

**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD****PAU****CURSO 2025–2026****MATERIA: MATEMÁTICAS II****(4)****Convocatoria:****Instrucciones:**

- Debe responder un máximo de 5 preguntas: 3 obligatorias y 2 opcionales de bloques diferentes.
- En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque opcional, se considerará sólo la primera pregunta.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet

Bloque 1. Análisis I (La barredora de ceniza volcánica)

1. Tras la erupción del volcán Tajogaite (La Palma, 2021) un equipo de ingenieros ha desarrollado un prototipo de barredora marítima para recoger la ceniza que llega al mar, con una capacidad de $0.5 \text{ km}^2/\text{hora}$. Para la construcción del prototipo, se ha modelizado mediante $f(t)$ la superficie afectada por la mancha de ceniza en km^2 , siendo t los días transcurridos desde que comienzan la monitorización de la mancha marítima.

$$f(t) = \frac{10t + 5}{2t^2 + 4} + 5$$

- Estudiar el crecimiento y decrecimiento del modelo propuesto.
¿Existe algún valor extremo en el modelo? En caso afirmativo, ¿cuál es el tamaño de la mancha de ceniza en ese punto? 1
- Un técnico del equipo afirma que no hará falta la intervención de medios de limpieza ya que pasado un tiempo la mancha desaparecerá. ¿Es cierta esta afirmación? Justificar la respuesta. 0.5
- La barredora se pone en funcionamiento el cuatro día después de comenzar a monitorizar la mancha. Si la superficie de la mancha no recibiera más ceniza y se mantuviera constante a partir de ese día, ¿cuánto tiempo tardaría la barredora en eliminar la mancha de ceniza? 0.5

Bloque 2.- Álgebra

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hallar dos matrices cuadradas de dimensión 3 tales que al sumar la primera con el doble de la segunda se obtiene la matriz A . Y, si se le resta a la primera el doble de la segunda se obtiene la inversa de A . 2

Bloque 3.- Geometría

3. En el espacio tridimensional se conocen el siguiente plano y punto:

$$\pi: 2x + 3y = 0 \quad P(1, -5, 1)$$

- Hallar la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P . 0.5

- b) Hallar la posición relativa de la recta $s: \begin{cases} -x + 3y - 3z = -3 \\ 4x + 9y - 2z = -2 \end{cases}$ con el plano π . 1.5

Bloque 4.- Análisis II (seleccione solo una pregunta)

4A. Calcular la siguiente integral definida:

$$\int_1^2 x e^x dx$$

4B. Dada la siguiente función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2}, & x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

Estudiar para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Dar la expresión de la función resultante. 2

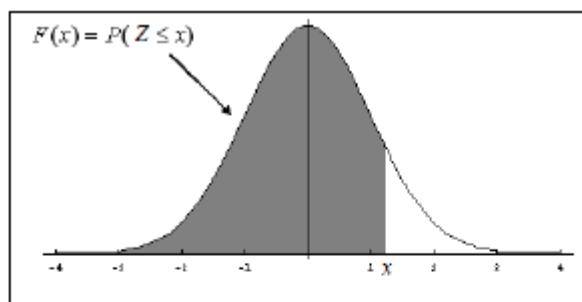
Bloque 5.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

5A. Un reciente estudio de bienestar tecnológico ha analizado el tiempo total diario (en minutos) que los estudiantes de 2º de Bachillerato utilizan auriculares. Se asume que este tiempo diario de uso se puede modelizar mediante una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 minutos y desviación típica de 20 minutos. El Servicio Canario de la Salud considera que los jóvenes hacen un "uso moderado" de los auriculares cuando lo utilizan menos de 50 minutos diarios.

- Si a la actual convocatoria de la PAU se presentan 4000 estudiantes, estimar cuántos de ellos utilizan auriculares entre 70 y 80 minutos diarios. 1.25
- Determina el porcentaje de estudiantes que se presentaron a la PAU que hacen un "uso moderado" de los auriculares. 0.75

5B. El área de Medio Ambiente del Cabildo ha diseñado un plan de reforestación para las zonas de cumbre afectadas por incendios. El plan incluye una técnica innovadora que garantiza que tres de cada cinco semillas de pino canario germinan y sobrevive el primer año. Para validar la eficacia de esta técnica, se han plantado 150 semillas en una parcela experimental. Se supone que la supervivencia de la semilla es independiente del resto.

