

Matemáticas II

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una tarea de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

APARTADO 1 [2.5 puntos]. Bloque A+D. Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera la matriz presentada a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [0.5 puntos] Estudia el rango de A en función del valor del parámetro a .
- b) [1 punto] Calcula A^{100} en función del parámetro a .
- c) [1 punto] Para $a = -1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple:

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + az = 1 \\ ay + z = 2 - a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a .
- b) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
- c) [0,5 puntos] Considera $a = 1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

APARTADO 2 [2.5 puntos] Bloque B. Resuelve una de las siguientes tareas (2A o 2B):

2A) Considera la siguiente función presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1 punto] Calcula los valores de a para los que $f(x)$ tiene como asíntota oblicua a la recta: $y = x - 6$.
- b) [1 punto] Considera $a = -2$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) [0,5 puntos] Considera $a = -2$, halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

2B) Considera la función real presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1 punto] Si existen, calcula las asíntotas de $f(x)$.
- b) [1,5 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$ que en $x = \ln 4$ tome el valor $\ln 2$.

APARTADO 3 [2.5 puntos] Bloque C. Resuelve esta cuestión.

3) Considera los puntos $A = (0,0,4)$, $B = (-3,0,0)$ y $C = (0,-2,0)$.

- a) [0,5 puntos] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a A , B y C .
- b) [1 punto] Calcula la distancia entre el punto $P = (1,1,1)$ y la recta que contiene a A y B .
- c) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro formado por los vértices A , B , C y $D = (0,0,0)$.

APARTADO 4 [2.5 puntos] Bloque E Resuelve una de las siguientes tareas (4A o 4B):

4A) En un criadero de cobayas tienen variedades de pelo corto y de pelo largo. En cualquiera de estas variedades, disponen de animales blancos o marrones. Del total de cobayas, el 60% es de pelo corto, y solo el 8% son blancas de pelo largo.

- a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo elegido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón.

Si la probabilidad de escoger al azar una cobaya blanca es de 0,2:

- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo.
- c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón.

4B) El diámetro de las mandarinas de cierta variedad se distribuye normalmente con una media de 60 mm y una desviación típica de 16 mm.

- a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro menor de 40 mm o mayor de 90 mm.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro.
- c) [0.5 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro entre 40 mm y 50 mm.

SOLUCIONES

1A) Considera la matriz presentada a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) [0.5 puntos] Estudia el rango de A en función del valor del parámetro a .

b) [1 punto] Calcula A^{100} en función del parámetro a .

c) [1 punto] Para $a = -1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple:

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Si $a \neq 0$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

Si $a = 0$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Para $a = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El menor de orden 2 que se obtiene eliminando

la fila y columna terceras es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Su determinante vale 1 que es distinto de cero y el rango de A es 2

Conclusión: Si $a \neq 0$ el rango de A es 3 y si $a = 0$ el rango de A es 2.

b) Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de alguna regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

Observamos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$. Por lo que $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{100} \end{pmatrix}$

c) Para $a = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Comprobamos que es invertible y hallamos

su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación.

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} A$$

Terminamos de obtener la matriz X.

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2+2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para $a = -1$ la matriz X solución de la igualdad $AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + az = 1 \\ ay + z = 2 - a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema en función de los valores de a .
 b) [0,5 puntos] Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
 c) [0,5 puntos] Considera $a = 1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - a^2 = 1 - a^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema

triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|cccc} & \overbrace{1 & 1 & 1 & 0}^{A/B} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{1 & 1 & 1 & 0}_A & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 2. Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a = 2$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=1 \\ 2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=1 \\ z=-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2y=0 \\ y+2(-2y)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-4y=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ -3y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ z=-2\frac{-1}{3}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Para $a = 2$ la solución es $x = y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$.

c) Si $a = 1$ estamos en el caso 3 y el sistema es compatible indeterminado. Hallamos la expresión de sus infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1-z \\ z=\lambda \end{cases}$$

Para $a = 1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=-1 \\ y=1-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

