

## Criteris de correcció globals

- Les respostes a les preguntes o tasques s'han de redactar expressant de forma raonada el procés seguit en la resolució, amb el rigor i la precisió necessaris, usant el llenguatge, la notació i els símbols matemàtics adequats, i utilitzant arguments, justificacions, explicacions i raonaments explícits i coherents. El grau de compliment es valorarà amb un màxim d'1 punt en tota la prova.
  - Els errors de càlcul es penalitzaran amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
  - En preguntes mecàniques o de càlcul no justificades, amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
  - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
  - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (per exemple, variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
  - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- La simple descripció del plantejament, sense que es dugui a terme la resolució de manera efectiva, no és suficient per obtenir una valoració completa de la pregunta o tasca.
- En les preguntes o tasques en què es demani expressament una deducció raonada, la simple aplicació d'una fórmula no serà suficient per obtenir-ne una valoració completa.
- Els errors comesos en una pregunta o tasca (per exemple, en el càlcul del valor d'un cert paràmetre) no es tendran en compte en la qualificació dels desenvolupaments posteriors que se'n puguin veure afectats, sempre que resultin d'una complexitat equivalent. En el cas de la pregunta competencial-contextualitzada, sí que es penalitzarà si els resultats que es van obtenint no tenen coherència dins el context.
- Si l'alumne presenta més problemes que els demanats, corriu-ne els que apareixen primer.

## Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta". Si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració.

## Part A.

### Problema 1. — Solució.

(a) Les coordenades dels micròfons són

$$M_1 : (2, 3, 7 - 1) = (2, 3, 6),$$

$$M_2 : (4, 4, 7 - 2) = (4, 4, 5),$$

$$M_3 : (5, 1, 7 - 3) = (5, 1, 4).$$

Aleshores, els vectors directores del pla que els conté són

$$d_1 = M_1 \vec{M}_2 = (2, 1, -1), \quad d_2 = M_1 \vec{M}_3 = (3, -2, -2).$$

Finalment, l'equació vectorial del pla seria

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda + 3\beta, \\ y = 3 + \lambda - 2\beta, \\ z = 6 - \lambda - 2\beta. \end{cases}$$

Si volem donar l'equació explícita, necessitem calcular el vector normal al pla, és a dir,

$$\vec{n} : \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-4, 1, -7),$$

i imposar que el punt  $M_1$  pertanyi al pla  $\pi : -4x + y - 7z + D = 0$ . Així doncs,

$$-4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 7 \cdot 6 + D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = 47.$$

Aleshores,

$$\pi : -4x + y - 7z + 47 = 0.$$

(b) Necessitem calcular la recta perpendicular al pla que passa per  $P$ , i quan la tenguem, calcular el punt d'intersecció entre el pla i aquesta recta. Aleshores, la recta que cerquem té vector director  $\vec{n} = (-4, 1, -7)$  i passa per  $P(4, 3, 0)$ , és a dir,

$$r : \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -7\lambda. \end{cases}$$

Calculant ara  $r \cap \pi$ ,

$$-4(4 - 4\lambda) + (3 + \lambda) - 7(-7\lambda) + 47 = 0,$$

$$-16 + 16\lambda + 3 + \lambda + 49\lambda + 47 = 0$$

$$34 + 66\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{17}{33},$$

tenim que el punt on volem situar el quart micròfon  $M_4$  és

$$M_4 : \left( 4 + 4\frac{17}{33}, 3 - \frac{17}{33}, 7\frac{17}{33} \right) = \left( \frac{200}{33}, \frac{82}{33}, \frac{119}{33} \right) \approx (6.0606, 2.4848, 3.6060).$$

Una altra manera de resoldre l'apartat és considerant que

$$O\vec{M}_4 = O\vec{P} + \text{dist}(P, \pi) \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|},$$

és a dir, que ens desplacem, des de  $P$ ,  $\text{dist}(P, \pi)$  unitats per sobre el vector normal unitari en direcció  $z > 0$ .

