



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

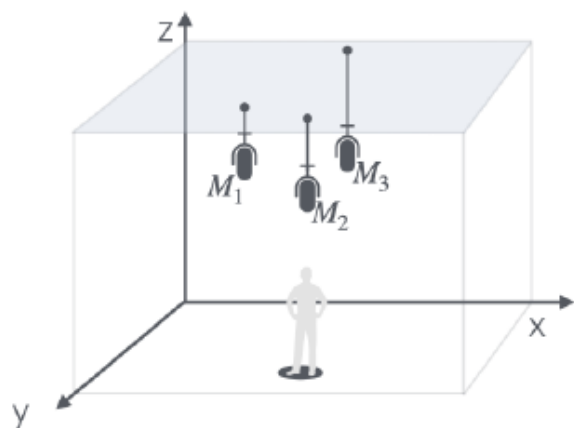
Model 2

La prueba consta de cinco preguntas: las tres primeras obligatorias, y en la cuarta y quinta se puede elegir entre dos opciones. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero. Véase la puntuación en cada ejercicio.

Justificad las respuestas utilizando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite el uso de calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. (preguntas 1, 2 y 3). Contestad TODAS las preguntas de esta parte

Problema 1.– En un estudio de grabación se han colocado tres micrófonos colgados del techo con cables de distintas longitudes para grabar un concierto acústico.



Considerando un sistema de referencia en el que el origen se encuentra en el suelo de la sala, el techo del estudio se sitúa a una altura de 7 m, tal como se muestra en la figura.

Los micrófonos se colocan en las siguientes posiciones:

- * Micrófono 1 (M_1): coordenadas $x = 2$, $y = 3$, colgado del techo con un cable de longitud 1 m.
- * Micrófono 2 (M_2): coordenadas $x = 4$, $y = 4$, colgado del techo con un cable de longitud 2 m.
- * Micrófono 3 (M_3): coordenadas $x = 5$, $y = 1$, colgado del techo con un cable de longitud 3 m.

Durante el ensayo, un músico se sitúa en el punto $P(4,3,0)$, que representa su posición sobre el escenario.

- (a) **[1 punto]** Determina las coordenadas de los tres micrófonos y calcula la ecuación del plano que los contiene.
- (b) **[1 punto]** Sea π el plano que contiene los micrófonos M_1 , M_2 y M_3 . Con el fin de mejorar la calidad del sonido, se desea colocar un cuarto micrófono M_4 de manera que sea la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π . Determina las coordenadas de este cuarto micrófono.

Problema 2.– **[2 puntos]** Sea $f(x) = \frac{4x^3}{x^2 + 1} \ln(x)$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Problema 3.– Una plataforma de streaming de videojuegos ha analizado los hábitos de sus usuarios durante un año. El estudio muestra que el 40% de los usuarios juegan principalmente a juegos competitivos en línea. De entre estos usuarios competitivos, el 30% participa

habitualmente en torneos oficiales. En cambio, entre los usuarios que no juegan principalmente a juegos competitivos, se sabe que el 20% también participa en torneos oficiales.

- (a) **[0.5 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente un usuario que no juega principalmente a juegos competitivos, ¿cuál es la probabilidad de que no participe en torneos oficiales?
- (c) **[1.5 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente un usuario y se sabe que participa en torneos oficiales, ¿qué es más probable, que juegue principalmente a juegos competitivos o que no?

Parte B. (preguntas 4 y 5).

Problema 4.– Contestad sólo UNA de las siguientes preguntas (P4.1 o P4.2)

P4.1 Se pretende estudiar la intensidad de la señal eléctrica registrada por un electrodo implantado en un área de la corteza cerebral. La intensidad de la señal $I(t)$ (en microvoltios) en función del tiempo t (en milisegundos) después de un estímulo viene dada por la función

$$I(t) = 50te^{-0.2t}, \quad t \geq 0.$$

- (a) **[1 punto]** Calcula en qué instante de tiempo la intensidad de la señal es máxima y cuál es dicha intensidad.
- (b) **[1 punto]** Calcula una primitiva de la función $I(t)$, es decir, determina $\int I(t) dt$.