2A) Considera la siguiente función presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) [1 punto] Calcula los valores de a para los que $f(x)$ tiene como asíntota oblicua a la recta: $y = x - 6$.
- b) [1 punto] Considera $a = -2$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) [0,5 puntos] Considera $a = -2$, halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

a) Calculamos la ecuación de la recta $y = mx + n$ que es asíntota oblicua de la función.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + a^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{ax}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{a^2 x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{a^2}{x}} = \frac{1 + \frac{a}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{a^2}{\infty}} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2 - a^2 x}{x + a^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a - a^2)x + 1}{x + a^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(a - a^2)x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{a^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - a^2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{a^2}{x}} = \frac{a - a^2 + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{a^2}{\infty}} = \frac{a - a^2}{1} = a - a^2$$

La recta $y = x + a - a^2$ es asíntota oblicua de la función.

Para que la recta $y = x - 6$ sea asíntota oblicua debe ser $a - a^2 = -6$.

$$a - a^2 = -6 \Rightarrow 0 = a^2 - a - 6 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1-5}{2} = \boxed{-2 = a} \\ \frac{1+5}{2} = \boxed{3 = a} \end{cases}$$

Para $a = -2$ y $a = 3$ se cumple lo pedido.

- b) Para $a = -2$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$. El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador. Su dominio es $\mathbb{R} - \{-4\}$.
Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + 4) - 1 \cdot (x^2 - 2x + 1)}{(x + 4)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 8x - \cancel{2x} - 8 - x^2 + \cancel{2x} - 1}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 9}{(x + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 8x - 9}{(x + 4)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{-8 - 10}{2} = \boxed{-9 = x} \\ \frac{-8 + 10}{2} = \boxed{1 = x} \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función antes, entre y después de los puntos críticos y el valor excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, -9)$ tomamos $x = -10$ y la derivada vale

$$f'(-10) = \frac{(-10)^2 + 8 \cdot (-10) - 9}{(-10 + 4)^2} = \frac{11}{36} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -9).$$

- En el intervalo $(-9, -4)$ tomamos $x = -6$ y la derivada vale

$$f'(-6) = \frac{(-6)^2 + 8 \cdot (-6) - 9}{(-6 + 4)^2} = \frac{-21}{4} < 0. \text{ La función decrece en } (-9, -4).$$

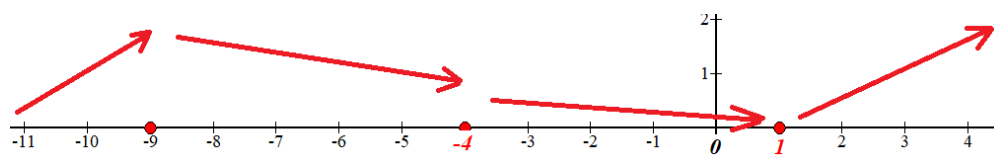
- En el intervalo $(-4, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{0^2 + 8 \cdot 0 - 9}{(0 + 4)^2} = \frac{-9}{16} < 0. \text{ La función decrece en } (-4, 1).$$

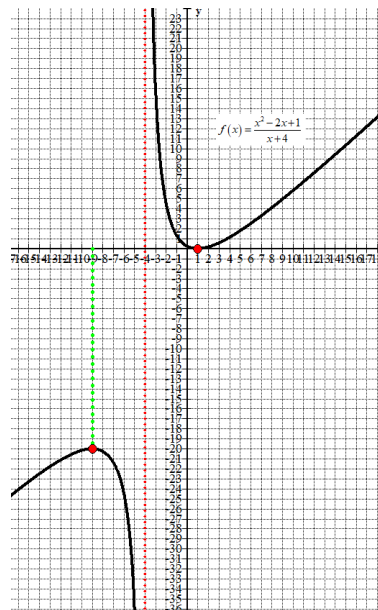
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{2^2 + 8 \cdot 2 - 9}{(2 + 4)^2} = \frac{11}{36} > 0. \text{ La función crece en } (1, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente:



