



Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2025-2026

Materia: MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El estudiante deberá resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen. Los ejercicios 1, 2 y 3 tienen dos opciones A y B, solo hay que contestar una de las dos opciones (A o B). Si se contesta a las dos se corregirá solo la que aparezca en primer lugar, salvo que esté tachada. **El ejercicio 4 es único y obligatorio.**

CADA EJERCICIO COMPLETO PUNTUARÁ 2,5 PUNTOS COMO MÁXIMO. En cada apartado se indica la correspondiente puntuación.

Se adjunta al final tabla de la distribución NORMAL por si hiciera falta para algún ejercicio.

Todas las instrucciones son las recogidas en los criterios generales de evaluación ya publicados junto con los modelos de exámenes. Indicamos a modo de recordatorio y resumen:

Criterios generales. Las respuestas de los ejercicios deberán realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución con el rigor y la precisión necesaria, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados. Se valorará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.

Ortografía y redacción. Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica y la presentación. Se deducirá 0,10 puntos por cada falta a partir de la tercera. Se podrá deducir hasta 1 punto máximo en la puntuación final.

Materiales. Se permitirá una calculadora no gráfica y no programable, según el anexo aprobado y publicado.

EJERCICIO 1.A. (2,5 puntos) a) 1,5 puntos b) 1 punto

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + kz = k \\ kx + (k-1)y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro k .
- b) Resolverlo para el caso $k = 2$.

EJERCICIO 1.B. (2,5 puntos) a) 1,25 puntos b) 1,25 puntos

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Resolver la ecuación matricial $AX = B^t - 2X$ donde B^t es la traspuesta de la matriz B.
- b) Resolver el sistema matricial de ecuaciones: $2X + 3Y = A$, $X - 2Y = B$.

EJERCICIO 2.A. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 1 punto c) 0.5 puntos

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

- a) Estudiar y obtener las asíntotas de la función f.
- b) Determinar los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).
- c) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de f(x).

EJERCICIO 2.B. (2,5 puntos) a) 1,25 puntos b) 1,25 puntos

Dadas las funciones: $f(x) = 8 - 8x$ y $g(x) = x^3 - 4x$

a) Calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X

EJERCICIO 3.A. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 0,75 puntos c) 0.75 puntos

- a) Sean los puntos $A(1,3,-2)$ y $B(3,-1,2)$, calcular la ecuación del plano perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto que divide el segmento AB en dos partes iguales.
 b) Calcular la distancia del punto A al plano $\pi: 2x - y + 2z - 4 = 0$.
 c) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π y que pase por el punto B.

EJERCICIO 3.B. (2,5 puntos) a) 0,75 puntos b) 0,75 puntos c) 1 punto

- a) Dados los vectores $\vec{u} = (0,3,-4)$ y $\vec{v} = (12,4,3)$ comprobar que el paralelogramo que forman es un rectángulo y calcular su área.
 b) Hallar la ecuación del plano formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el punto $(1,0,0)$.
 c) Obtener un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo 13.

EJERCICIO 4. (2,5 puntos) a) 0,75 puntos b) 0,75 puntos c) 1 punto

En un estudio realizado por una empresa hotelera se ha obtenido que la distribución del tiempo de estancia del viajero en el hotel es una ley normal de media 3,7 días y desviación típica 1,5 días. Calcular:

- a) ¿Qué probabilidad habrá de que un viajero permanezca en el hotel entre 2 y 5 días?
 b) Si se contabilizan 1000 viajeros, ¿cuántos han estado en el hotel más de 7 días?
 c) La empresa quiere bonificar con un descuento a los viajeros que permanezcan muchos días. Después de hacer un estudio del presupuesto con el que cuenta la empresa, solo se puede aplicar al 10% de los viajeros. ¿A partir de qué número de días de permanencia se les podrá aplicar el descuento?

ANEXO TABLA DISTRIBUCIÓN NORMAL

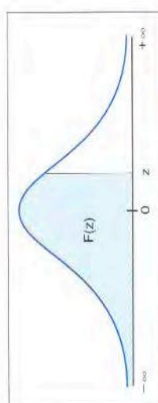


Tabla de distribución normal $N(0,1)$
 $F(z) = P(Z \leq z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

SOLUCIONES

EJERCICIO 1.A. (2,5 puntos) a) 1,5 puntos b) 1 punto

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + kz = k \\ kx + (k-1)y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro k .

b) Resolverlo para el caso $k = 2$.