P4.2 [2 puntos] La desviación vertical de un dron, $y(t)$ (en metros), respecto de una altura de referencia tras una perturbación inicial, se describe a lo largo del tiempo t (en segundos) como

$$y(t) = \frac{t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^4 + 2}, \quad t \geq 0$$

donde los valores positivos de $y(t)$ indican que el dron se encuentra por encima de la altura de referencia, mientras que los valores negativos indican que se encuentra por debajo de esta. Demuestra que existe al menos un instante de tiempo t en el que el dron se encuentra exactamente a la altura de referencia.

Problema 5.– Contestad sólo UNA de las siguientes preguntas (P5.1 o P5.2)

P5.1 Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible y

$$AB + A + I = 2A$$

con I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

- (a) **[1 punto]** Calcula la inversa de A en función de I y B .
- (b) **[1 punto]** Sean

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, calcula x tal que $Ax = b$, donde A cumple la igualdad del enunciado.

P5.2 [2 puntos] En un estudio de mezclas químicas, se preparan tres componentes químicos utilizando tres sustancias diferentes. Las cantidades (en litros) de cada sustancia utilizada son x , y y z .

Las condiciones experimentales imponen las siguientes relaciones:

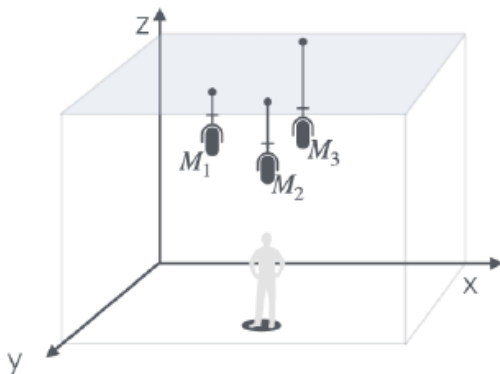
$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + mz = 3. \end{cases}$$

donde $m \geq 0$ es un parámetro real que depende de la concentración de un catalizador.

Discute, según los valores del parámetro m , si se pueden determinar o no las cantidades de cada sustancia.

SOLUCIONES

Problema 1.– En un estudio de grabación se han colocado tres micrófonos colgados del techo con cables de distintas longitudes para grabar un concierto acústico.



Considerando un sistema de referencia en el que el origen se encuentra en el suelo de la sala, el techo del estudio se sitúa a una altura de 7 m, tal como se muestra en la figura.

Los micrófonos se colocan en las siguientes posiciones:

* Micrófono 1 (M_1): coordenadas $x = 2$, $y = 3$, colgado del techo con un cable de longitud 1 m.

* Micrófono 2 (M_2): coordenadas $x = 4$, $y = 4$, colgado del techo con un cable de longitud 2 m.

* Micrófono 3 (M_3): coordenadas $x = 5$, $y = 1$, colgado del techo con un cable de longitud 3 m.

Durante el ensayo, un músico se sitúa en el punto $P(4,3,0)$, que representa su posición sobre el escenario.

(a) **[1 punto]** Determina las coordenadas de los tres micrófonos y calcula la ecuación del plano que los contiene.

(b) **[1 punto]** Sea π el plano que contiene los micrófonos M_1 , M_2 y M_3 . Con el fin de mejorar la calidad del sonido, se desea colocar un cuarto micrófono M_4 de manera que sea la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π . Determina las coordenadas de este cuarto micrófono.

a) El micrófono M_1 está situado a $7 - 1 = 6$ metros del suelo. Sus coordenadas son $M_1(2,3,6)$

El micrófono M_2 está situado a $7 - 2 = 5$ metros del suelo. Sus coordenadas son $M_2(4,4,5)$.

El micrófono M_3 está situado a $7 - 3 = 4$ metros del suelo. Sus coordenadas son $M_3(5,1,4)$

Hallamos la ecuación del plano que los contiene.

$$\left. \begin{array}{l} M_1(2,3,6) \in \pi \\ M_2(4,4,5) \in \pi \\ M_3(5,1,4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2} = (4,4,5) - (2,3,6) = (2,1,-1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{M_1M_3} = (5,1,4) - (2,3,6) = (3,-2,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

