango es 3, en caso contrario el rango es menor que 3.

Como tiene un menor de orden 2 distinto de cero, $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -1$ entonces el rango es 2.

Pregunta 2. Opción A Una empresa inicia su cotización en bolsa, con un precio de 5 euros la acción. A partir de ahí, el precio de cada acción se modelizó en función del tiempo pasado en bolsa desde ese momento inicial y durante el primer mes. Se obtuvo la siguiente función $f(t) = \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1}$, $t \in [0, 30]$.

(a) **(1 punto)** Si la empresa necesita que el valor de cada acción llegue a 6.5 euros para que se alcancen los objetivos previstos ¿se alcanzan en el intervalo estudiado?

(b) **(0.75 punto)** Estudia los intervalos en los que el precio de cada acción sube y los intervalos donde baja.

(c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál sería el valor de la acción si esta función modelizase el valor de las acciones a lo largo de toda la vida de la empresa?

Solución:

(a) **(1 punto)** Calculemos el máximo de la función.

$$f'(t) = \frac{-2(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}$$

Calculemos los puntos críticos:

$$f'(t) = 0 \rightarrow t^2 = 1 \rightarrow t = \pm 1$$

Como $t = -1$ no pertenece en el dominio estudiado, se tendrá en cuenta sólo el valor de $t = 1$.

$$f''(t) = \frac{4t(t^2 - 3)}{(t^2 + 1)^3} \rightarrow f''(1) = -1 < 0$$

por lo tanto se trata de un máximo. $f(1) = 6 < 6.5$ por lo que el máximo no alcanza dicho valor.

En los extremos del intervalo $f(0) = 5 < 6.5$ y $f(30) = 5.0666 < 6.5$ por lo tanto nunca se alcanzan los objetivos previstos.

(b) La derivada de f es positiva en el intervalo $[0, 1)$ y negativa en el resto, por lo tanto la cotización aumentará el primer día y decrecerá los días restantes, alcanzando el máximo valor en $t = 1$.

(c) Se debería calcular el límite cuando t tiende a ∞ de la función:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1} = 5$$

5 sería el valor a lo que se acerca la cotización a largo plazo.

Pregunta 2. Opción B Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax + 11 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x - 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Se pide

(a) **(0.75 puntos)** Calcular el valor de A para el que f es una función continua.

(b) **(1.25 puntos)** Si $A = 6$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

(c) **(0.5 puntos)** Para $A = 6$ ¿es $x = 2$ un extremo relativo de la función? ¿de qué tipo?

Solución:

(a) La función es continua en $(-\infty, 2)$ por ser una función polinómica. También lo es en el intervalo $(2, +\infty)$ por ser raíz de un polinomio, que no toma valores negativos en dicho intervalo. Sólo resta ver qué ocurre en el punto $x = 2$. Para ello calcularemos los límites laterales y los compararemos con $f(2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - Ax + 11 = 15 - 2A$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{5x - 1} = 3$$

$$f(2) = \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

Por lo tanto, para que f sea continua debe verificarse que $15 - 2A = 3$ es decir, $A = 6$.

(b) Si $x < 2$, $f'(x) = 2x - 6$ sólo se anula en $x = 3$ que no está en el intervalo estudiado. Como $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 2)$ la función es decreciente en este intervalo.

Si $x > 2$ entonces $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x - 1}}$ que es mayor que 0 para todo x por lo que la función es creciente en todo el intervalo.

(c) Dado que la función decrece hasta el punto $x = 2$ y luego crece, el punto $x = 2$ es un extremo relativo, en concreto, se trata de un mínimo.

Pregunta 3. Opción A Se sabe que la función $F(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ es una primitiva de f . Se pide:

(a) **(1 punto)** Calcular la función f

(b) **(0.75 puntos)** Calcular una función que sea una primitiva de f y tal que en $x = 0$ tome el valor 6.

