

**Proves d'accés a la universitat****Matemàtiques****Serie 1**

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas e indíquela en la portada.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Considere la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{2x} & x \leq 0 \\ (x+m)^2 + 1 & 0 < x < 2, \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Donde m es un parámetro real.

- 1.1. Determine los valores de m que hacen que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. Justifique la respuesta. [1 punto]
- 1.2. Haga un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$ para el caso $m = -2$, y calcule el área delimitada por esta gráfica, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 3$. [1 punto]
- 1.3. Para $m = -2$, encuentre un punto donde la recta tangente a $y = f(x)$ sea paralela a $y = -2x$. Calcule la ecuación de esta recta tangente. [0.5 puntos]

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, el cual está formado por tres planos en el espacio y depende del parámetro real m :

$$\left. \begin{aligned} x + my + z &= 4 \\ x + 3y + z &= 5 \\ mx + y + z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

- 2.1. Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m . [1 punto]
- 2.2. Interprete geoméricamente este sistema para todos los valores del parámetro m y resuélvalo, si es posible, para el caso $m = 1$. [1 punto]

- 2.3. Para $m = 1$, ¿es posible añadir una cuarta ecuación de manera que el sistema resultante sea compatible determinado y tenga como solución $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$? Razone la respuesta. [0,5 puntos]

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

El Ayuntamiento de Canet de Mar ha conseguido 24 entradas gratuitas para un concierto de un grupo de rock catalán, y ha decidido sortearlas entre los vecinos interesados en asistir. Todos los vecinos del pueblo seguidores de este grupo se apuntan al sorteo, y solo al 16 % de ellos les toca una entrada. Del resto de seguidores del grupo, seis séptimas partes intentan comprar una entrada a través de la web, donde la probabilidad de conseguirla es del 25 %.

3.1. ¿Cuántas personas de este municipio tienen entrada para el concierto? [0,75 puntos]

3.2. Si se escoge al azar un vecino de Canet seguidor de este grupo de rock y no tiene entrada para el concierto, ¿cuál es la probabilidad de que haya intentado conseguirla vía web? [0,75 puntos]

3.3. El día del concierto, el equipo de sonido mide el nivel de decibelios generado por los gritos entusiastas del público a lo largo de los 5 minutos de duración de la canción más famosa del grupo; se puede aproximar por la siguiente función:

$$S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90, \quad t \in [0, 5],$$

donde t es el tiempo en minutos y $S(t)$ los decibelios. Cuando se superan los 100 decibelios se considera que el público está muy entregado y se activan automáticamente unos efectos lumínicos especiales. ¿Se activarán en algún momento durante estos cinco minutos? Si la respuesta es afirmativa, calcule en qué minuto se activan, aproximado a las décimas.

[1 punto]

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

Escoja UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Indique en la portada del examen la opción elegida.

OPCIÓN A

El alcalde de un pueblo de Catalunya encarga al arquitecto municipal el diseño de un parque infantil que se construirá en un terreno público. Para cumplir con la normativa vigente, en el parque tiene que haber dos espacios bien delimitados: uno para una boca de riego —el cual, según el arquitecto, debe tener forma circular—, y otro para una caseta donde guardar las herramientas de mantenimiento —el cual debe tener forma cuadrada—. Por motivos estéticos, el arquitecto quiere delimitar cada uno de estos dos espacios con una barandilla de forja. Sabiendo que las dos barandillas miden exactamente 10 m de longitud en total, ¿qué medida debe tener la barandilla de cada espacio para que la suma de las superficies de los dos espacios sea lo más pequeña posible? ¿Cuál es esta superficie mínima?

OPCIÓN B

Considere los puntos del espacio $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ y $R = (1, 1, 1)$.

4.1. Calcule la ecuación del plano que contiene los puntos P, Q y R.. [0,75 puntos]

4.2. Compruebe que el área del triángulo ΔPQR es $\frac{3\sqrt{5}}{2} u^2$. [0.75 puntos]

4.3. Determine las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un cuarto punto $S = (x, y, z)$ para que P, Q, R y S formen un tetraedro de volumen 1. (El volumen del

tetraedro formado por los puntos P, Q, R y S es: $\text{volumen}(PQRS) = \frac{\text{área}(\Delta PQR) \cdot \text{altura}}{3}$).

[1 punto]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Considere la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{2x} & x \leq 0 \\ (x+m)^2 + 1 & 0 < x < 2, \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Donde m es un parámetro real.

