



Prueba de acceso a la Universidad
Curso 2025/2026
Materia: Matemáticas II

INSTRUCCIONES: El estudiante **deberá resolver obligatoriamente las preguntas 1 a 3, y elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5.** Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que **se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen.** Solo se permite el uso de **calculadores de tipo 1 y 2**, tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. **Duración de la prueba: 90 minutos.**

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

Pregunta 1.

Durante la misión Dulcinea, el equipo de control clasifica las alertas técnicas detectadas a bordo en tres sistemas: sistema de navegación, que genera el 50% de las alertas, el sistema de comunicaciones, que genera el 30% de las alertas y el sistema de soporte vital, que genera el 20% de las alertas.

Además, se sabe que el 4% de las alertas de navegación, el 6% de las de comunicaciones y el 10% de las alertas de soporte vital, son críticas. Si se elige una alerta al azar.

- [1 punto]** Calcula la probabilidad de que la alerta sea crítica.
- [1 punto]** Sabiendo que la alerta no es crítica, calcula la probabilidad de que proceda del soporte vital.

Pregunta 2.

Durante una campaña de promoción de productos de Castilla-La Mancha, una empresa dedicada a la venta de azafrán estima que el beneficio diario obtenido, expresado en cientos de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = 80x \cdot e^{-0.5x}$$

Donde x representa el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña

- [1,25 puntos]** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $B(x)$ y determina el día en que el beneficio diario es máximo
- [0,75 puntos]** A largo plazo, ¿tiende el beneficio diario a estabilizarse en algún valor? En caso afirmativo determina dicho valor e interprételo en el contexto del problema.

Pregunta 3.

a) **[1 punto]** Determina los valores de a y b para que las matrices A y B cumplan que $A \cdot B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) **[1 punto]** Resuelve razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones
- $$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

PARTE B (preguntas 4 y 5)**PARTE B (preguntas 4 y 5)****Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)**

4.1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, a)$, $\vec{v} = (2, a, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 1, -1)$, se pide:

- a) **[0,75 puntos]** Halla los valores reales de a para que los tres vectores sean coplanarios. Justifica tu respuesta.
- b) **[1,25 puntos]** Halla los valores reales de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores del enunciado sea $10 u^3$.

4.2. [2 puntos] En un parque público, se está instalando un sistema de vigilancia mediante sensores de movimiento a ambos lados de un muro recto. Dicho muro está representado por el plano de ecuación:

$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0$$

Uno de los sensores está situado en el punto de coordenadas $P(1, 2, 6)$ y se desea instalar un segundo sensor en el punto P' , simétrico del anterior respecto del plano π .

- a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente las coordenadas del punto de instalación del segundo sensor, P' .
- b) **[0,75 puntos]** Calcula la distancia entre los dos sensores.

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1.

- a) **[1 punto]** Calcula justificadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^x$
- b) **[1 punto]** Calcula justificadamente la siguiente integral: $\int e^x \cdot \sin x dx$

5.2. [2 puntos] Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ ax+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, donde a y b son números reales.

Determina los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x=1$

SOLUCIONES

Pregunta 1.