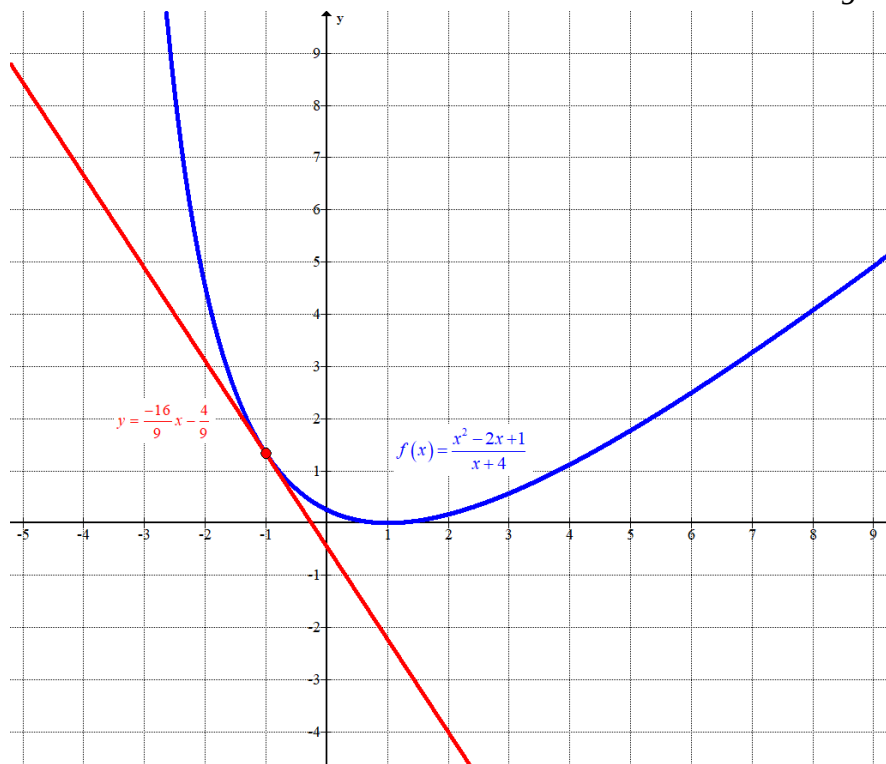
La función crece en $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-9, -4) \cup (-4, 1)$.



- c) Para $a = -2$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$ tiene la expresión $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= \frac{(-1)^2 - 2(-1) + 1}{-1 + 4} = \frac{4}{3} \\ f'(-1) &= \frac{(-1)^2 + 8(-1) - 9}{(-1 + 4)^2} = \frac{-16}{9} \\ y - f(-1) &= f'(-1)(x + 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{4}{3} = \frac{-16}{9}(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{-16}{9}x - \frac{4}{9}}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$ tiene la expresión $y = \frac{-16}{9}x - \frac{4}{9}$.



2B) Considera la función real presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] Si existen, calcula las asíntotas de $f(x)$.

b) [1,5 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$ que en $x = \ln 4$ tome el valor $\ln 2$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$e^{2x} - 4 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 4 \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln 4 \Rightarrow 2x \ln e = \ln 2^2 \Rightarrow 2x = 2 \ln 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

Asíntota vertical $x = a$

¿ $x = \ln 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \frac{e^{\ln 2} - 1}{e^{2 \ln 2} - 4} = \frac{2 - 1}{e^{\ln 4} - 4} = \frac{1}{4 - 4} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = \ln 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \frac{e^{+\infty} - 1}{e^{+\infty} - 4} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2 \cdot e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

