

	Pruebas de Acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES

- 1. OPTATIVIDAD:** El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 3) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
- 2. CALCULADORA:** Se podrá usar una calculadora científica no programables, que no admita memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas y sin conexión a internet. Durante el desarrollo de la prueba no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.
- 3. CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
- 4. DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES:** Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global. La máxima deducción global es de un punto.
- 5.** El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.
- 6. Respuestas numéricas exactas o con tres dígitos decimales.**

APARTADO 1: (elegir UN problema)

Problema 1A.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-10)x - 2y - z = -1 \\ 7x + (m+2)y + 2z = m+1, \text{ donde } m \in \mathbb{R} \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

- Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m . **(1,5 puntos)**
- Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

Problema 1B. (Propuesto en Galicia, Modelo 0 de 2025)

- Calcular A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

- b) Si $M = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y, z sabiendo que
- $$(3z)M^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Entiéndase que } I \text{ es la matriz identidad.} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

APARTADO 2: (elegir UN problema)

Problema 2A.

- a) Calcular $\int_0^1 \frac{x^3 - 5}{\sqrt{x}} dx$. (1,25 puntos)
- b) Probar que la función $f(x) = 2 - e^x$ posee una sola raíz real., encontrando un intervalo que la contenga. (1,25 puntos)

Problema 2B.

- a) Dada la función $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$. Determinar su dominio de definición, su monotonía y sus asíntotas. Justifica la existencia o no de extremos relativos. (1,5 puntos)
- b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$. (1 punto)

APARTADO 3: (obligatorio)

Problema 3.

Dados el plano $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores directores $\vec{v}_1 = (0, 2, 6)$ y $\vec{v}_2 = (1, 0, b)$, se pide:

- a) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos y distintos. (0,75 puntos)
- b) Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 . (0,75 puntos)
- c) Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 . (1 punto)

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A.

Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, N y M . El 20% de los móviles son de la marca A y el 40% de la marca N . Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software oculto se instala en el 15% de los móviles de la marca A , en un 10% de la marca N y en un 12% de los móviles de la marca M . Se pide:

- a) Describir todas las probabilidades, condicionadas y no condicionadas, que se deducen directamente del enunciado. (0,3 puntos)
- b) Determinar la probabilidad de que un móvil fabricado por esta empresa tenga instalado el software espía. (1 punto)
- c) Si un móvil fabricado por esta empresa tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A . (1,2 puntos)

Problema 4B.

De una bolsa de 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

- a) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3. **(0,5 puntos)**
- b) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3. **(0,75 puntos)**
- c) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sean múltiplos de 2. **(0,75 puntos)**
- d) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido. **(0,5 puntos)**

SOLUCIONES**Problema 1A.**

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-10)x - 2y - z = -1 \\ 7x + (m+2)y + 2z = m+1, \text{ donde } m \in \mathbb{R} \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m . **(1,5 puntos)**
 b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m-10 & -2 & -1 \\ 7 & m+2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz

ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} m-10 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & m+2 & 2 & m+1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m-10 & -2 & -1 \\ 7 & m+2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (m-10)(m+2) - 20 - \cancel{14} + 5m + 10 + \cancel{14} - 4m + 40 =$$

$$= m^2 + 2m - 10m - \cancel{20} - 20 + 5m + 10 - 4m + \cancel{40} = m^2 - 7m + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 = 0 \Rightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5=m} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2=m} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $m = 5$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de

A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 2^a + 7 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 35 \quad 35 \quad 10 \quad 30 \\ -35 \quad -14 \quad -7 \quad -7 \\ \hline 0 \quad 21 \quad 3 \quad 23 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a & & & \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{5 \quad 2 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 21 \quad 3 \quad 23 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de