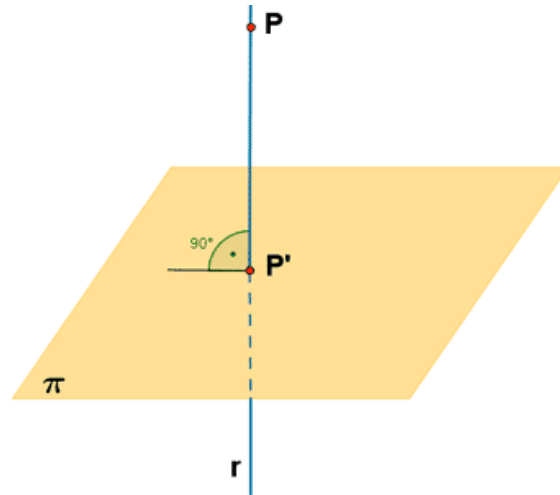
$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-2) - 3(y-3) - 4(z-6) - 4(z-6) +$$

$$-3(y-3) - 2(x-2) = 0 \Rightarrow -4(x-2) + (y-3) - 7(z-6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 8 + y - 3 - 7z + 42 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -4x + y - 7z + 47 = 0}$$

El plano que contiene los tres micrófonos tiene ecuación $\pi: -4x + y - 7z + 47 = 0$.

- b) El plano $\pi: -4x + y - 7z + 47 = 0$ tiene como vector normal $\vec{n} = (-4, 1, -7)$. Hallamos la ecuación de la recta r perpendicular al plano que contiene al punto P.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (-4, 1, -7) \\ P(4, 3, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -7\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

El punto P' de corte entre el plano π y la recta r es la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -7\lambda \end{cases} \\ \pi: -4x + y - 7z + 47 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -4(4 - 4\lambda) + 3 + \lambda - 7(-7\lambda) + 47 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 + 16\lambda + 3 + \lambda + 49\lambda + 47 = 0 \Rightarrow 66\lambda + 34 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-34}{66} = \frac{-17}{33} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 4\left(\frac{-17}{33}\right) = \frac{200}{33} \\ y = 3 - \frac{17}{33} = \frac{82}{33} \\ z = -7\left(\frac{-17}{33}\right) = \frac{119}{33} \end{cases} \Rightarrow P' \left(\frac{200}{33}, \frac{82}{33}, \frac{119}{33} \right)$$

El cuarto micrófono debe colocarse en la posición $P' \left(\frac{200}{33}, \frac{82}{33}, \frac{119}{33} \right)$.

Problema 2.– [2 puntos] Sea $f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1} \ln(x)$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Calculamos el valor del límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3}{x^2+1} \ln(x) = \frac{4 \cdot 0^3}{0^2+1} \ln(0^+) = 0 \cdot (-\infty) = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{x^2+1}{4x^3}} = \frac{\ln(0^+)}{\frac{0^2+1}{4 \cdot 0^3}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x \cdot 4x^3 - 12x^2(x^2+1)}{(4x^3)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{8x^4 - 12x^4 - 12x^2}{16x^6}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-4x^4 - 12x^2}{16x^6}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{16x^6}{x(-4x^4 - 12x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{16x^6}{-4x^3(x^2+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x^3}{x^2+3} = \frac{-4 \cdot 0^3}{0^2+3} = \frac{0}{3} = \boxed{0}$$

Problema 3.– Una plataforma de streaming de videojuegos ha analizado los hábitos de sus usuarios durante un año. El estudio muestra que el 40% de los usuarios juegan principalmente a juegos competitivos en línea. De entre estos usuarios competitivos, el 30% participa habitualmente en torneos oficiales. En cambio, entre los usuarios que no juegan principalmente a juegos competitivos, se sabe que el 20% también participa en torneos oficiales.

(a) **[0.5 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente un usuario que no juega principalmente a juegos competitivos, ¿cuál es la probabilidad de que no participe en torneos oficiales?