Així doncs, per una banda tenim que la distància del punt al pla és

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|-4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 7 \cdot 0 + 47|}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-7)^2}} = \frac{34}{\sqrt{66}},$$

el vector normal unitari, amb  $z > 0$ , és

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{66}}(4, -1, 7),$$

i, per tant,

$$O\vec{M}_4 = (4, 3, 0) + \frac{34}{66}(4, -1, 7) = \left( \frac{200}{33}, \frac{82}{33}, \frac{119}{33} \right).$$

Llavors  $M_4$  té coordenades

$$M_4 : \left( \frac{200}{33}, \frac{82}{33}, \frac{119}{33} \right).$$

### Criteris:

- (a) 0.3 punts per calcular bé els punts. Si aquests són correctes, i 0.7 punts per donar una equació del pla correcta (0.5 per calcular bé els vectors i 0.2 per proporcionar una expressió correcta). Si els punts no són correctes, no s'avalua la resta.
- (b) 0.5 punts per calcular correctament la recta  $r$  i 0.5 punts per calcular correctament la posició de  $M_4$ .  
Si ho resolen calculant distàncies, llavors s'avalua amb 0.25 punts el càlcul de la distància del punt al pla, 0.25 punts per calcular correctament el vector unitari, 0.25 per utilitzar correctament la direcció del vector normal i, finalment, 0.25 per calcular correctament el punt.

Es penalitza amb  $-0.2$  punts cada error de càlcul (es permeten màxim 2 errors).

Es penalitza amb un màxim de  $-0.4$  punts si la formalització matemàtica no és adequada.

**Problema 2.** — *Solució.*

- (a) Notem que el domini de la funció és  $(0, +\infty)$ . A més,  $\ln(x)$  tendeix a  $-\infty$  a mesura que  $x$  s'aproxima a 0. Aleshores,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3}{x^2 + 1} \ln(x) = 0 \cdot (-\infty),$$

que és una indeterminació que la podem convertir en una de la forma  $\infty/\infty$  i aplicar L'Hôpital. Així doncs,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3}{x^2 + 1} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{x^2 + 1}{4x^3}}.$$

Aplicant ara L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x(4x^3) - (x^2 + 1)12x^2}{(4x^3)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{8x^4 - 12x^4 - 12x^2}{(4x^3)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{16x^6}{x^3(-4x^2 - 12)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{16x^3}{-4x^2 - 12} = 0.$$

Per tant, com que el límit després d'aplicar l'Hôpital existeix,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3}{x^2 + 1} \ln(x) = 0.$$

**Criteris:** 0.25 punts per veure que es tracta d'una indeterminació  $0 \cdot \infty$ , 0.25 punts per transformar la indeterminació  $0 \cdot \infty$  en  $\infty/\infty$ , 0.5 punts per aplicar correctament L'Hôpital a la funció correcta, 1 punt per calcular el límit resultant de L'Hôpital correctament (0.5 per simplificar l'expressió correctament i 0.5 per arribar al resultat final).

Es penalitza amb  $-0.2$  punts si no indiquen explícitament que apliquen l'Hôpital.

Es penalitza amb un màxim de  $-0.4$  punts si la formalització matemàtica no és adequada.

La resolució per mitjà d'una taula de valors és incorrecta.

**Problema 3.** — *Solució.* Sigui  $C$  el succés “jugar principalment a jocs competitius” i  $O$  el succés “participar en tornejos oficials”. Tenim que,

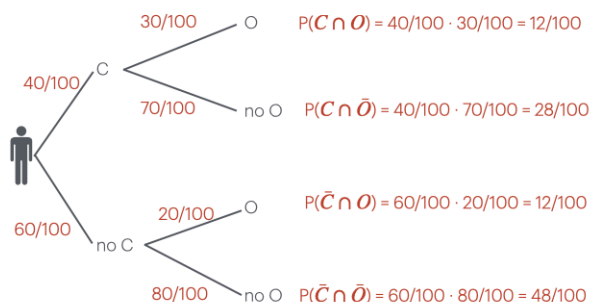
$$(a) \quad P(\bar{O}|\bar{C}) = \frac{80}{100} = 0.8.$$

- (b) Calculem les dues probabilitats demanades per poder-les comparar. Llavors,

$$P(C|O) = \frac{P(C \cap O)}{P(O)} = \frac{12/100}{12/100 + 12/100} = 0.5.$$

$$P(\bar{C}|O) = \frac{P(\bar{C} \cap O)}{P(O)} = \frac{12/100}{12/100 + 12/100} = 0.5.$$

Com que ambdues probabilitats són les mateixes, és igual de probable.