A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 8 \cdot \text{Fila } 2^a + 7 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ 56 & 32 & 16 & 24 \\ -56 & -14 & -7 & -7 \\ \hline 0 & 18 & 9 & 17 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 8 \cdot \text{Fila } 3^a + 5 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ 40 & 16 & 8 & 8 \\ -40 & -10 & -5 & -5 \\ \hline 0 & 6 & 3 & 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 18 & 9 & 17 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & 18 & 9 & 9 \\ 0 & -18 & -9 & -17 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{-8 \quad -2 \quad -1 \quad -1}^{A/B} \\ 0 \quad 18 \quad 9 \quad 17 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 8}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $m = 5$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $m = 2$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $m = 3$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} -7x - 2y - z = -1 \\ 7x + 5y + 2z = 4 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a & & & \\ 7x & +5y & +2z & = 4 \\ -7x & -2y & -z & = -1 \\ \hline & 3y & +z & = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7x - 2y - z = -1 \\ 3y + z = 3 \rightarrow z = 3 - 3y \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x - 2y - 3 + 3y = -1 \\ 5x + 2y + 3 - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7x + y = 2 \rightarrow y = 2 + 7x \\ 5x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow 5x - 2 - 7x = -2 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2 + 7 \cdot 0 = 2} \Rightarrow \boxed{z = 3 - 3 \cdot 2 = -3}$$

Para $m = 3$ la solución del sistema es $x = 0$, $y = 2$, $z = -3$.

Problema 1B. (Propuesto en Galicia, Modelo 0 de 2025)

a) Calcular A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

b) Si $M = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y, z sabiendo que

$(3z)M^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad. **(1,5 puntos)**

a) La matriz A debe ser una matriz cuadrada de orden 2. Suponemos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ c-d=0 \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ c=d \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1+b=2 \rightarrow 2b=1 \rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}} \\ d+d=1 \rightarrow 2d=1 \rightarrow \boxed{d=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}} \\ \boxed{c=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b) Multiplicamos la ecuación matricial por M , sustituimos las matrices y resolvemos el sistema.

$$(3z)M^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (3z)M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - I \Rightarrow (3z)M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3z)M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (3z)M \cdot M^{-1} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (3z)I = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x & 3x \\ y-z & 3z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3z = 3-x \\ 0 = 3x \rightarrow \boxed{x=0} \\ 0 = y-z \\ 3z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 3-0 \rightarrow \boxed{z=1} \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

Los valores buscados son $x = 0, y = 1, z = 1$.

Problema 2A.

a) Calcular $\int_0^1 \frac{x^3 - 5}{\sqrt{x}} dx$.

(1,25 puntos)

b) Probar que la función $f(x) = 2 - e^x$ posee una sola raíz real., encontrando un intervalo que la contenga.

(1,25 puntos)

a) Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3 - 5}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{x^{1/2}} - \frac{5}{x^{1/2}} dx = \int_0^1 x^{3-\frac{1}{2}} - 5x^{-1/2} dx = \\ &= \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} - 5x^{-1/2} dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 5 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 = \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 5 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \left[\frac{2\sqrt{x^7}}{7} - 10\sqrt{x} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{2\sqrt{1^7}}{7} - 10\sqrt{1} \right] - \left[\frac{2\sqrt{0^7}}{7} - 10\sqrt{0} \right] = \frac{2}{7} - 10 = \boxed{\frac{-68}{7}} \end{aligned}$$

b) La función $f(x) = 2 - e^x$ es continua en $\mathbb{R}$. Si consideramos el intervalo $[0, 1]$

comprobamos que $f(0) = 2 - e^0 = 1 > 0$ y $f(1) = 2 - e^1 \simeq -0.72 < 0$.

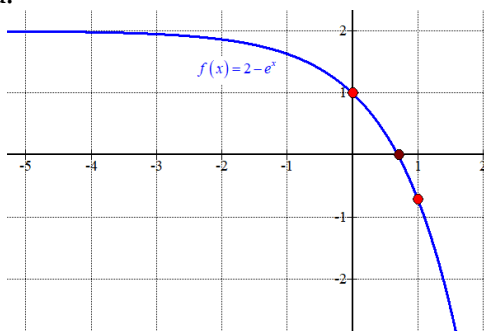
Si aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x) = 2 - e^x$ en el intervalo $[0, 1]$ podemos afirmar que existe $c \in (0, 1)$ para el que $f(c) = 0$.

Justificamos que esa raíz es única. La derivada de la función es $f'(x) = -e^x$ que es siempre negativa, por lo que la función siempre es decreciente.