1.1. Determine los valores de m que hacen que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

Justifique la respuesta. [1 punto]

1.2. Haga un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$ para el caso $m = -2$, y calcule el área delimitada por esta gráfica, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 3$. [1 punto]

1.3. Para $m = -2$, encuentre un punto donde la recta tangente a $y = f(x)$ sea paralela a $y = -2x$. Calcule la ecuación de esta recta tangente. [0.5 puntos]

1.1. La función en $(-\infty, 0)$ tiene la expresión $f(x) = 5e^{2x}$ que es una expresión exponencial y es continua.

La función en $(0, 2)$ tiene la expresión $f(x) = (x+m)^2 + 1$ que es una expresión polinómica y es continua.

La función en $(2, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = 1$ que es una expresión constante y es continua.

La función para ser continua en su dominio debe serlo en los puntos de cambio de definición.

La función debe ser continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 5e^{2 \cdot 0} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 5e^{2x} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+m)^2 + 1 = (x+0)^2 + 1 = m^2 + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow m^2 + 1 = 5 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{4} = \pm 2}$$

La función debe ser continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+m)^2 + 1 = (2+m)^2 + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2+m)^2 + 1 = 1 \Rightarrow (2+m)^2 = 0 \Rightarrow$$

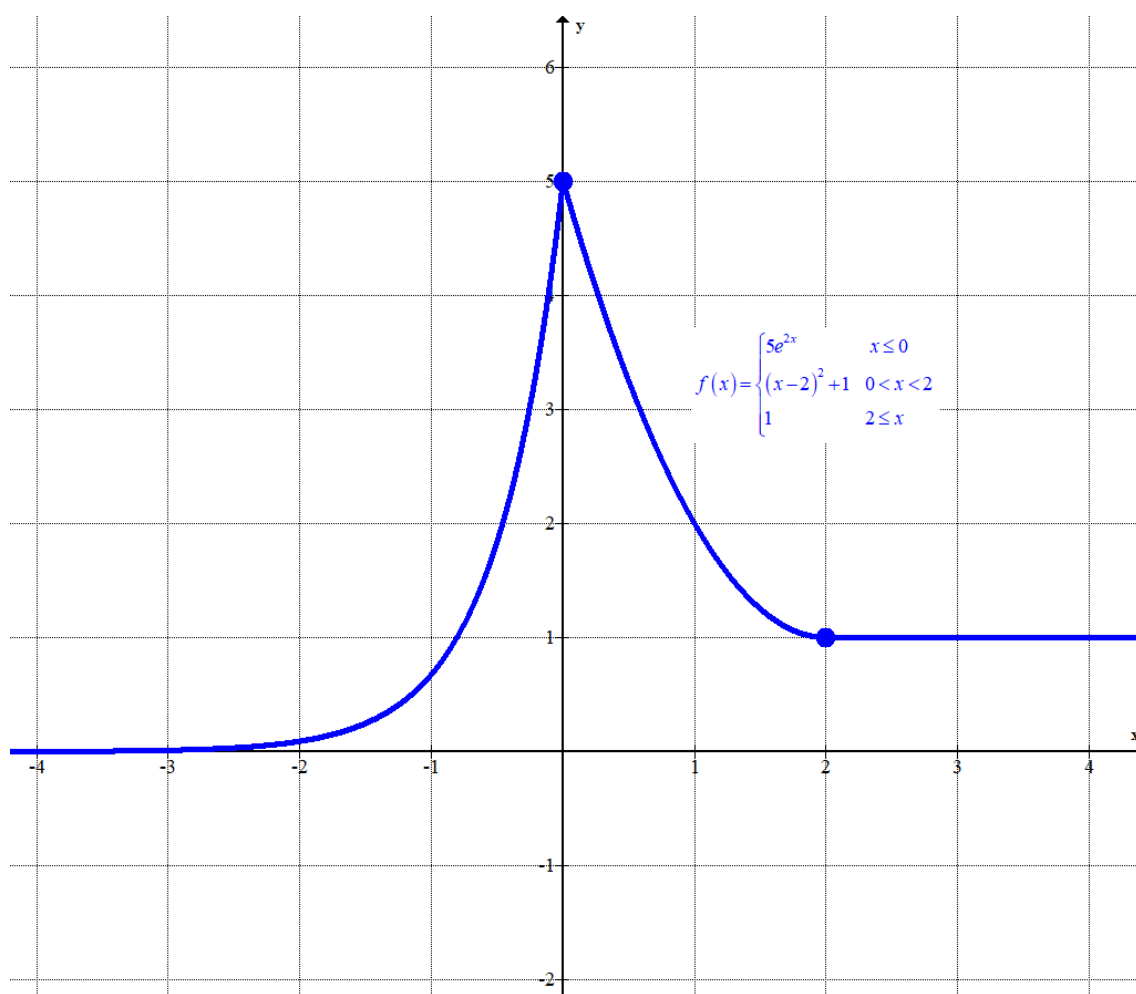
$$\Rightarrow 2 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = -2}$$