### Criteris:

- (a) 0.25 punts pel plantejament i notació correctes, 0.25 punts per la resposta correcta.
- (b) 0.25 punts per probabilitat ben plantejada, 0.25 punts per probabilitat ben calculada i 0.5 punts per donar la resposta final.

Es penalitza amb  $-0.2$  punts si no defineixen els successos correctament.

Es penalitza tot l'apartat (puntuació: 0 punts) si el resultat és incoherent (probabilitats fora de l'interval  $[0, 1]$ ).

### Part B.

#### Problema 4. — P4.1 Solució.

- (a) Volem trobar el màxim de la funció. Aleshores,

$$I'(t) = 50e^{-0.2t} + 50te^{-0.2t}(-0.2) = (50 - 10t)e^{-0.2t} = 0 \Leftrightarrow 50 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 5 \text{ ms.}$$

$$I(5) = 50 \cdot 5e^{-0.2 \cdot 5} = 250e^{-1} \approx 91.97 \text{ mV.}$$

Finalment, com que  $I'(0) > 0$  i  $I'(10) < 0$ , veim que en efecte es tracte d'un màxim.

- (b) Volem calcular una primitiva de  $I(t)$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} \int 50te^{-0.2t} dt &= 50 \int te^{-0.2t} dt = \left| \begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-0.2t} dt \Rightarrow v = -5e^{-0.2t} \end{array} \right| \\ &= 50 \left( -5te^{-0.2t} - \int -5e^{-0.2t} dt \right) \\ &= 50 \left( -5te^{-0.2t} - 25 \int -0.2e^{-0.2t} dt \right) = -250te^{-0.2t} - 1250e^{-0.2t} + K. \end{aligned}$$

**Criteris:**

- (a) 0.25 punts per calcular correctament la derivada, 0.5 punts per veure que en  $t = 5$  hi ha un màxim (0.25 pel càlcul de  $t$  i 0.25 per comprovar que és un màxim) i 0.25 punts per calcular correctament  $I(5)$ .
- (b) 0.5 punts per plantejar bé la integral per parts i 0.5 punts per resoldre correctament la integral. Es penalitza amb  $-0.2$  punts si no es posa la constant d'integració i amb  $-0.2$  punts per cada error de càlcul (es permeten màxim 2 errors).

Es penalitza amb un màxim de  $-0.4$  punts si la formalització matemàtica no és adequada. En el cas del diferencial  $dt$ , si s'obliden màxim de dos  $dt$ , es penalitza amb  $-0.2$  punts,  $-0.25$  altrament.

**P4.2 Solució.** Volem veure si existeix un punt  $t = t^*$  tal que  $y(t^*) = 0$ . Notem que la funció  $y(t)$  és contínua per ser una divisió de polinomis on el denominador no s'anul·la. A més,  $y(0) = -\frac{1}{2} < 0$ , mentre que  $y(1) = \frac{3}{3} = 1 > 0$ . Aleshores, pel teorema de Bolzano sabem que existeix un punt  $t^* \in (0, 1)$  tal que  $y(t^*) = 0$  tal com volíem veure.

**Criteris:** 0.5 per justificar bé que la funció és contínua, 0.5 per veure dos temps  $t_1$  i  $t_2$  tals que  $y(t_1) \cdot y(t_2) < 0$ , 0.5 punts per indicar que empren el teorema de Bolzano i 0.5 punts per concloure l'existència de  $t^*$ .

Enunciar correctament el teorema de Bolzano sense aplicar-lo no és suficient per a obtenir alguna puntuació del problema.