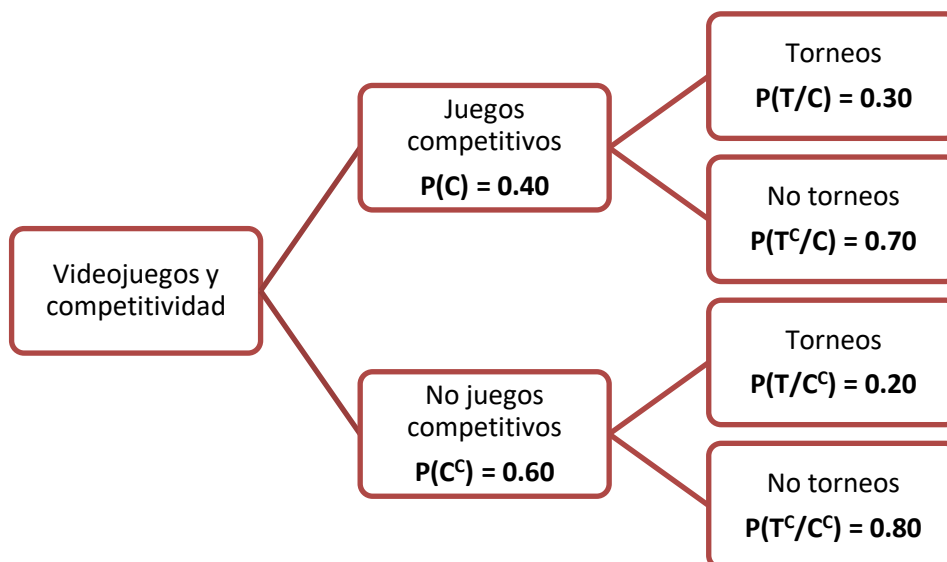
(c) **[1.5 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente un usuario y se sabe que participa en torneos oficiales, ¿qué es más probable, que juegue principalmente a juegos competitivos o que no?

Llamamos C a “el usuario juega principalmente a juegos competitivos en línea” y T a “el usuario participa en torneos oficiales”.

(a) Si entre los usuarios que no juegan principalmente a juegos competitivos, se sabe que el 20% también participa en torneos oficiales, entonces habrá un $100 - 20 = 80\%$ que no participa en torneos oficiales.

La probabilidad de que el jugador elegido al azar que no juega principalmente a juegos competitivos participe en torneos oficiales vale 0.8.

(b) Realizamos un diagrama de árbol.



Calculamos $P(C/T)$ y $P(C^c/T)$. Son probabilidades a posteriori. Las calculamos usando el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(C/T) &= \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{P(C)P(T/C)}{P(C)P(T/C) + P(C^c)P(T/C^c)} = \\
 &= \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.2} = \frac{0.12}{0.24} = \boxed{0.5}
 \end{aligned}$$

Como $P(C/T) = 0.5$ entonces $P(C^c/T) = 1 - P(C/T) = 1 - 0.5 = 0.5$.

Es igual de probable que el jugador elegido juegue a juegos competitivos o no.

$$P(C^c/T) = P(C/T) = 0.5$$

P4.1 Se pretende estudiar la intensidad de la señal eléctrica registrada por un electrodo implantado en un área de la corteza cerebral. La intensidad de la señal $I(t)$ (en microvoltios) en función del tiempo t (en milisegundos) después de un estímulo viene dada por la función

$$I(t) = 50te^{-0.2t}, \quad t \geq 0.$$

(a) **[1 punto]** Calcula en qué instante de tiempo la intensidad de la señal es máxima y cuál es dicha intensidad.

(b) **[1 punto]** Calcula una primitiva de la función $I(t)$, es decir, determina $\int I(t) dt$.

(a) Obtenemos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$I(t) = 50te^{-0.2t} \Rightarrow I'(t) = 50e^{-0.2t} + 50t(-0.2)e^{-0.2t} = 50e^{-0.2t} - 10te^{-0.2t} = (50 - 10t)e^{-0.2t}$$

$$I'(t) = 0 \Rightarrow (50 - 10t)e^{-0.2t} = 0 \Rightarrow \{e^{-0.2t} \neq 0\} \Rightarrow 50 - 10t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 5}$$

Sustituimos $t = 5$ en la segunda derivada.

$$I'(t) = (50 - 10t)e^{-0.2t} \Rightarrow I''(t) = (-10)e^{-0.2t} + (50 - 10t)(-0.2)e^{-0.2t} \Rightarrow$$

$$I''(t) = (-10 - 10 + 2t)e^{-0.2t} = (-20 + 2t)e^{-0.2t} \Rightarrow I''(5) = (-20 + 10)e^{-0.2 \cdot 5} = \frac{-10}{e} < 0$$

Para $t = 5$ la primera derivada se anula y la segunda es negativa. La función presenta un máximo relativo en $t = 5$.

$$\text{Tenemos que } I(5) = 50 \cdot 5 \cdot e^{-0.2 \cdot 5} = \frac{250}{e} \approx 92.$$

La máxima intensidad se produce a los 5 milisegundos con una intensidad de señal aproximada de 92 microvoltios.