La función es continua y decreciente por lo que es positiva en el intervalo $(-\infty, 0)$ y negativa en el intervalo $(1, +\infty)$. La función no tiene ninguna raíz real en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

En el intervalo $(0, 1)$ hemos visto que existe $c \in (0, 1)$ para el que $f(c) = 0$. Si existiese otro valor $d \in (0, 1)$ para el que $f(d) = 0$ aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x) = 2 - e^x$ en el intervalo (c, d) la función es continua en $[c, d]$ y derivable en (c, d) con $f(c) = f(d) = 0$. Aplicando el teorema de Rolle debería existir $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) = 0$. Y esto no es posible pues la derivada es $f'(x) = -e^x$ y nunca se anula.

La hipótesis de partida es errónea y podemos afirmar que la raíz de la función que existe en el intervalo $(0, 1)$ es única.



Problema 2B.

a) Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$. Determinar su dominio de definición, su monotonía y sus asíntotas. Justifica la existencia o no de extremos relativos. **(1,5 puntos)**

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$, pues el denominador de la fracción nunca se anula, pues e^x siempre es mayor que cero.

Utilizamos la derivada para hallar los posibles puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (1+e^x) - 1 \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es negativa.

$$\left. \begin{array}{l} e^x > 0 \rightarrow -e^x < 0 \\ (1+e^x)^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

La función siempre es decreciente. La función no tiene puntos críticos y por tanto no tiene extremos relativos.

Asíntotas verticales. $x = a$

No existen, pues el dominio lo forman todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

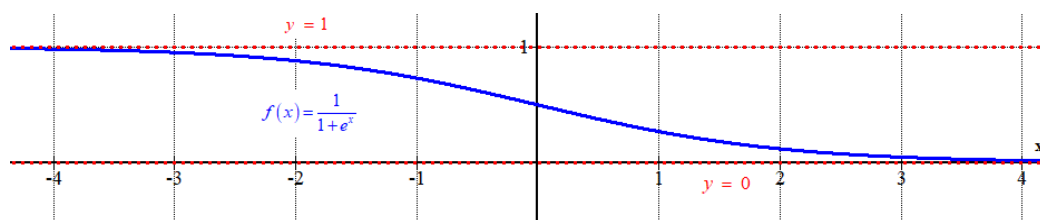
$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función cuando x tiende a $+\infty$.

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la función cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.



b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sin(x) = t \rightarrow \cos(x) dx = dt \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\sin^2(x)}{2} + K$$

Calculamos el valor de la integral definida pedida.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx = \left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \right] - \left[\frac{\operatorname{sen}^2(0)}{2} \right] = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Problema 3.

Dados el plano $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores directores $\vec{v}_1 = (0, 2, 6)$ y $\vec{v}_2 = (1, 0, b)$, se pide:

- a) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos y distintos. **(0,75 puntos)**
 b) Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 . **(0,75 puntos)**
 c) Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 . **(1 punto)**

a) Hallamos la ecuación del plano π_2 .

$$\left. \begin{array}{l} P(0, 2, 4) \in \pi_2 \\ \vec{v}_1 = (0, 2, 6) \\ \vec{v}_2 = (1, 0, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2bx + 6y - 12 + 0 - 2z + 8 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2bx + 6y - 2z - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0}$$

Para que los planos sean paralelos o coincidentes deben tener un vector normal con coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0 \\ \pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a \\ \pi_1 \parallel \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{3}{-3} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \frac{b}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Para este valor las ecuaciones de los dos planos quedan $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y

$$\pi_2 : -2x + 3y - z - 2 = 0.$$

Le cambiamos el signo a la ecuación del plano π_2 y quedan los planos con las ecuaciones

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - a = 0 \text{ y } \pi_2 : 2x - 3y + z + 2 = 0.$$

Los dos planos son coincidentes si $a = -2$ y son paralelos para cualquier valor de a distinto de -2 .

Para cualquier valor de a distinto de -2 y $b = -2$ los planos π_1 y π_2 son paralelos y distintos.