**Problema 5. — P5.1 Solució.**

- (a) Reescrivim la igualtat del problema de tal manera que obtenguem  $AA^{-1} = I$  o  $A^{-1}A = I$ . Així doncs,

$$\begin{aligned} AB + A + I &= 2A \Leftrightarrow AB + A + I - 2A = 0 \Leftrightarrow AB - A = -I \\ &\Leftrightarrow I = A - AB \Leftrightarrow I = A(I - B). \end{aligned}$$

Aleshores,  $A^{-1} = I - B$ .

- (b) Volem calcular ara  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  i sabem que  $A^{-1} = I - B$ . Aleshores, aïllant  $\mathbf{x}$  tenim que

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = (I - B)\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

**Criteris:**

- (a) Es penalitza amb 0.5 punts per error en l'aïllament per trobar  $A^{-1}$ . En el cas de multiplicacions, es penalitza tot l'apartat.
- (b) 0.5 punts si el procediment és correcte i 0.5 punts si la solució és correcta.

Es penalitza amb un màxim de  $-0.4$  punts si la formalització matemàtica no és adequada.

**P5.2 Solució.** El sistema escrit en forma matricial és  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calculem primer el  $\text{Rang}(A)$ . Tenim que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m + 2 + 1 - 1 - 1 - 2m = -m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1.$$

Aleshores,

- Si  $m \neq 1$ ,  $\det(A) \neq 0$  i, per tant,  $\text{Rang}(A) = 3$ .
- Si  $m = 1$ ,  $\det(A) = 0$ , però

$$\det(M_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0,$$

per la qual cosa  $\text{Rang}(A) = 2$ .

Calculem ara el rang de la matriu ampliada, és a dir,  $\text{Rang}(A|\mathbf{b})$ . Notem que és una matriu  $3 \times 4$ , llavors  $\text{Rang}(A|\mathbf{b}) \leq 3$ .

- Si  $m \neq 1$ , com que  $\det(A) \neq 0$ ,  $\text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3$ .
- Si  $m = 1$ , tenim que la segona i tercera columna de  $A$  són iguals, per la qual cosa se n'ha de substituir una pel vector  $\mathbf{b}$  per tenir l'opció d'obtenir un determinant no nul. Ara bé,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 + 4 - 3 - 4 - 6 = 0,$$

llavors  $\text{Rang}(A|\mathbf{b}) < 3$ . Ara bé, sabem que  $\det(M_{33}) \neq 0$  i, per tant,  $\text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 2$ .

En resum,

| Valor de $m$            | $\text{Rang}(A)$ | $\text{Rang}(A \mathbf{b})$ | Nombre d'incògnites | Discussió                    |
|-------------------------|------------------|-----------------------------|---------------------|------------------------------|
| $m \neq 1$ i $m \geq 0$ | 3                | 3                           | 3                   | SCD (una solució)            |
| $m = 1$                 | 2                | 2                           | 3                   | SCI (una recta de solucions) |

Per consegüent, les quantitats de cada substància estan unívocament determinades si  $m \neq 1$  (i  $m \geq 0$  per l'enunciat). Altrament, hi ha una relació entre elles, però no podem saber-ne el valor exacte.

**Criteris:** Si ho resolen emprant rangs: (1) 0.25 punts per calcular correctament  $\det(A) = 0$ ; (2) en el cas  $m \neq 1$ , 0.25 punts per calcular correctament  $\text{Rang}(A)$  i  $\text{Rang}(A|\mathbf{b})$ , i 0.25 punts per concloure que és un SCD; (3) en el cas  $m = 1$ , 0.25 punts per calcular correctament el  $\text{Rang}(A)$ , 0.25 punts per calcular correctament el  $\text{Rang}(A|\mathbf{b})$ , i 0.25 punts per concloure que és SCI; finalment, (4) 0.5 punts per respondre a la pregunta justificadament (0.25 punts cada cas).

Si ho resolen directament calculant les solucions del sistema o per Gauss, han d'arribar a la solució argumentat-la correctament per tenir la puntuació.

Es penalitza amb un màxim de  $-0.4$  punts si la formalització matemàtica no és adequada.