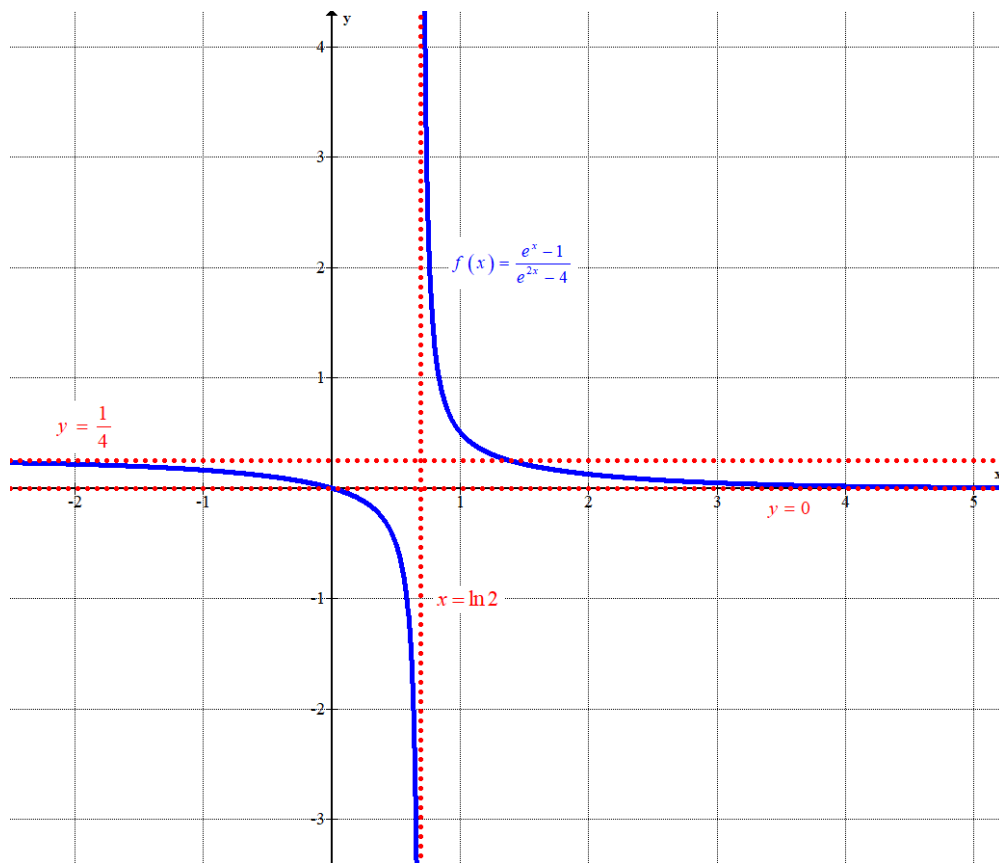
La recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} - 4} = \frac{0 - 1}{0 - 4} = \frac{1}{4}$$

La recta $y = \frac{1}{4}$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.



b) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \rightarrow e^{2x} = t^2 \\ e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{t-1}{t^2-4} \frac{dt}{t} = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{t-1}{t(t^2-4)} = \frac{t-1}{t(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t+2} = \frac{A(t-2)(t+2) + Bt(t+2) + Ct(t-2)}{t(t-2)(t+2)}$$

$$t-1 = A(t-2)(t+2) + Bt(t+2) + Ct(t-2) \Rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow -1 = -4A \rightarrow A = \frac{1}{4} \\ t=2 \rightarrow 1 = 8B \rightarrow B = \frac{1}{8} \\ t=-2 \rightarrow -3 = 8C \rightarrow C = \frac{-3}{8} \end{cases}$$

$$\frac{t-1}{t(t^2-4)} = \frac{1/4}{t} + \frac{1/8}{t-2} + \frac{-3/8}{t+2}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \int \frac{1/4}{t} + \frac{1/8}{t-2} + \frac{-3/8}{t+2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{8} \int \frac{1}{t-2} dt - \frac{3}{8} \int \frac{1}{t+2} dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln|t| + \frac{1}{8} \ln|t-2| - \frac{3}{8} \ln|t+2| = \frac{1}{4} \ln|e^x| + \frac{1}{8} \ln|e^x-2| - \frac{3}{8} \ln|e^x+2| \end{aligned}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|e^x-2| - \frac{3}{8} \ln|e^x+2| + K}$$

Averiguamos el valor de K para que la primitiva en $x = \ln 4$ tome el valor $\ln 2$.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|e^x-2| - \frac{3}{8} \ln|e^x+2| + K \\ F(\ln 4) &= \ln 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \frac{\ln 4}{4} + \frac{1}{8} \ln|e^{\ln 4}-2| - \frac{3}{8} \ln|e^{\ln 4}+2| + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \frac{2 \ln 2}{4} + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{3}{8} \ln 6 + K \Rightarrow 8 \ln 2 = 4 \ln 2 + \ln 2 - 3 \ln 6 + 8K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8K = 3 \ln 2 + 3 \ln 6 \Rightarrow 8K = 3(\ln 2 + \ln 6) \Rightarrow 8K = 3 \ln 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{3 \ln 12}{8} \Rightarrow \boxed{F(x) = F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|e^x-2| - \frac{3}{8} \ln|e^x+2| + \frac{3 \ln 12}{8}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|e^x-2| - \frac{3}{8} \ln|e^x+2| + \frac{3 \ln 12}{8}$.