(c) **(0.75 puntos)** Calcular el área del recinto encerrado por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

(a) Si F es una primitiva de f , entonces $f(x) = F'(x) = \frac{\pi}{2}x \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$

(b) Cualquier otra primitiva de f se puede escribir como $G(x) = F(x) + k = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + k$. Como en 0 debe valer 6, entonces $\frac{1}{2} \sin(0) + k = 6$ y $k = 6$. Por lo tanto la primitiva pedida es

$$G(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + 6$$

(c) Si $0 \leq x \leq 1$ se tiene que $0 \leq \frac{\pi}{2}x^2 \leq \frac{\pi}{2}$, por lo tanto $\frac{\pi}{2}x \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \geq 0$. El área pedida sería:

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}$$

Pregunta 3. Opción B Dada la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Calcular una primitiva de la función f .
- (b) **(1.25 puntos)** Calcular el área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

(a) **(1.25 puntos)**

$$\int \frac{x-2}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{-2}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctan(x)$$

(b) **(1.25 puntos)** La función f es negativa en $x \in [0, 1]$. El área pedida sería

$$-\left(\frac{1}{2} \ln(2) - 2 \arctan(1) - \left(\frac{1}{2} \ln(1) - 2 \arctan(0)\right)\right) \approx 1.2242$$

Pregunta 4. Opción A Se considera el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y el punto $P(0, -1, -2)$. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Encontrar la ecuación de una recta paralela a π y que contenga al punto P . ¿Es única esa recta?
- (b) **(1.25 puntos)** Calcular el punto $Q \in \pi$ que menos dista de P . ¿Qué distancia hay entre P y Q ?

Solución:

(a) Tomamos dos puntos del plano y construimos el vector que los une, dicho vector es director de una recta paralela a π : $A = (1, 1, 1) \in \pi$ y $B = (-1, -1, 3) \in \pi$. El vector que une B y A es $\vec{v} = (2, 2, -2)$.

Una recta como la pedida puede ser: $r \equiv (0, -1, -2) + \lambda(2, 2, -2)$.

(b) Calculamos la recta que pasa por P y perpendicular a π . El punto que interseca esta recta con el plano π es el buscado.

El vector normal a π es $\vec{n} = (1, 2, 3)$ luego la recta buscada es

$$s \equiv (0, -1, -2) + \lambda(1, 2, 3)$$

El punto intersección con π debe pertenecer a ambos, luego debe ser de la forma $(\lambda, -1 + 2\lambda, -2 + 3\lambda)$ y además, debe cumplir la ecuación del plano:

$$\lambda + 2(-1 + 2\lambda) + 3(-2 + 3\lambda) = 6 \rightarrow \lambda = 1$$

Por lo tanto el punto buscado es $Q = (1, 1, 1)$

Además $d(P, Q) = \sqrt{(1-0)^2 + (1+1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{14} \approx 3.7417$

Pregunta 4. Opción B Un móvil se desplaza en línea recta desde el punto $P(2, 1, 3)$ hacia el punto $Q(0, -1, 1)$. Cuando llega a la mitad de la distancia de P a Q da un giro y se desplaza por la recta que pasa por $H(1, 1, 1)$.

- (a) **(0.5 puntos)** Calcula las coordenadas del punto en el que se realiza el giro.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta por la que se desplaza el móvil tras realizar el giro.
- (c) **(0.75 puntos)** Calcula el ángulo de giro del móvil.

Solución:

(a) El giro se realiza en el punto medio es decir en el punto

$$\frac{1}{2}((2, 1, 3) + (0, -1, 1)) = (1, 0, 2)$$

(b) Tras realizar el giro se desplaza por la recta que pasa por $(1, 0, 2)$ y por $(1, 1, 1)$ es decir, por la recta que pasa por $(1, 1, 1)$ y su vector director es $\vec{w} = (0, 1, -1)$. La recta, por lo tanto, es

$$r \equiv (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, -1)$$

(c) El ángulo es el mismo que forman los vectores directores de ambas, es decir, el vector $\vec{w}$ y el vector que une P con Q , que es $\vec{u} = (2, 2, 2)$. Para calcularlo, recordemos que

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \cos(\alpha)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow \cos(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Pregunta 5. Opción A En una industria textil se fabrican pantalones vaqueros. Se observan que se pueden producir dos tipos de defectos en la producción, en la longitud y en las costuras. Se hace un estudio y se detecta que el 10 % de los pantalones suspenden el test de longitud, mientras que no pasan el test de las costuras el 5 %. Además, un 0.8 % de las prendas suspenden ambos test. Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcular la probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test.