- Calcular la probabilidad de que, en la parcela experimental, germinen y sobrevivan entre 82 y 94 semillas el primer año. 1.25
- Los técnicos del Cabildo han decidido que, si tras el primer año de estudio de la parcela experimental, germinan y sobreviven más de 80 semillas con una probabilidad superior al 90%, se incorporará esta técnica innovadora al plan de reforestación. En base a los datos, ¿incluirán esta técnica en el plan de reforestación? 0.75



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Tras la erupción del volcán Tajogaite (La Palma, 2021) un equipo de ingenieros ha desarrollado un prototipo de barredora marítima para recoger la ceniza que llega al mar, con una capacidad de $0.5 \text{ km}^2/\text{hora}$. Para la construcción del prototipo, se ha modelizado mediante $f(t)$ la superficie afectada por la mancha de ceniza en km^2 , siendo t los días transcurridos desde que comienzan la monitorización de la mancha marítima.

$$f(t) = \frac{10t+5}{2t^2+4} + 5$$

- a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento del modelo propuesto.
¿Existe algún valor extremo en el modelo? En caso afirmativo, ¿cuál es el tamaño de la mancha de ceniza en ese punto? 1
- b) Un técnico del equipo afirma que no hará falta la intervención de medios de limpieza ya que pasado un tiempo la mancha desaparecerá. ¿Es cierta esta afirmación? Justificar la respuesta. 0.5
- c) La barredora se pone en funcionamiento el cuatro día después de comenzar a monitorizar la mancha. Si la superficie de la mancha no recibiera más ceniza y se mantuviera constante a partir de ese día, ¿cuánto tiempo tardaría la barredora en eliminar la mancha de ceniza? 0.5

a) Buscamos los puntos donde la derivada se anula (puntos críticos).

$$f(t) = \frac{10t+5}{2t^2+4} + 5 \Rightarrow f'(t) = \frac{10(2t^2+4) - 4t(10t+5)}{(2t^2+4)^2} = \frac{20t^2 + 40 - 40t^2 - 20t}{(2t^2+4)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-20t^2 - 20t + 40}{(2t^2+4)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-20t^2 - 20t + 40}{(2t^2+4)^2} = 0 \Rightarrow -20t^2 - 20t + 40 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = t \\ \frac{-1-3}{2} = -2 < 0 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $t = 1$

- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{-20 \cdot 0.5^2 - 20 \cdot 0.5 + 40}{(2 \cdot 0.5^2 + 4)^2} = \frac{100}{81} > 0 \text{ . La función crece en } [0,1) \text{ .}$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{-20 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 + 40}{(2 \cdot 2^2 + 4)^2} = \frac{-5}{9} < 0 \text{ . La función decrece en } (1, +\infty)$$

La función crece en $[0,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$. La función tiene un máximo relativo en $t=1$.

Para este valor el tamaño de la mancha es $f(1) = \frac{10 \cdot 1 + 5}{2 \cdot 1^2 + 4} + 5 = \frac{15}{6} + 5 = 7.5$.

El tamaño de la mancha tiene un máximo al cabo de un día de monitorización, siendo este tamaño máximo de 7.5 km^2 .

b) Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10t+5}{2t^2+4} + 5 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10t}{t^2} + \frac{5}{t^2}}{\frac{2t^2}{t^2} + \frac{4}{t^2}} + 5 = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10}{t} + \frac{5}{t^2}}{2 + \frac{4}{t^2}} + 5 = \frac{\frac{10}{\infty} + \frac{5}{\infty}}{2 + \frac{4}{\infty}} + 5 = \frac{0+0}{2+0} + 5 = 0+5 = \boxed{5} \end{aligned}$$

Pasado un largo periodo de tiempo la mancha tiende a ser de 5 km^2 . La mancha de ceniza no desaparece con el paso del tiempo.

c) El cuarto día el tamaño de la mancha es $f(4) = \frac{10 \cdot 4 + 5}{2 \cdot 4^2 + 4} + 5 = 6.25 \text{ km}^2$.

La barredora tiene una capacidad de barrer de $0.5 \text{ km}^2/\text{hora}$.

Tardaría $\frac{6.25}{0.5} = 12.5$ horas en recoger la ceniza de la mancha.

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hallar dos matrices cuadradas de dimensión 3 tales que al sumar la primera con el doble de la segunda se obtiene la matriz A . Y, si se le resta a la primera el doble de la segunda se obtiene la inversa de A . 2

Debemos hallar una matriz X y otra Y tal que $\left. \begin{array}{l} X + 2Y = A \\ X - 2Y = A^{-1} \end{array} \right\}$.