3) Considera los puntos $A = (0,0,4)$, $B = (-3,0,0)$ y $C = (0,-2,0)$.

a) [0,5 puntos] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a A , B y C .

b) [1 punto] Calcula la distancia entre el punto $P = (1,1,1)$ y la recta que contiene a A y B .

c) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro formado por los vértices A , B , C y $D = (0,0,0)$.

a) Obtenemos la ecuación del plano π que contiene los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A = (0,0,4) \in \pi \\ B = (-3,0,0) \in \pi \\ C = (0,-2,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = (0,0,4) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3,0,0) - (0,0,4) = (-3,0,-4) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,-2,0) - (0,0,4) = (0,-2,-4) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-4 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 6z - 24 - 0 - 12y - 8x = 0 \Rightarrow$$

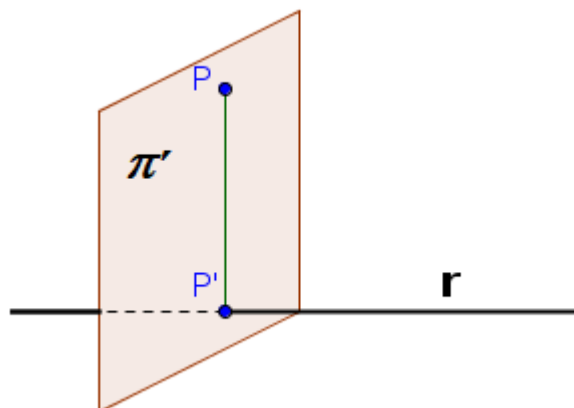
$$\Rightarrow -8x - 12y + 6z - 24 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4x + 6y - 3z + 12 = 0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi: 4x + 6y - 3z + 12 = 0$.

b) Hallamos la ecuación de la recta r que contiene los puntos A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A = (0,0,4) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-3,0,-4) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 0 \\ z = 4 - 4\lambda \end{cases}$$

Hallamos el plano π' perpendicular a la recta r . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \overrightarrow{AB} = (-3,0,-4) \\ P(1,1,1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': -3x - 4z + D = 0 \\ P(1,1,1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow -3 - 4 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 7 \Rightarrow \boxed{\pi': -3x - 4z + 7 = 0}$$

Hallamos el punto P' de corte del plano y la recta.

$$r: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 0 \\ z = 4 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow -3(-3\lambda) - 4(4 - 4\lambda) + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi': -3x - 4z + 7 = 0$$

$$\Rightarrow 9\lambda - 16 + 16\lambda + 7 = 0 \Rightarrow 25\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{25} \Rightarrow \begin{cases} x = -3\frac{9}{25} = \frac{-27}{25} \\ y = 0 \\ z = 4 - 4\frac{9}{25} = \frac{64}{25} \end{cases} \Rightarrow P' \left(\frac{-27}{25}, 0, \frac{64}{25} \right)$$

La distancia del punto P a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'} = \left(\frac{-27}{25}, 0, \frac{64}{25} \right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{-52}{25}, -1, \frac{39}{25} \right)$$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(\frac{-52}{25} \right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{39}{25} \right)^2} = \frac{5\sqrt{194}}{25} = \frac{\sqrt{194}}{5} \approx 2.7857u$$

c) El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}]$.

$$\begin{matrix} A = (0, 0, 4) \\ B = (-3, 0, 0) \\ C = (0, -2, 0) \\ D = (0, 0, 0) \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{DA} = (0, 0, 4) - (0, 0, 0) = (0, 0, 4) \\ \overrightarrow{DB} = (-3, 0, 0) - (0, 0, 0) = (-3, 0, 0) \\ \overrightarrow{DC} = (0, -2, 0) - (0, 0, 0) = (0, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 24 - 0 - 0 - 0 = 24$$

El volumen del tetraedro ABCD vale $\frac{24}{6} = 4$ unidades cúbicas.