Para que la función sea continua en todo su dominio debe ser $m = -2$.

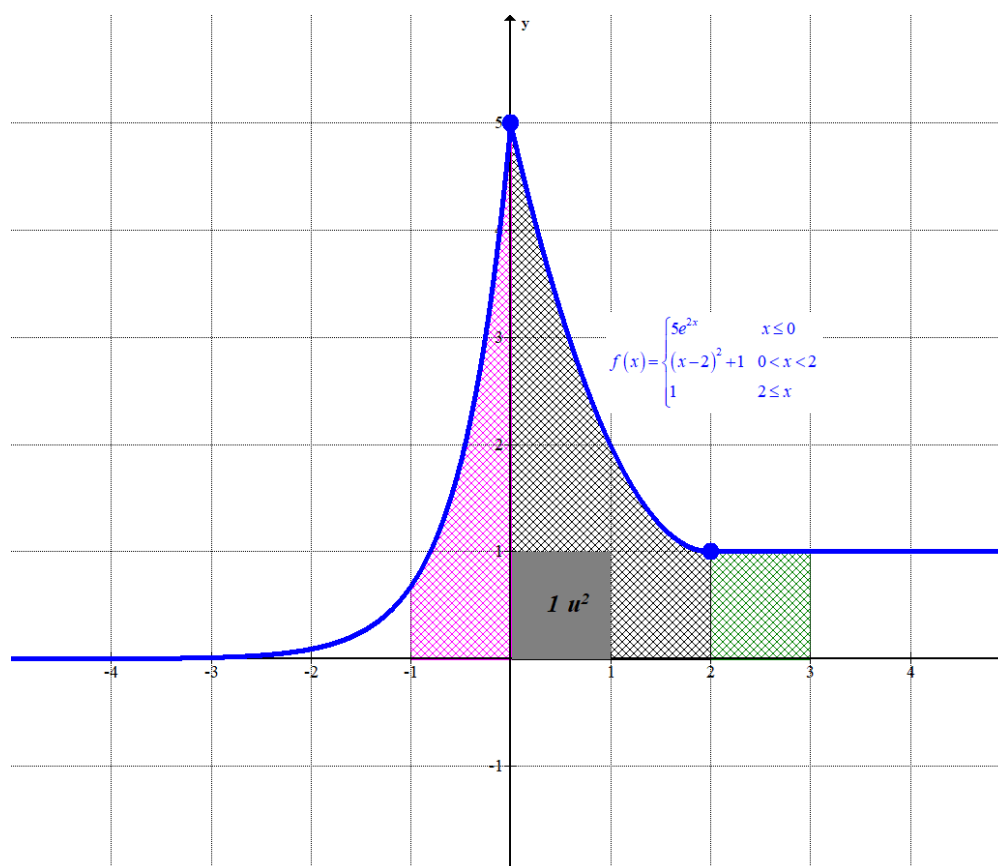
1.2. Para $m = -2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} 5e^{2x} & x \leq 0 \\ (x-2)^2 + 1 & 0 < x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$. Sabemos que es continua.

Sabemos que su gráfica es un trozo de función exponencial, otro trozo de parábola y un trozo de recta horizontal. Hacemos una tabla y dibujamos su gráfica.

$x \leq 0$		$0 < x < 2$		$2 \leq x$	
x	$f(x) = 5e^{2x}$	x	$f(x) = (x-2)^2 + 1$	x	$f(x) = 1$
-2	0.09	0.5	3.25	2	1
-1	0.68	1	2	3	1
0	5	1.5	1.25	4	1



Coloreamos la región del plano de la cual queremos hallar el área.