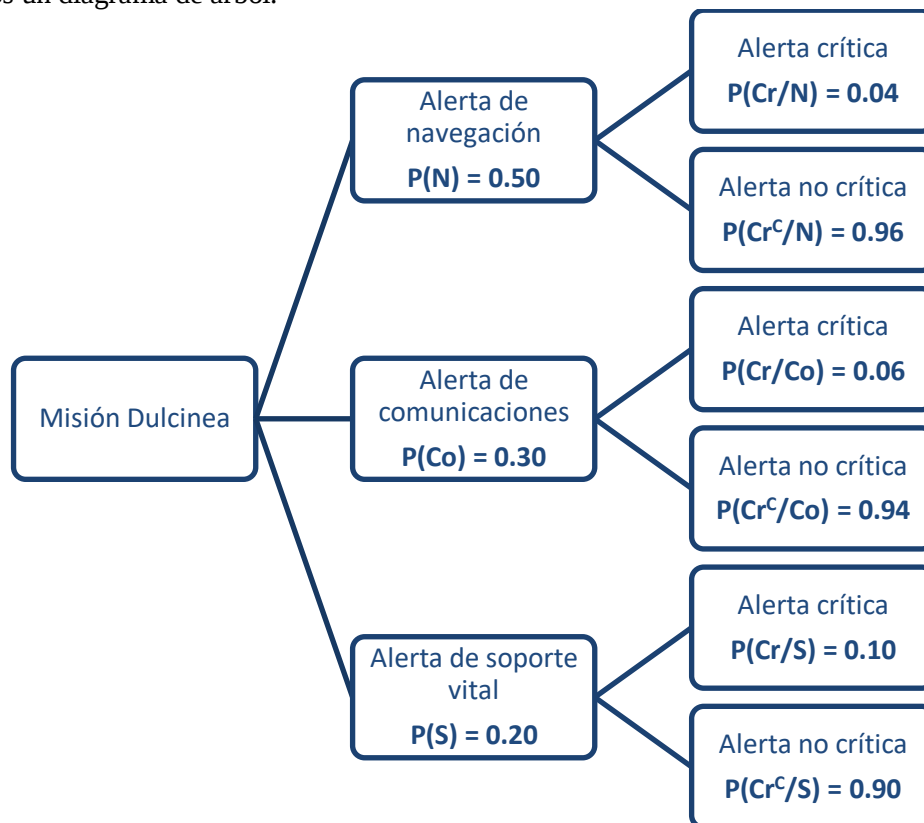
Durante la misión Dulcinea, el equipo de control clasifica las alertas técnicas detectadas a bordo en tres sistemas: sistema de navegación, que genera el 50% de las alertas, el sistema de comunicaciones, que genera el 30% de las alertas y el sistema de soporte vital, que genera el 20% de las alertas.

Además, se sabe que el 4% de las alertas de navegación, el 6% de las de comunicaciones y el 10% de las alertas de soporte vital, son críticas. Si se elige una alerta al azar.

a) **[1 punto]** Calcula la probabilidad de que la alerta sea crítica.

b) **[1 punto]** Sabiendo que la alerta no es crítica, calcula la probabilidad de que proceda del soporte vital.

Llamamos N al suceso “recibir alerta del sistema de navegación”, Co a “recibir alerta del sistema de comunicaciones”, S a “recibir alerta del sistema de soporte vital” y Cr a “la alerta es crítica”. Realizamos un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(Cr)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(Cr) &= P(N)P(Cr/N) + P(Co)P(Cr/Co) + P(S)P(Cr/S) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.04 + 0.3 \cdot 0.06 + 0.2 \cdot 0.10 = \boxed{0.058}
 \end{aligned}$$

b) Debemos calcular $P(S/Cr^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S/Cr^c) = \frac{P(S \cap Cr^c)}{P(Cr^c)} = \frac{P(S)P(Cr^c/S)}{P(Cr^c)} = \frac{0.2 \cdot 0.9}{1 - 0.058} = \boxed{\frac{30}{157} \approx 0.1911}$$

Pregunta 2.

Durante una campaña de promoción de productos de Castilla-La Mancha, una empresa dedicada a la venta de azafrán estima que el beneficio diario obtenido, expresado en cientos de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = 80x \cdot e^{-0.5x}$$

Donde x representa el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña

- a) **[1,25 puntos]** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $B(x)$ y determina el día en que el beneficio diario es máximo
- b) **[0,75 puntos]** A largo plazo, ¿tiende el beneficio diario a estabilizarse en algún valor? En caso afirmativo determina dicho valor e interprételo en el contexto del problema.

