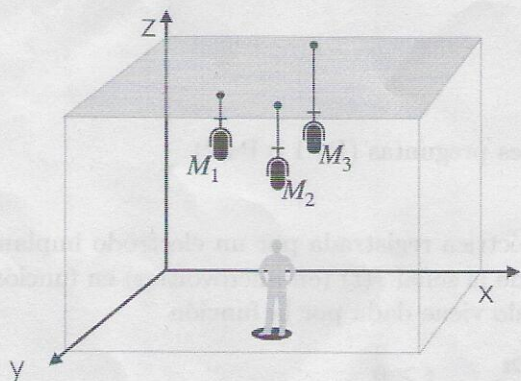


La prueba consta de cinco preguntas: las tres primeras obligatorias, y en la cuarta y quinta se puede elegir entre dos opciones. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero. Véase la puntuación en cada ejercicio.

Justificad las respuestas utilizando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite el uso de calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. (preguntas 1, 2 y 3). Contestad TODAS las preguntas de esta parte.

Problema 1. — En un estudio de grabación se han colocado tres micrófonos colgados del techo con cables de distintas longitudes para grabar un concierto acústico.



Considerando un sistema de referencia en el que el origen se encuentra en el suelo de la sala, el techo del estudio se sitúa a una altura de 7m, tal como se muestra en la figura.

Los micrófonos se colocan en las siguientes posiciones:

- Micrófono 1 (M_1): coordenadas $x = 2$, $y = 3$, colgado del techo con un cable de longitud 1m.
- Micrófono 2 (M_2): coordenadas $x = 4$, $y = 4$, colgado del techo con un cable de longitud 2m.
- Micrófono 3 (M_3): coordenadas $x = 5$, $y = 1$, colgado del techo con un cable de longitud 3m.

Durante el ensayo, un músico se sitúa en el punto $P(4,3,0)$, que representa su posición sobre el escenario.

- [1 punto] Determina las coordenadas de los tres micrófonos y calcula la ecuación del plano que los contiene.
- [1 punto] Sea π el plano que contiene los micrófonos M_1 , M_2 y M_3 . Con el fin de mejorar la calidad del sonido, se desea colocar un cuarto micrófono M_4 de manera que sea la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π . Determina las coordenadas de este cuarto micrófono.



Problema 2. — [2 puntos] Sea $f(x) = \frac{4x^3}{x^2 + 1} \ln(x)$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Problema 3. — Una plataforma de streaming de videojuegos ha analizado los hábitos de sus usuarios durante un año. El estudio muestra que el 40 % de los usuarios juegan principalmente a juegos competitivos en línea. De entre estos usuarios competitivos, el 30 % participa habitualmente en torneos oficiales. En cambio, de entre los usuarios que no juegan principalmente a juegos competitivos, se sabe que el 20 % también participa en torneos oficiales.

- (a) [0.5 puntos] Si se selecciona aleatoriamente un usuario que no juega principalmente a juegos competitivos, ¿cuál es la probabilidad de que no participe en torneos oficiales?
- (c) [1.5 puntos] Si se selecciona aleatoriamente un usuario y se sabe que participa en torneos oficiales, ¿qué es más probable, que juegue principalmente a juegos competitivos o que no?

Parte B. preguntas 4 y 5

Problema 4. — Contestad solo UNA de las siguientes preguntas (P4.1 o P4.2)

P4.1 Se pretende estudiar la intensidad de la señal eléctrica registrada por un electrodo implantado en un área de la corteza cerebral. La intensidad de la señal $I(t)$ (en microvoltios) en función del tiempo t (en milisegundos) después de un estímulo viene dada por la función

$$I(t) = 50te^{-0.2t}, \quad t \geq 0.$$

- (a) [1 punto] Calcula en qué instante de tiempo la intensidad de la señal es máxima y cuál es dicha intensidad.
- (b) [1 punto] Calcula una primitiva de la función $I(t)$, es decir, determina $\int I(t) dt$.

P4.2 [2 puntos] La desviación vertical de un dron, $y(t)$ (en metros), respecto de una altura de referencia tras una perturbación inicial, se describe a lo largo del tiempo t (en segundos) como

$$y(t) = \frac{t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^4 + 2}, \quad t \geq 0,$$

donde los valores positivos de $y(t)$ indican que el dron se encuentra por encima de la altura de referencia, mientras que los valores negativos indican que se encuentra por debajo de esta.

Demuestra que existe al menos un instante de tiempo t en el que el dron se encuentra exactamente a la altura de referencia.

Problema 5. — Contestad solo UNA de las siguientes preguntas (P5.1 o P5.2)

P5.1 Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible y

$$AB + A + I = 2A,$$

con I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

(a) [1 punto] Calcula la inversa de A en función de I y B .

(b) [1 punto] Sean

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcula $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A cumple la igualdad del enunciado.

P5.2 [2 puntos] En un estudio de mezclas químicas, se preparan tres componentes químicos utilizando tres sustancias diferentes. Las cantidades (en litros) de cada sustancia utilizada son x , y y z .

Las condiciones experimentales imponen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + mz = 3, \end{cases}$$

donde $m \geq 0$ es un parámetro real que depende de la concentración de un catalizador.

Discute, según los valores del parámetro m , si se pueden determinar o no las cantidades de cada sustancia.