La región de color rosa tiene un área que se obtiene con la integral definida de -1 a 0 de $f(x) = 5e^{2x}$.

$$\text{Área 1} = \int_{-1}^0 5e^{2x} dx = \left[\frac{5}{2} e^{2x} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{5}{2} e^{2 \cdot 0} \right] - \left[\frac{5}{2} e^{2 \cdot (-1)} \right] = \frac{5 - 5e^{-2}}{2} \approx 2.16 \text{ u}^2$$

La región de color gris tiene un área que se obtiene con la integral definida de 0 a 2 de $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Área 2} &= \int_0^2 (x-2)^2 + 1 dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3} + x \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{(2-2)^3}{3} + 2 \right] - \left[\frac{(0-2)^3}{3} + 0 \right] = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3} \approx 4.6667 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

La región de color verde es un cuadrado de lado 1 y su área vale 1 unidad cuadrada.

El área delimitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 3$ es la suma de las tres áreas obtenidas: $\frac{5 - 5e^{-2}}{2} + \frac{14}{3} + 1 = \frac{15 - 15e^{-2} + 28 + 6}{6} = \frac{49 - 15e^{-2}}{6} \approx 7.83$ unidades cuadradas.

1.3. La recta $y = -2x$ tiene pendiente -2 . Para que la recta tangente sea paralela a $y = -2x$ tiene que tener pendiente -2 . Para ello la derivada de la función tiene que valer $-2 \rightarrow f'(x) = -2$

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{2x} & x \leq 0 \\ (x-2)^2 + 1 & 0 < x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 10e^{2x} & x < 0 \\ 2(x-2) & 0 < x < 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$

$$f'(x) = -2 \Rightarrow \begin{cases} 10e^{2x} = -2 \rightarrow \{e^{2x} > 0\} \rightarrow \text{¡Imposible!} & x < 0 \\ 2(x-2) = -2 \rightarrow x-2 = -1 \rightarrow \boxed{x=1} \in (0, 2) \\ 0 = -2 \rightarrow \text{¡Imposible!} & 2 < x \end{cases}$$

La recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a $y = -2x$ en $x = 1$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = (1-2)^2 + 1 = 2 \\ f'(1) = -2 \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = -2(x-1) \Rightarrow y - 2 = -2x + 2 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, el cual está formado por tres planos en el espacio y depende del parámetro real m :

$$\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$$

2.1. Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m . [1 punto]

2.2. Interprete geométricamente este sistema para todos los valores del parámetro m y resuélvalo, si es posible, para el caso $m = 1$. [1 punto]

2.3. Para $m = 1$, ¿es posible añadir una cuarta ecuación de manera que el sistema resultante sea compatible determinado y tenga como solución $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$? Razone la respuesta. [0,5 puntos]

2.1. Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + m^2 + 1 - 3m - m - 1 = m^2 - 4m + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=m} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=m} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq 3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $m=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ -3 \quad -9 \quad -3 \quad -12 \\ \hline 0 \quad -8 \quad -2 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \\ -1 \quad -3 \quad -1 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

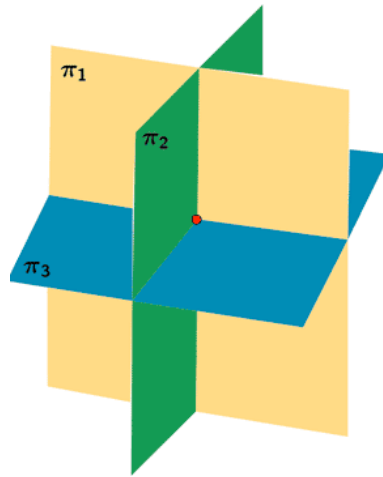
$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 3 \quad 1 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad -8 \quad -2 \quad -8 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

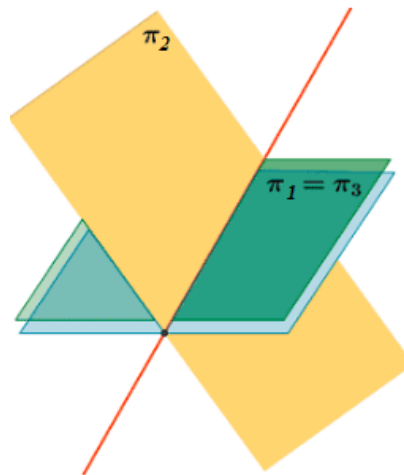
Resumiendo: Para $m \neq 1$ y $m \neq 3$ el sistema es **compatible determinado**, para $m=1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $m=3$ el sistema es **incompatible**.