- a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función $B(x) = 80x \cdot e^{-0.5x}$.

$$B(x) = 80x \cdot e^{-0.5x} \Rightarrow B'(x) = 80e^{-0.5x} + 80x(-0.5)e^{-0.5x} = 80(1 - 0.5x)e^{-0.5x}$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow 80(1 - 0.5x)e^{-0.5x} = 0 \Rightarrow 1 - 0.5x = 0 \Rightarrow 0.5x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

La función $B(x)$ tiene un punto crítico en $x = 2$. Analizamos el signo de la derivada segunda para este valor.

$$B'(x) = 80(1 - 0.5x)e^{-0.5x} \Rightarrow B''(x) = 80(-0.5)e^{-0.5x} + 80(1 - 0.5x)(-0.5)e^{-0.5x} =$$

$$= 80(-0.5)e^{-0.5x} + 80(-0.5 + 0.25x)e^{-0.5x} \Rightarrow B''(x) = 80(-1 + 0.25x)e^{-0.5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B''(2) = 80(-1 + 0.25 \cdot 2)e^{-0.5 \cdot 2} = 80(-0.5)e^{-1} = \frac{-40}{e} < 0$$

Como la derivada primera se anula y la derivada segunda es negativa la función $B(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 2$.

El máximo beneficio se obtiene en el segundo día.

La función crece en $[0, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$.

- b) Calculamos el límite de la función cuando el tiempo tiende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 80x \cdot e^{-0.5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{80x}{e^{0.5x}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{80}{0.5 \cdot e^{0.5x}} = \frac{80}{\infty} = 0$$

El beneficio tiende a ser 0 con el paso de los días.

Pregunta 3.

a) **[1 punto]** Determina los valores de a y b para que las matrices A y B cumplan que $A \cdot B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** Resuelve razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) Resolvemos la ecuación matricial $A \cdot B = I$.

$$\begin{aligned} AB = I &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3-a-1 & -1+a+0 & -1+0+1 \\ 3-2-1 & -1+2+0 & -1+0+1 \\ 3-1-b & -1+1+0 & -1+0+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-b & 0 & b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2-a=1 \rightarrow \boxed{a=1} \\ a-1=0 \rightarrow a=1 \\ 2-b=0 \rightarrow b=2 \\ b-1=1 \rightarrow \boxed{b=2} \end{cases} \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a=1$ y $b=2$.

b) Resolvemos el sistema matricial.

$$\begin{aligned} \begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -2X - 2Y = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases} \\ &+ \\ &\overline{\hspace{1.5cm}} \quad \boxed{Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

La solución del sistema es $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

4.1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, a)$, $\vec{v} = (2, a, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 1, -1)$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Halla los valores reales de a para que los tres vectores sean coplanarios. Justifica tu respuesta.

b) **[1,25 puntos]** Halla los valores reales de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores del enunciado sea 10 u^3 .

a) Para que los tres vectores sean coplanarios su producto mixto debe valer 0.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, -1, a) \\ \vec{v} = (2, a, 1) \\ \vec{w} = (-1, 1, -1) \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a + 1 + 2a + a^2 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1=a} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2=a} \end{cases}$$

Los tres vectores son coplanarios para $a = -2$ y para $a = 1$.

b) Para que el volumen del paralelepípedo valga 10 u^3 el producto mixto de los tres vectores debe valer 10 o -10 .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, -1, a) \\ \vec{v} = (2, a, 1) \\ \vec{w} = (-1, 1, -1) \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow -a + 1 + 2a + a^2 - 2 - 1 = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + a - 12 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-1+7}{2} = \boxed{3=a} \\ \frac{-1-7}{2} = \boxed{-4=a} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, -1, a) \\ \vec{v} = (2, a, 1) \\ \vec{w} = (-1, 1, -1) \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow -a + 1 + 2a + a^2 - 2 - 1 = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + a + 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-31}}{2} = \text{¡No existe!}$$

El volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores vale 10 para $a = -4$ y para $a = 3$.