(b) **(1.25 puntos)** Si una prenda seleccionada al azar ha suspendido el test de longitud ¿qué probabilidad hay de que también suspenda el test de costuras?

Solución:

Llamaremos L al suceso 'la prenda tiene un defecto en la longitud' y C al suceso 'la prenda tiene un defecto en las costuras'. Los datos del enunciado se traducen en:

$$P(L) = 0.1, \quad P(C) = 0.05, \quad P(L \cap C) = 0.008$$

(a) Se pide $P(L \cup C) = P(L) + P(C) - P(L \cap C) = 0.1 + 0.05 - 0.008 = 0.142$

(b) Se pide $P(C/L) = \frac{P(L \cap C)}{P(L)} = \frac{0.008}{0.1} = 0.08$

Pregunta 5. Opción B Una grúa debe levantar una serie de cajas. Cuando el brazo de la grúa intenta levantar más de 40kgs el sistema de seguridad se activa y la grúa no puede continuar. Supongamos que el peso de las cajas sigue una distribución $N(38, 1.2)$.

(a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de seguridad se active al intentar levantar una caja?

(b) **(1.25 puntos)** Se realiza el levantamiento de 10 cajas, una detrás de otra ¿cuál es la probabilidad de que el sistema salte al menos una vez?

Solución:

(a) Si la variable aleatoria es X = número de kilos de la caja, para que el sistema de seguridad se active se debería cumplir que $X \geq 40$.

$$P(X \geq 40) = P\left(\frac{X - 38}{1.2} \geq \frac{40 - 38}{1.2}\right) = P(Z \geq 1.6667) = 1 - P(Z \leq 1.6667) = 1 - 0.952 = 0.048$$

(b) La probabilidad de que salte es 0.048 y la de que no salte sería $1 - 0.048 = 0.952$. Se trata de un problema de éxito-fracaso, por lo que lo podemos modelizar como una distribución binomial $B(10, 0.048)$. Para calcular lo pedido obtendremos la probabilidad de que no salte en ninguna ocasión, que es el suceso complementario del pedido.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.048^0 0.952^{10} = 0.6115$$

Por lo que la probabilidad pedida es

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.6115 = 0.3885$$

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1.6667) = 0.9520$, $F(0.9520) = 0.83$, $F(0.83) = 0.7975$, $F(0.79) = 0.7852$.

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.



Criterios de corrección

Pregunta 1. Opción A Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque A: Sentido numérico.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1.5 punto el apartado (a) y 0.5 puntos los apartados (b) y (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 1. Opción B Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque A: Sentido numérico.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto los apartados (a) y (c) y 0.5 puntos el apartado (b).

PORCENTAJE: asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 2. Opción A Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto el apartado (a) 0.75 puntos los apartados (b) y (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 2. Opción B Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 0.75 puntos el apartado (a), 1.25 puntos el apartado (b) y 0.3 puntos el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.



Pregunta 3. Opción A Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1 punto el apartado (a) y 0.75 puntos los apartados (b) y (c)

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 3. Opción B Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque D: Sentido algebraico.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 4. Opción A Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque C: Sentido espacial.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 4. Opción B Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque C: Sentido espacial.

Calificación máxima otorgada: 0.5 puntos el apartado (a) y 0.75 puntos los apartados (b) y (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 5. Opción A Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:



- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque E: Sentido estocástico.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Pregunta 5. Opción B Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- Bloque B: Sentido de la medida.
- Bloque E: Sentido estocástico.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.