2.2. Considerando cada ecuación como la ecuación de un plano podemos interpretar lo obtenido en el apartado anterior como:

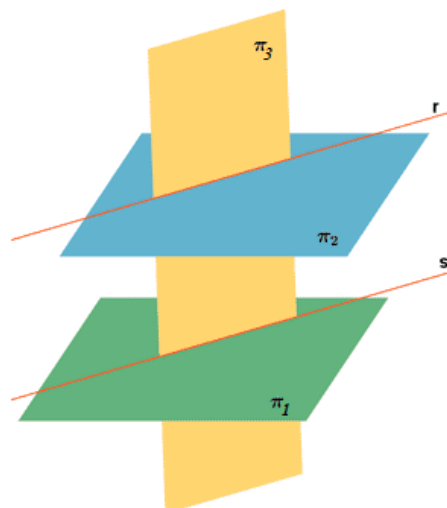
Para $m \neq 1$ y $m \neq 3$ los tres planos coinciden en un punto.



Para $m=1$ los tres planos coinciden en una recta:
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{array} \right\}, \text{ el primer y tercer plano son el mismo.}$$



Para $m=3$ los planos no coinciden en ningún punto:
$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 3x + y + z = 4 \end{array} \right\}, \text{ el primer y segundo plano son paralelos, el tercer plano corta a los otros dos.}$$



Resolvemos el sistema para $m=1$. Por lo visto en el apartado anterior sabemos que el sistema es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida en el apartado a).

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 & 1 & 1}^{A/B} & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{0 & 0 & 0}_A & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=4 \\ 2y=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=4 \\ y=\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x+\frac{1}{2}+z=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{2} - z \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} - \lambda \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \frac{7}{2} - \lambda \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

2.3. Para $m=1$ el sistema que queda es $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$ que tiene como sistema equivalente

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2y=1 \end{cases}. \text{ Hemos obtenido su solución } (x, y, z) = \left(\frac{7}{2} - \lambda, \frac{1}{2}, \lambda \right), \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si queremos que tenga como solución $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ añadimos la ecuación $z = \frac{1}{2}$.

El sistema quedaría $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+z=4 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ teniendo como solución $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

Este nuevo sistema es compatible determinado pues su sistema equivalente es $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2y=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$

que tiene como matriz ampliada $\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 & 1 & 1}^{A/B} & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right)$ siendo el rango de A y A/B el mismo que el número de ecuaciones (3), por lo que el sistema es compatible determinado.

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

El Ayuntamiento de Canet de Mar ha conseguido 24 entradas gratuitas para un concierto de un grupo de rock catalán, y ha decidido sortearlas entre los vecinos interesados en asistir. Todos los vecinos del pueblo seguidores de este grupo se apuntan al sorteo, y solo al 16 % de ellos les toca una entrada. Del resto de seguidores del grupo, seis séptimas partes intentan comprar una entrada a través de la web, donde la probabilidad de conseguirla es del 25 %.

3.1. ¿Cuántas personas de este municipio tienen entrada para el concierto? [0,75 puntos]

3.2. Si se escoge al azar un vecino de Canet seguidor de este grupo de rock y no tiene entrada para el concierto, ¿cuál es la probabilidad de que haya intentado conseguirla vía web? [0,75 puntos]

3.3. El día del concierto, el equipo de sonido mide el nivel de decibelios generado por los gritos entusiastas del público a lo largo de los 5 minutos de duración de la canción más famosa del grupo; se puede aproximar por la siguiente función:

$$S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90, \quad t \in [0, 5],$$

donde t es el tiempo en minutos y $S(t)$ los decibelios. Cuando se superan los 100 decibelios se considera que el público está muy entregado y se activan automáticamente unos efectos lumínicos especiales. ¿Se activarán en algún momento durante estos cinco minutos? Si la respuesta es afirmativa, calcule en qué minuto se activan, aproximado a las décimas.

[1 punto]

3.1. Las 24 entradas gratuitas se reparten entre los seguidores del grupo en Canet de Mar.

Estas entradas la consiguen el 16% de los seguidores del grupo. Hacemos una regla de tres para obtener el número de seguidores del grupo que viven en Canet de Mar.

$$\left. \begin{array}{l} x \longrightarrow 100\% \\ 24 \longrightarrow 16\% \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{24 \cdot 100}{16} = 150$$

En el pueblo hay 150 seguidores del grupo y $150 - 24 = 126$ se han quedado sin entrada.