(b) Calculamos la integral indefinida pedida.

$$\int I(t) dt = \int 50te^{-0.2t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 50t \rightarrow du = 50dt \\ dv = e^{-0.2t} dt \rightarrow v = \int e^{-0.2t} dt = \frac{e^{-0.2t}}{-0.2} = -5e^{-0.2t} \end{array} \right\} =$$

$$= 50t \cdot (-5)e^{-0.2t} - \int 50 \cdot (-5)e^{-0.2t} dt = -250te^{-0.2t} + 250 \int e^{-0.2t} dt =$$

$$= -250te^{-0.2t} + 250 \frac{e^{-0.2t}}{-0.2} = -250te^{-0.2t} - \frac{250}{0.2} e^{-0.2t} = \boxed{250te^{-0.2t} - 1250e^{-0.2t} + K}$$

P4.2 [2 puntos] La desviación vertical de un dron, $y(t)$ (en metros), respecto de una altura de referencia tras una perturbación inicial, se describe a lo largo del tiempo t (en segundos) como

$$y(t) = \frac{t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^4 + 2}, \quad t \geq 0$$

donde los valores positivos de $y(t)$ indican que el dron se encuentra por encima de la altura de referencia, mientras que los valores negativos indican que se encuentra por debajo de esta. Demuestra que existe al menos un instante de tiempo t en el que el dron se encuentra exactamente a la altura de referencia.

$y(t)$ es una función racional, numerador y denominador son funciones polinómicas continuas, en la que el denominador no se anula para ningún valor de t . Por tanto $y(t)$ es una función continua.

Además
$$\left. \begin{aligned} y(0) &= \frac{0^3 + 0^2 + 2 \cdot 0 - 1}{0^4 + 2} = \frac{-1}{2} < 0 \\ y(1) &= \frac{1^3 + 1^2 + 2 \cdot 1 - 1}{1^4 + 2} = 1 > 0 \end{aligned} \right\},$$
 por tanto, según el teorema de Bolzano existe al

menos un valor $c \in (0,1)$ tal que $y(c) = 0$. Este valor de c segundos es cuando el dron se encuentra exactamente a la altura de referencia.

P5.1 Sean A y B dos matrices 3 x 3 tales que A es invertible y

$$AB + A + I = 2A$$

con I la matriz identidad de dimensión 3 x 3.

(a) [1 punto] Calcula la inversa de A en función de I y B.

(b) [1 punto] Sean

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, calcula x tal que $Ax = b$, donde A cumple la igualdad del enunciado.

(a) Despejamos A en la igualdad matricial.

$$AB + A + I = 2A \Rightarrow AB + A - 2A = -I \Rightarrow AB - A = -I \Rightarrow A - AB = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(I - B) = I \Rightarrow A^{-1}A(I - B) = A^{-1}I \Rightarrow \boxed{I - B = A^{-1}}$$

La inversa de A se puede obtener como $A^{-1} = I - B$.

(b) Operamos en la igualdad despejando x.

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = (I - B)b \Rightarrow x = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \\ 0 - 3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

P5.2 [2 puntos] En un estudio de mezclas químicas, se preparan tres componentes químicos utilizando tres sustancias diferentes. Las cantidades (en litros) de cada sustancia utilizada son x , y y z .

Las condiciones experimentales imponen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + mz = 3. \end{cases}$$

donde $m \geq 0$ es un parámetro real que depende de la concentración de un catalizador.

Discute, según los valores del parámetro m , si se pueden determinar o no las cantidades de cada sustancia.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m & 3 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad m \quad 3 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad m-1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & & \overbrace{A/B} & \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \underbrace{m-1}_A & 0 \end{array} \right)$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$

En este caso el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 1$

En este caso la matriz ampliada queda $\left(\begin{array}{cccc} & & \overbrace{A/B} & \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \underbrace{0}_A & 0 \end{array} \right)$. Los rangos de A y de A/B son

iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: Para cualquier valor de m distinto de 1 las cantidades de cada sustancia se pueden determinar. Para $m = 1$ no se puede determinar de forma exacta las cantidades de cada sustancia. Para este valor hay muchas soluciones para las cantidades de cada sustancia.