4.2. [2 puntos] En un parque público, se está instalando un sistema de vigilancia mediante sensores de movimiento a ambos lados de un muro recto. Dicho muro está representado por el plano de ecuación:

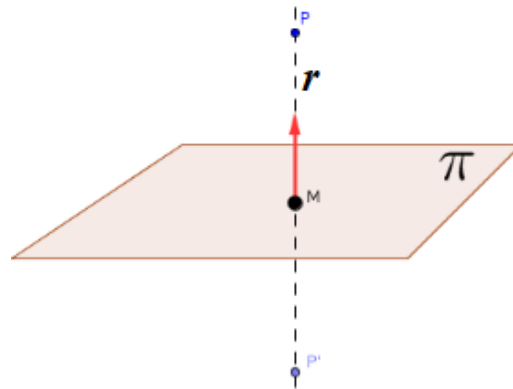
$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0$$

Uno de los sensores está situado en el punto de coordenadas $P(1,2,6)$ y se desea instalar un segundo sensor en el punto P' , simétrico del anterior respecto del plano π .

a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente las coordenadas del punto de instalación del segundo sensor, P' .

b) **[0,75 puntos]** Calcula la distancia entre los dos sensores.

a) Hallamos la recta r perpendicular al plano que pasa por el punto P . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.



$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ P(1, 2, 6) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z - 6 = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 2 + \lambda + 6 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 2 - 1 = 1 \\ z = 6 - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow M(0, 1, 5)$$

El punto P' lo podemos obtener sumando al punto M el vector $\overrightarrow{MP}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 2, 6) \\ M(0, 1, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{MP} = (1, 2, 6) - (0, 1, 5) = (1, 1, 1)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = (0, 1, 5) + (-1, -1, -1) = (-1, 0, 4)$$

Debemos colocar el segundo sensor en el punto de coordenadas $P'(-1, 0, 4)$.

b) Calculamos la distancia entre los puntos P y P' como el módulo del vector que los une.

$$\left. \begin{array}{l} P'(-1, 0, 4) \\ P(1, 2, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = (-1, 0, 4) - (1, 2, 6) = (-2, -2, -2)$$

$$d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} u$$

La distancia entre los sensores es de $2\sqrt{3}$ unidades de longitud.

5.1.

a) **[1 punto]** Calcula justificadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^x$

b) **[1 punto]** Calcula justificadamente la siguiente integral: $\int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx$

a) Calculamos el valor del límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^x = \dots$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty}$$

$$\dots = 1^\infty = \text{Indeterminación (número } e) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+1}{2x-3} - 1 \right)^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+1-2x+3}{2x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{4}} \right)^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{4}} \right)^{\frac{2x-3}{4} \cdot \frac{4}{2x-3} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{4}} \right)^{\frac{2x-3}{4} \cdot \frac{4x}{2x-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{4}} \right)^{\frac{2x-3}{4}} \right)^{\frac{4x}{2x-3}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 2} = \boxed{e^2}$$

b) Calculamos la integral pedida usando integración por partes.

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \int e^x \cdot \cos x dx = \dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x \cdot \cos x - \int e^x (-\operatorname{sen} x) dx = \\ &= e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx \end{aligned}}$$

$$\dots = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \left[e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx \right] = e^x \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx$$

Con la igualdad obtenida despejamos $\int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx$ y obtenemos su expresión.

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx \Rightarrow 2 \int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx = \frac{e^x \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot \cos x}{2} = \boxed{\frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + K}$$

5.2. [2 puntos] Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ ax+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, donde a y b son números reales.

Determina los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x=1$

Para que la función sea continua en $x=1$ deben coincidir el valor de la función con el valor de los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a \cdot 1 + b = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ax + b = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a+b=2 \Rightarrow \boxed{b=2-a}$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ siendo su derivada

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x \cdot (x-1) - 1 \cdot (x^2-1)}{(x-1)^2} = \frac{2x \cdot (x-1) - (x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x - (x+1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x=1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Para $a=1$ tenemos que $b=2-1=1$.

Para $a=b=1$ la función es continua y derivable en $x=1$.