Sabemos que seis séptimas partes de los que no tienen entrada (126) intentan comprar una entrada a través de la web $\rightarrow \frac{6}{7} \cdot 126 = 108$ seguidores intentan comprar entrada en la web.

El 25% de los 108 consiguen comprar entrada por internet $\rightarrow 0.25 \cdot 108 = 27$ compran entrada por internet.

El total de seguidores que tienen entrada para el concierto es $24 + 27 = 51$ seguidores.

3.2. De los 150 seguidores del grupo hay $150 - 51 = 99$ que no tienen entrada (n° casos posibles).

Son $108 - 27 = 81$ los seguidores que intentaron comprar entrada por internet y no lo consiguieron (casos favorables).

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad pedida vale $\frac{81}{99} = \frac{9}{11} \approx 0.8182$.

3.3. Averiguamos si la función alcanza el valor de 100.

$$S(t) = 100 \Rightarrow -t^3 + 12t^2 - 30t + 90 = 100 \Rightarrow -t^3 + 12t^2 - 30t - 10 = 0$$

Nos planteamos si la función $D(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t - 10$ se anula para $t \in [0, 5]$.

La función es continua (polinómica) en el intervalo $[0, 5]$ y

$$D(0) = -0^3 + 12 \cdot 0^2 - 30 \cdot 0 - 10 = -10 < 0$$

$$D(5) = -5^3 + 12 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 - 10 = 15 > 0$$

Como la función es continua en $[0,5]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo aplicando el teorema de Bolzano podemos asegurar que existe $c \in (0,5)$ tal que $D(c) = 0$. Es decir, existe un momento entre los 5 primeros minutos donde se alcanzan los 100 decibelios.

Para encontrar de forma aproximada cuando se alcanzan los 100 decibelios vamos valorando la función.

$$\left. \begin{array}{l} S(0) = -0^3 + 12 \cdot 0^2 - 30 \cdot 0 + 90 = 90 \\ S(2) = -2^3 + 12 \cdot 2^2 - 30 \cdot 2 + 90 = 70 \\ S(4) = -4^3 + 12 \cdot 4^2 - 30 \cdot 4 + 90 = 98 \\ S(5) = -5^3 + 12 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 90 = 115 \end{array} \right\} \Rightarrow c \in (4,5)$$

Volvemos a valorar la función entre 4 y 5.

$$\left. \begin{array}{l} S(4) = -4^3 + 12 \cdot 4^2 - 30 \cdot 4 + 90 = 98 \\ S(4.5) = -4.5^3 + 12 \cdot 4.5^2 - 30 \cdot 4.5 + 90 = 106.875 \\ S(5) = -5^3 + 12 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 90 = 115 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} S(4) = -4^3 + 12 \cdot 4^2 - 30 \cdot 4 + 90 = 98 \\ \Rightarrow S(4.2) = -4.2^3 + 12 \cdot 4.2^2 - 30 \cdot 4.2 + 90 = 101.592 \\ S(4.5) = -4.5^3 + 12 \cdot 4.5^2 - 30 \cdot 4.5 + 90 = 106.875 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

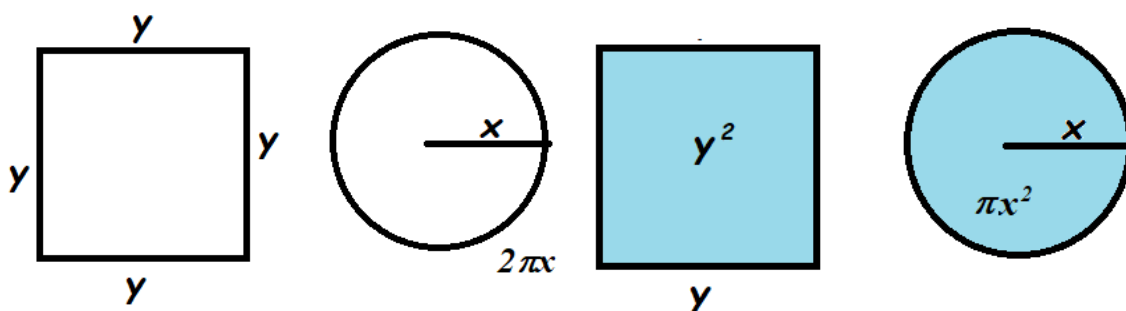
$$\left. \begin{array}{l} S(4) = -4^3 + 12 \cdot 4^2 - 30 \cdot 4 + 90 = 98 \\ \Rightarrow S(4.1) = -4.1^3 + 12 \cdot 4.1^2 - 30 \cdot 4.1 + 90 = 99.799 \\ S(4.2) = -4.2^3 + 12 \cdot 4.2^2 - 30 \cdot 4.2 + 90 = 101.592 \end{array} \right\} \Rightarrow c \in (4.1, 4.2)$$