Comprobamos que A es invertible y hallamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema matricial.

$$\left. \begin{array}{l} X + 2Y = A \\ (+) X - 2Y = A^{-1} \end{array} \right\}$$

$$\overline{2X = A + A^{-1}} \Rightarrow X = \frac{1}{2}(A + A^{-1}) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} X + 2Y = A \\ (-) X - 2Y = A^{-1} \end{array} \right\}$$

$$\overline{4Y = A - A^{-1}} \Rightarrow Y = \frac{1}{4}(A - A^{-1}) = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema matricial es $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. En el espacio tridimensional se conocen el siguiente plano y punto:

$$\pi: 2x + 3y = 0 \quad P(1, -5, 1)$$

a) Hallar la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P . 0.5

b) Hallar la posición relativa de la recta $s: \begin{cases} -x + 3y - 3z = -3 \\ 4x + 9y - 2z = -2 \end{cases}$ con el plano π . 1.5

a) La recta r perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x + 3y = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -5, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

La recta r perpendicular al plano π que pasa por P tiene ecuación $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 5\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$.

b) Obtenemos un punto y un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$\pi: 2x + 3y = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, 0)$$

$$s: \begin{cases} -x + 3y - 3z = -3 \\ 4x + 9y - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 3z + 3 = x \\ 4x + 9y - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow 4(3y - 3z + 3) + 9y - 2z = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12y - 12z + 12 + 9y - 2z + 2 = 0 \Rightarrow 21y - 14z + 14 = 0 \Rightarrow 21y = -14 + 14z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-14}{21} + \frac{14}{21}z = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}z \Rightarrow x = 3\left(\frac{-2}{3} + \frac{2}{3}z\right) - 3z + 3 = -2 + 2z - 3z + 3 = 1 - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s\left(1, \frac{-2}{3}, 0\right) \\ \vec{u}_s = \left(-1, \frac{2}{3}, 1\right) \end{cases} \rightarrow \boxed{\vec{v}_s = 3\vec{u}_s = (-3, 2, 3)}$$

Comprobamos si el vector normal del plano y el director de la recta son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (-3, 2, 3) \\ \vec{n} = (2, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{n} = (-3, 2, 3)(2, 3, 0) = -6 + 6 + 0 = 0$$

Los vectores son perpendiculares y hay dos opciones: la recta está contenida en el plano o la recta es paralela al plano. Para decidir en que caso estamos comprobamos si el punto

$Q_s\left(1, \frac{-2}{3}, 0\right)$ de la recta está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} Q_s\left(1, \frac{-2}{3}, 0\right) \in \pi? \\ \pi : 2x + 3y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{-2}{3} = 0? \Rightarrow \text{¡¡} \text{SIII} \text{!!}$$

La recta s está contenida en el plano π .

4A. Calcular la siguiente integral definida:

$$\int_1^2 xe^x dx$$

Calculamos primero la integral indefinida usando el método de integración por partes.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Aplicamos lo obtenido al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_1^2 xe^x dx = [xe^x - e^x]_1^2 = [2 \cdot e^2 - e^2] - [1 \cdot e^1 - e^1] = 2e^2 - e^2 - e + e = \boxed{e^2}$$

4B. Dada la siguiente función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2}, & x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

Estudiar para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Dar la expresión de la función resultante.

2

La función en el intervalo $(-\infty, 1)$ tiene la expresión $f(x) = 1 + \frac{a}{x-2}$ que no existe para $x = 2$ que no pertenece al intervalo de definición. La función es continua en $(-\infty, 1)$.

La función en el intervalo $(1, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = a + \frac{b}{\sqrt{x}}$ que no existe para $x = 0$ que no pertenece al intervalo de definición. La función es continua en $(1, +\infty)$.

Averiguamos cuando es continua la función en el cambio de definición $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a + \frac{b}{\sqrt{1}} = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} a + \frac{b}{\sqrt{x}} = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{a}{x-2} = 1 + \frac{a}{1-2} = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = 1 - a \Rightarrow \boxed{b = 1 - 2a}$$

La función para ser continua debe ser $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2}, & x < 1 \\ a + \frac{1-2a}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$, obtenemos la expresión de su derivada.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2}, & x < 1 \\ a + \frac{1-2a}{\sqrt{x}} = a + (1-2a)x^{-1/2}, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(x-2)^2}, & x < 1 \\ (1-2a)\frac{-1}{2}x^{-3/2} = \frac{2a-1}{2\sqrt{x^3}}, & x > 1 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-a}{(x-2)^2} = \frac{-a}{(1-2)^2} = -a \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2a-1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{2a-1}{2\sqrt{1^3}} = a - \frac{1}{2} \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a = a - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

Para $a = \frac{1}{4}$ el valor de b es $b = 1 - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Para $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{1}{2}$ la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Para estos valores la función queda $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4(x-2)}, & x < 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}$.

5A. Un reciente estudio de bienestar tecnológico ha analizado el tiempo total diario (en minutos) que los estudiantes de 2º de Bachillerato utilizan auriculares. Se asume que este tiempo diario de uso se puede modelizar mediante una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 minutos y desviación típica de 20 minutos. El Servicio Canario de la Salud considera que los jóvenes hacen un "uso moderado" de los auriculares cuando lo utilizan menos de 50 minutos diarios.