- b) Para $a = 1$ y $b = 0$ los planos son secantes y coinciden en una recta. Determinamos sus ecuaciones paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x - 3y + z = 1 \\ \pi_2 : -3y + z + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 1 - 2x + 3y \\ -3y + z + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\cancel{3y} + 1 - 2x + \cancel{3y} + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 1 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 3y \\ -3y + z + 2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -2 + 3y \\ -3y + z + 2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -2 + 3y \Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta intersección de los dos planos tiene ecuación $r: \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$

c) Para $a = 4$ y $b = -2$ los dos planos son paralelos. Los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 son los puntos pertenecientes a un plano π_3 paralelo a ambos situado a mitad de distancia de π_1 a π_2 .

Para $a = 4$ y $b = -2$ los planos quedan $\pi_1: 2x - 3y + z - 4 = 0$ y $\pi_2: -2x + 3y - z - 2 = 0$.

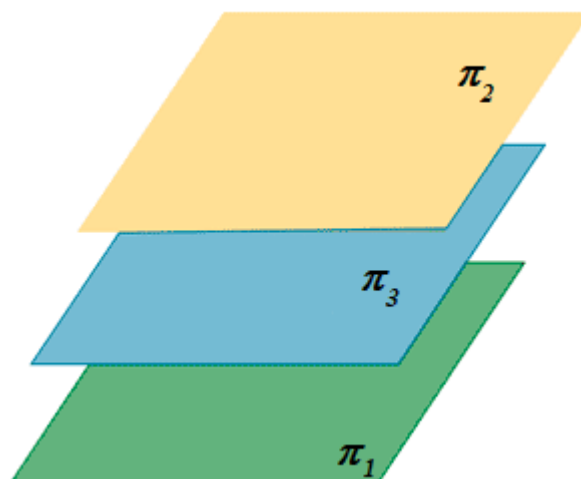
Sea el punto $P(x, y, z)$ equidistante de ambos planos. Se debe cumplir:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 2x - 3y + z - 4 = 0 \\ \pi_2: -2x + 3y - z - 2 = 0 \\ d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|2x - 3y + z - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|-2x + 3y - z - 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2x - 3y + z - 4| = |-2x + 3y - z - 2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = -2x + 3y - z - 2 \rightarrow -4 = -2 \rightarrow \text{Imposible!} \\ 2x - 3y + z - 4 = 2x - 3y - z - 2 \rightarrow 2z = 2 \rightarrow z = 1 \\ 2x - 3y + z - 4 = -(2x - 3y - z - 2) \rightarrow 4x - 6y + 2z - 2 = 0 \rightarrow \pi_3: 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

El plano equidistante de los planos tiene ecuación $\pi_3: 2x - 3y + z - 1 = 0$.



Problema 4A.

Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A , N y M . El 20% de los móviles son de la marca A y el 40% de la marca N . Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software oculto se instala en el 15% de los móviles de la marca A , en un 10% de la marca N y en un 12% de los móviles de la marca M . Se pide:

- Describir todas las probabilidades, condicionadas y no condicionadas, que se deducen directamente del enunciado. **(0,3 puntos)**
- Determinar la probabilidad de que un móvil fabricado por esta empresa tenga instalado el software espía. **(1 punto)**
- Si un móvil fabricado por esta empresa tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A . **(1,2 puntos)**

a) Llamamos A , N y M a los sucesos “elegir un móvil de la marca A , N o M ”, respectivamente.

Llamamos S al suceso “tener instalado software espía en el móvil”.

Por los datos proporcionados sabemos

$$P(A) = 0.20, P(N) = 0.40, P(M) = 1 - 0.20 - 0.40 = 0.40.$$

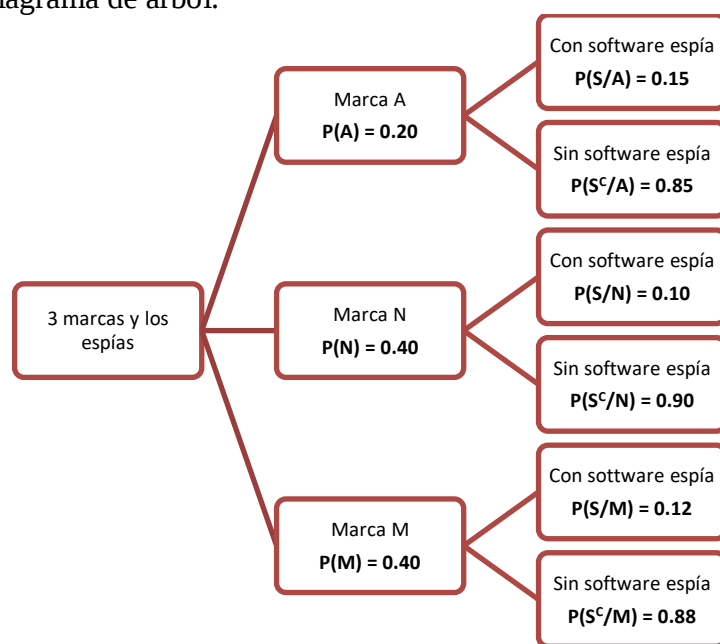
También sabemos que:

El software oculto se instala en el 15% de los móviles de la marca $A \rightarrow P(S/A) = 0.15$.

En un 10% de la marca $N \rightarrow P(S/N) = 0.10$.

En un 12% de los móviles de la marca $M \rightarrow P(S/M) = 0.12$

Realizamos un diagrama de árbol.



b) Nos piden calcular $P(S)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(S) &= P(A)P(S/A) + P(N)P(S/N) + P(M)P(S/M) = \\
 &= 0.2 \cdot 0.15 + 0.4 \cdot 0.10 + 0.4 \cdot 0.12 = \boxed{0.118}
 \end{aligned}$$

c) Debemos calcular $P(A/S)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/S) = \frac{P(S \cap A)}{P(S)} = \frac{P(A)P(S/A)}{0.118} = \frac{0.2 \cdot 0.15}{0.118} = \frac{15}{59} \approx 0.2542$$

Problema 4B.

De una bolsa de 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

- a) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3. **(0,5 puntos)**
- b) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3. **(0,75 puntos)**
- c) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sean múltiplos de 2. **(0,75 puntos)**
- d) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido. **(0,5 puntos)**

- a) Del 1 al 20 son múltiplos de 3 el 3, 6, 9, 12, 15 y 18. Al sacar una primera ficha hay 20 resultados posibles y 6 son favorables a obtener un múltiplo de 3. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una primera ficha múltiplo de 3 vale $\frac{6}{20}$.

Suponiendo que la primera ficha extraída es múltiplo de 3 nos quedan en la bolsa 19 fichas, siendo 5 las fichas que nos quedan que son múltiplo de 3. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una segunda ficha múltiplo de 3 habiendo extraído previamente una primera ficha múltiplo de 3 vale $\frac{5}{19}$.

Al extraer sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3 vale $\frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{38} \approx 0.0789$.

- b) Del 1 al 20 son múltiplos de 6 el 6, 12 y 18. Al sacar una primera ficha hay 20 resultados posibles y 3 son favorables a obtener un múltiplo de 6. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una primera ficha múltiplo de 6 vale $\frac{3}{20}$.

Suponiendo que la primera ficha extraída es múltiplo de 6 nos quedan en la bolsa 19 fichas, siendo 5 las fichas que nos quedan que son múltiplo de 3. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una segunda ficha múltiplo de 3 habiendo extraído previamente una primera ficha múltiplo de 6 vale $\frac{5}{19}$.

Al extraer sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3 vale $\frac{3}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{76} \approx 0.03947$.

- c) Del 1 al 20 no son múltiplos de 2 el 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 y 19. Al sacar una primera ficha hay 20 resultados posibles y 10 son favorables a obtener un número que no es múltiplo de 2. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una primera ficha que no es múltiplo de 2 vale $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

Suponiendo que la primera ficha extraída no es múltiplo de 2 nos quedan en la bolsa 19 fichas, siendo 9 las fichas que nos quedan que no son múltiplo de 2. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una segunda ficha que no es múltiplo de 2 habiendo extraído previamente una primera ficha que no es múltiplo de 2 vale $\frac{9}{19}$.

Al extraer sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento la probabilidad de que ambas no sean múltiplo de 2 vale $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38} \approx 0.2368$.

- d) Del 1 al 20 hay 10 fichas impares. Si la primera ficha extraída es impar nos quedan en la bolsa 19 fichas, siendo 9 las fichas que nos quedan que son impares. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una segunda ficha impar habiendo extraído previamente una primera ficha impar vale $\frac{9}{19}$.