El momento en que se alcanzan los 100 decibelios está entre los 4.1 y los 4.2 minutos.

Ejercicio 4 OPCIÓN A

El alcalde de un pueblo de Catalunya encarga al arquitecto municipal el diseño de un parque infantil que se construirá en un terreno público. Para cumplir con la normativa vigente, en el parque tiene que haber dos espacios bien delimitados: uno para una boca de riego —el cual, según el arquitecto, debe tener forma circular—, y otro para una caseta donde guardar las herramientas de mantenimiento —el cual debe tener forma cuadrada—. Por motivos estéticos, el arquitecto quiere delimitar cada uno de estos dos espacios con una barandilla de forja. Sabiendo que las dos barandillas miden exactamente 10 m de longitud en total, ¿qué medida debe tener la barandilla de cada espacio para que la suma de las superficies de los dos espacios sea lo más pequeña posible? ¿Cuál es esta superficie mínima?

Llamamos “x” al radio de la circunferencia e “y” al lado del cuadrado.



El perímetro de la circunferencia es $2\pi x$ y la del cuadrado es $4y$.

La suma de los perímetros debe ser 10.

$$2\pi x + 4y = 10 \rightarrow \pi x + 2y = 5 \rightarrow 2y = 5 - \pi x \rightarrow y = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2}x$$

La superficie del círculo es πx^2 y la del cuadrado es y^2 .

La suma de ambas superficies tiene la expresión $S(x, y) = \pi x^2 + y^2$.

$$\left. \begin{array}{l} S(x, y) = \pi x^2 + y^2 \\ y = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2}x \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = \pi x^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{\pi}{2}x \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) = \pi x^2 + \left(\frac{5}{2} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{2} x = \pi x^2 + \frac{25}{4} + \frac{\pi^2}{4} x^2 - \frac{5\pi}{2} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{4\pi x^2 + 25 + \pi^2 x^2 - 10\pi x}{4} = \frac{(4\pi + \pi^2)x^2 - 10\pi x + 25}{4}$$

$$\boxed{S(x) = \frac{\pi(4 + \pi)x^2 - 10\pi x + 25}{4}}$$

La suma de las superficies de cuadrado y círculo viene dada por la función:

$$S(x) = \frac{\pi(4 + \pi)x^2 - 10\pi x + 25}{4}$$

Derivamos esta función y averiguamos cuando se anula.

$$S(x) = \frac{\pi(4+\pi)x^2 - 10\pi x + 25}{4} \Rightarrow S'(x) = \frac{2\pi(4+\pi)x - 10\pi}{4} = \frac{\pi(4+\pi)x - 5\pi}{2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi(4+\pi)x - 5\pi}{2} = 0 \Rightarrow \pi(4+\pi)x - 5\pi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi(4+\pi)x = 5\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{\pi(4+\pi)} = \frac{5}{4+\pi}}$$

La función suma de superficies tiene un punto crítico en $x = \frac{5}{4+\pi}$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$S'(x) = \frac{\pi(4+\pi)x - 5\pi}{2} \Rightarrow S''(x) = \frac{\pi(4+\pi)}{2} \Rightarrow \boxed{S''\left(\frac{5}{4+\pi}\right) = \frac{\pi(4+\pi)}{2} > 0}$$

Para $x = \frac{5}{4+\pi}$ se anula la primera derivada y la segunda derivada toma valor positivo. La

función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{5}{4+\pi} \simeq 0.7$ metros.