- a) Si a la actual convocatoria de la PAU se presentan 4000 estudiantes, estimar cuántos de ellos utilizan auriculares entre 70 y 80 minutos diarios. 1.25
- b) Determina el porcentaje de estudiantes que se presentaron a la PAU que hacen un "uso moderado" de los auriculares. 0.75

Sea X = el tiempo total diario (en minutos) que los estudiantes de 2º de Bachillerato utilizan auriculares. $X = N(74, 20)$.

- a) Calculamos la probabilidad de que un estudiante use los auriculares entre 70 y 80 minutos diarios: $P(70 \leq X \leq 80)$.

$$P(70 \leq X \leq 80) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 74}{20} \end{array} \right\} = P\left(\frac{70 - 74}{20} \leq Z \leq \frac{80 - 74}{20}\right) = P(-0.2 \leq Z \leq 0.3) =$$

$$= P(Z \leq 0.3) - P(Z \leq -0.2) = P(Z \leq 0.3) - P(Z \geq 0.2) =$$

$$= P(Z \leq 0.3) - [1 - P(Z \leq 0.2)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6179 - 1 + 0.5793 = \boxed{0.1972}$$

	0
0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554

Multiplicamos esta probabilidad por el número de estudiantes y obtenemos $0.1972 \cdot 4000 = 788.8$. Se puede estimar que 789 de los 4000 estudiantes utilizan auriculares entre 70 y 80 minutos diarios.

- b) Hallamos la probabilidad de que un estudiante use los auriculares menos de 50 minutos diarios: $P(X \leq 50)$.

$$P(X \leq 50) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z \leq \frac{50 - 74}{20}\right) = P(Z \leq -1.2) = P(Z \geq 1.2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8849 = \boxed{0.1151}$$

	0
0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032

El porcentaje de estudiantes que se presentaron a la PAU que hacen un "uso moderado" de los auriculares es del 11.51 %.

5B. El área de Medio Ambiente del Cabildo ha diseñado un plan de reforestación para las zonas de cumbre afectadas por incendios. El plan incluye una técnica innovadora que garantiza que tres de cada cinco semillas de pino canario germinan y sobrevive el primer año. Para validar la eficacia de esta técnica, se han plantado 150 semillas en una parcela experimental. Se supone que la supervivencia de la semilla es independiente del resto.

- Calcular la probabilidad de que, en la parcela experimental, germinen y sobrevivan entre 82 y 94 semillas el primer año. 1.25
- Los técnicos del Cabildo han decidido que, si tras el primer año de estudio de la parcela experimental, germinan y sobreviven más de 80 semillas con una probabilidad superior al 90%, se incorporará esta técnica innovadora al plan de reforestación. En base a los datos, ¿incluirán esta técnica en el plan de reforestación? 0.75

La probabilidad de que una semilla germine y sobreviva el primer año vale $\frac{3}{5} = 0.6$.

Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de semillas que germinan y sobreviven de un grupo de 150. Esta variable es una binomial siendo n = número de repeticiones = 150 y p = probabilidad de que una semilla germine y sobreviva = 0.6. $X = B(150, 0.6)$.

Como el número de repeticiones es muy alto aproximaremos la distribución binomial X a una distribución normal Y de media $np = 150 \cdot 0.6 = 90$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{150 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = 6$. $Y = N(90, 6)$. Esta aproximación es buena pues $np = 90 > 5$ y $np = 150 \cdot 0.4 = 60 > 5$,

- Debemos calcular $P(82 \leq X \leq 94)$.

$$P(82 \leq X \leq 94) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(81.5 \leq Y \leq 94.5) =$$

$$= P(Y \leq 94.5) - P(Y \leq 81.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 90}{6} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{94.5 - 90}{6}\right) - P\left(Z \leq \frac{81.5 - 90}{6}\right) =$$

$$= P(Z \leq 0.75) - P(Z \leq -1.42) = P(Z \leq 0.75) - P(Z \geq 1.42) =$$

$$= P(Z \leq 0.75) - [1 - P(Z \leq 1.42)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7734 - 1 + 0.9222 = \boxed{0.6956}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265

- Calculamos $P(X > 80)$ y averiguamos si es mayor o menor que 0.9.

$$P(X > 80) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 80.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{80.5 - 90}{6}\right) =$$

$$= P(Z > -1.58) = P(Z \leq 1.58) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9429}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429

La probabilidad de que germinen y sobreviven más de 80 semillas es del 94.29% que es superior al 90%. El cabildo incluirá esta técnica en su plan de reforestación.