4A) En un criadero de cobayas tienen variedades de pelo corto y de pelo largo. En cualquiera de estas variedades, disponen de animales blancos o marrones. Del total de cobayas, el 60% es de pelo corto, y solo el 8% son blancas de pelo largo.

a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo elegido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón.

Si la probabilidad de escoger al azar una cobaya blanca es de 0,2:

b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo.

c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón.

a) Construimos una tabla de contingencia para obtener la información implícita en los datos proporcionados

	Blancos	Marrones	
Pelo corto			60
Pelo largo	8		
			100

Completamos en todo lo posible la tabla.

	Blancos	Marrones	
Pelo corto			60
Pelo largo	8	32	40
			100

El 40 % de las cobayas son de pelo largo y el 32% son de color marrón con el pelo largo. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón vale $\frac{32}{40} = 0.8$.

b) Si la probabilidad de escoger al azar una cobaya esta sea blanca es de 0,2 significa que el 20 % de las cobayas son blancas. Añadimos este dato a la tabla de contingencia y la completamos.

	Blancos	Marrones	
Pelo corto	12	48	60
Pelo largo	8	32	40
	20	80	100

Hay un 80% de cobayas marrones y un 32% son cobayas marrones de pelo largo. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo vale $\frac{32}{80} = 0.4$.

c) Hay un 60% de cobayas de pelo corto y un 48% de cobayas marrones de pelo corto. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón vale $\frac{48}{60} = 0.8$.

4B) El diámetro de las mandarinas de cierta variedad se distribuye normalmente con una media de 60 mm y una desviación típica de 16 mm.

- a) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro menor de 40 mm o mayor de 90 mm.
- b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro.
- c) [0.5 punto] Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro entre 40 mm y 50 mm.

Sea X la variable aleatoria que obtiene el diámetro en mm de las mandarinas. $X = N(60, 16)$.

a) Nos piden calcular $1 - P(40 \leq X \leq 90)$.

$$\begin{aligned}
 1 - P(40 \leq X \leq 90) &= 1 - [P(X \leq 90) - P(X \leq 40)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 60}{16} \end{array} \right\} = \\
 &= 1 - \left[P\left(Z \leq \frac{90 - 60}{16}\right) - P\left(Z \leq \frac{40 - 60}{16}\right) \right] = 1 - [P(Z \leq 1.875) - P(Z \leq -1.25)] = \\
 &= 1 - [P(Z \leq 1.875) - P(Z \geq 1.25)] = 1 - [P(Z \leq 1.875) - (1 - P(Z \leq 1.25))] = \\
 &= 1 - P(Z \leq 1.875) + 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \\
 &= 2 - \frac{0.9693 + 0.9699}{2} - 0.8944 = \boxed{0.136}
 \end{aligned}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9644	0,9653	0,9661	0,9668	0,9675	0,9682	0,9688	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761

b) Calculamos la probabilidad de que una mandarina tenga menos de 50 mm de diámetro.

$$P(X \leq 50) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 60}{16} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{50 - 60}{16}\right) = P(Z \leq -0.625) = P(Z \geq 0.625) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.625) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array} \right\} = 1 - \frac{0.7324 + 0.7357}{2} = \boxed{0.26595}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0

Suponemos que los sucesos “elegir la primera mandarina” y “elegir la segunda mandarina” son independientes y la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro es el producto de la probabilidad de cada uno de los sucesos: $0.26595 \cdot 0.26595 \approx 0.0707$.

c) Debemos calcular $P(40 \leq X \leq 50)$.

$$P(40 \leq X \leq 50) = P(X \leq 50) - P(X \leq 40) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 60}{16} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{50 - 60}{16}\right) - P\left(Z \leq \frac{40 - 60}{16}\right) = P(Z \leq -0.625) - P(Z \leq -1.25) =$$

$$= P(Z \geq 0.625) - P(Z \geq 1.25) = [1 - P(Z \leq 0.625)] - [1 - P(Z \leq 1.25)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array} \right\} = 1 - \frac{0.7324 + 0.7357}{2} - 1 + 0.8944 = \boxed{0.16035}$$