Para este valor determinamos el valor de “y”.

$$y = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5}{4+\pi} = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4+\pi}\right) = \frac{5}{2} \left(\frac{4+\pi-\pi}{4+\pi}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{4+\pi} = \frac{10}{4+\pi} \simeq 1.4 \text{ metros}$$

Para este valor hallamos la superficie total.

$$\begin{aligned} S\left(\frac{5}{4+\pi}\right) &= \frac{\pi(4+\pi)\left(\frac{5}{4+\pi}\right)^2 - 10\pi\left(\frac{5}{4+\pi}\right) + 25}{4} = \frac{\frac{25\pi}{4+\pi} - \frac{50\pi}{4+\pi} + 25}{4} = \\ &= \frac{25 - \frac{25\pi}{4+\pi}}{4} = \frac{\frac{100 + 25\pi - 25\pi}{4+\pi}}{4} = \frac{\frac{100}{4+\pi}}{4} = \frac{100}{4(4+\pi)} = \frac{25}{4+\pi} \simeq 3.5 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Para que la suma de las superficies de los dos espacios sea lo más pequeña posible debe ser la circunferencia de radio $x = \frac{5}{4+\pi}$ y el cuadrado de lado $\frac{10}{4+\pi}$.

La barandilla de la circunferencia mide $2\pi \cdot \frac{5}{4+\pi} = \frac{10\pi}{4+\pi} \simeq 4.4$ metros y la barandilla del

cuadrado mide $4 \cdot \frac{10}{4+\pi} = \frac{40}{4+\pi} \simeq 5.6$ metros.

Ejercicio 4 OPCIÓN B

Considere los puntos del espacio $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ y $R = (1, 1, 1)$.

4.1. Calcule la ecuación del plano que contiene los puntos P, Q y R. [0,75 puntos]

4.2. Compruebe que el área del triángulo ΔPQR es $\frac{3\sqrt{5}}{2} u^2$. [0.75 puntos]

4.3. Determine las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un cuarto punto $S = (x, y, z)$ para que P, Q, R y S formen un tetraedro de volumen 1. (El volumen del tetraedro formado por los puntos P, Q, R y S es: $\text{volumen}(PQRS) = \frac{\text{área}(\Delta PQR) \cdot \text{altura}}{3}$). [1 punto]

4.1. Hallamos el plano π que contiene los tres puntos.

$$\left. \begin{array}{l} P = (1, 0, -1) \in \pi \\ Q = (3, -2, 0) \in \pi \\ R = (1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P = (1, 0, -1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (3, -2, 0) - (1, 0, -1) = (2, -2, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (1, 1, 1) - (1, 0, -1) = (0, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x-1) + 0 + 2(z+1) - 0 - 4y - (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 4 + 2z + 2 - 4y - x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : -5x - 4y + 2z + 7 = 0}$$

El plano que contiene los puntos P, Q y R tiene ecuación $\pi : -5x - 4y + 2z + 7 = 0$.

4.2. El área del triángulo ΔPQR es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1) \\ \overrightarrow{PR} = (0, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4i + 0 + 2k - 0 - 4j - i =$$

$$= -5i - 4j + 2k = (-5, -4, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}}$$

El área del triángulo ΔPQR vale $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ unidades cuadradas.

4.3. Utilizamos la fórmula proporcionada.

$$\text{volumen}(PQRS) = \frac{\text{área}(\Delta PQR) \cdot \text{altura}}{3} \Rightarrow 1 = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \text{altura}}{3} \Rightarrow 3 = \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \text{altura} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{altura} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Si el triángulo PQR es la base del tetraedro la altura es la distancia del punto S al plano π definido por los puntos P, Q y R. Buscamos el punto S que está a una distancia del plano π con valor $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} D(S, \pi) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ S(x, y, z) \\ \pi: -5x - 4y + 2z + 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|-5x - 4y + 2z + 7|}{\sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \frac{|-5x - 4y + 2z + 7|}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-5x - 4y + 2z + 7| = \frac{2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow |-5x - 4y + 2z + 7| = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5x - 4y + 2z + 7 = 6 \rightarrow \boxed{5x + 4y - 2z - 1 = 0} \\ o \\ -5x - 4y + 2z + 7 = -6 \rightarrow \boxed{5x + 4y - 2z - 13 = 0} \end{cases}$$

Las coordenadas del punto S deben cumplir la igualdad $5x + 4y - 2z - 1 = 0$ o bien $5x + 4y - 2z - 13 = 0$.

Dicho de otra forma, el punto S debe pertenecer a uno de estos dos planos paralelos al plano π : $5x + 4y - 2z - 1 = 0$ o bien $5x + 4y - 2z - 13 = 0$.