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k \\ k & k-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{k} - \cancel{1} + 1 + k^2 - k(k-1) - \cancel{k} - 1 = k^2 - k^2 + k - 1 = k - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

Nos surgen dos situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 1$

En este caso el determinante de la matriz A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 1$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 1 & 1 & 1}^{A/B} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $k = 2$ (caso 1) el sistema es compatible determinado. Obtenemos su solución.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ y = 1 - x - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 - x - z + 2z = 2 \\ 2x + 1 - x - z + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 - 1 - 1 = -1$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$.

EJERCICIO 1.B. (2,5 puntos)**a) 1,25 puntos****b) 1,25 puntos**Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a) Resolver la ecuación matricial $AX = B^t - 2X$ donde B^t es la traspuesta de la matriz B.b) Resolver el sistema matricial de ecuaciones: $2X + 3Y = A$, $X - 2Y = B$.

a) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX = B^t - 2X \Rightarrow AX + 2X = B^t \Rightarrow (A + 2I)X = B^t \Rightarrow X = (A + 2I)^{-1} B^t$$

Comprobamos que la matriz $A + 2I$ es invertible y determinamos su inversa.

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A + 2I| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3 \neq 0$$

$$(A + 2I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A + 2I)^t)}{|A + 2I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Terminamos de hallar la expresión de la matriz X.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A + 2I)^{-1} B^t = \begin{pmatrix} 4/3 & -1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{3} + 3 & \frac{4}{3} - 2 \\ \frac{-1}{3} + 0 & \frac{1}{3} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b) Resolvemos el sistema matricial planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = A \\ X - 2Y = B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = A \\ -2X + 4Y = -2B \end{array} \right\}$$

$$\hline 7Y = A - 2B \Rightarrow Y = \frac{1}{7}(A - 2B) \Rightarrow X - 2\frac{1}{7}(A - 2B) = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X - \frac{2}{7}A + \frac{4}{7}B = B \Rightarrow \boxed{X = \frac{2}{7}A + \frac{3}{7}B = \frac{1}{7}(2A + 3B)}$$

$$X = \frac{1}{7} \left[2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3/7 \\ 1/7 & 10/7 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9/7 \\ -3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} -1 & -3/7 \\ 1/7 & 10/7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 9/7 \\ -3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2.A. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 1 punto c) 0.5 puntos

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

- a) Estudiar y obtener las asíntotas de la función f.
 b) Determinar los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).
 c) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de f(x).

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
 El dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \frac{1^2 - 2 \cdot 2 + 4}{2 - 2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{2x} + 4 - \cancel{x^2} + \cancel{2x}}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x - 2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua de la función.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 2) - 1 \cdot (x^2 - 2x + 4)}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 2x + 4 - x^2 + 2x - 4}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2} = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos y del valor excluido del dominio $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

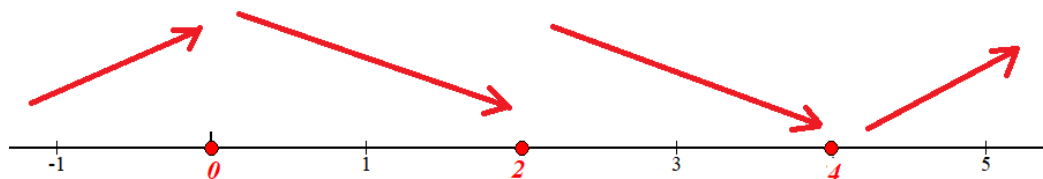
$$f'(-1) = \frac{(-1)(-1-4)}{(-1-2)^2} = \frac{5}{9} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1 \cdot (1-4)}{(1-2)^2} = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, 4)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{3 \cdot (3-4)}{(3-2)^2} = -3 < 0$. La función decrece en $(2, 4)$.

- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{5 \cdot (5-4)}{(5-2)^2} = \frac{5}{9} > 0$. La función crece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



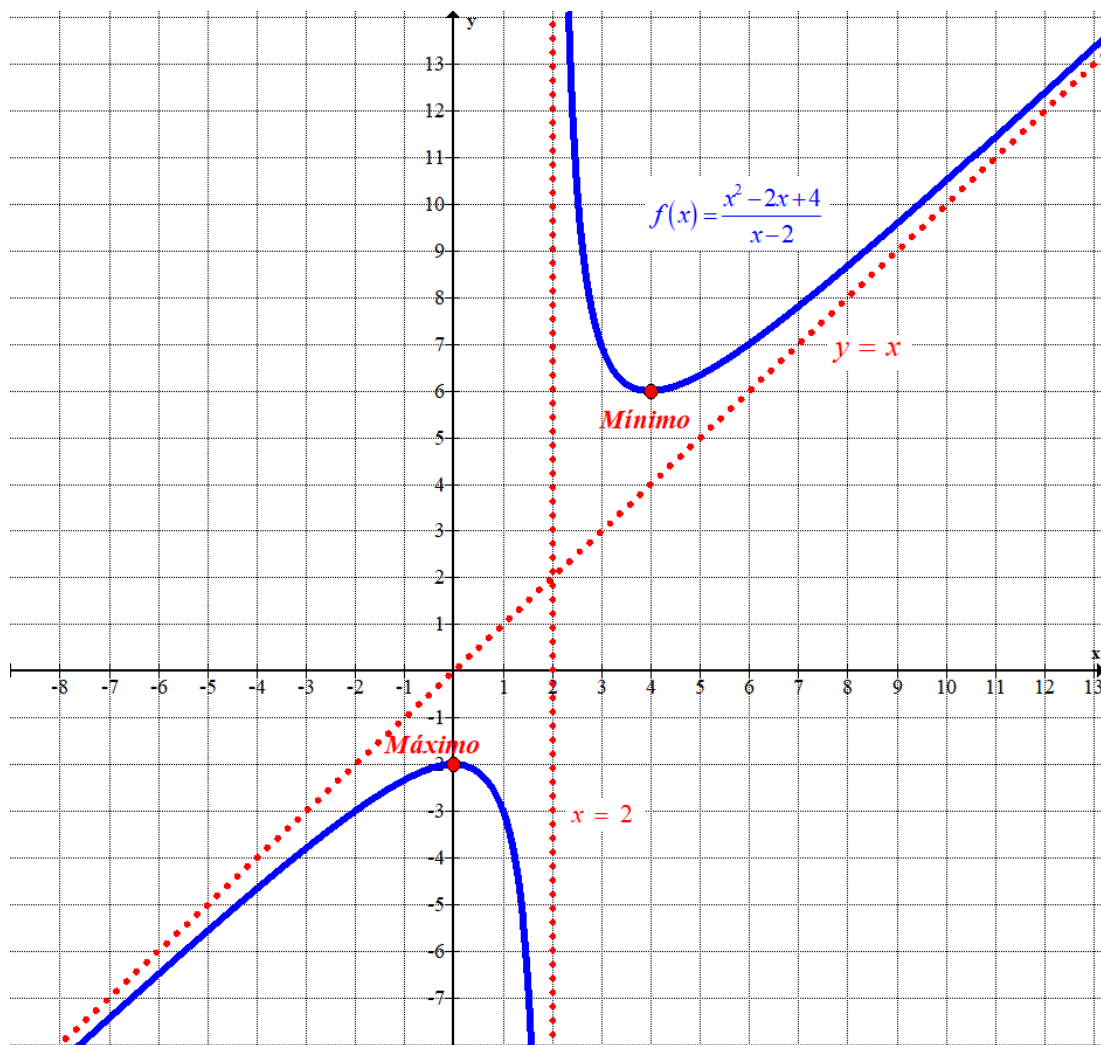
La función crece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, 4)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = 0$. Como $f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 4}{0 - 2} = -2$ el máximo relativo tiene coordenadas $(0, -2)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 4$. Como $f(4) = \frac{4^2 - 2 \cdot 4 + 4}{4 - 2} = 6$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(4, 6)$.

c) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$
-2	-3
0	-2
1	-3
3	7
4	6
6	7



EJERCICIO 2.B. (2,5 puntos) a) 1,25 puntos b) 1,25 puntosDadas las funciones: $f(x) = 8 - 8x$ y $g(x) = x^3 - 4x$

a) Calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X

a) Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{8-8x}{x^3-4x} dx = 8 \int \frac{1-x}{x^3-4x} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1-x}{x^3-4x} = \frac{1-x}{x(x^2-4)} = \frac{1-x}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \Rightarrow$$

$$\frac{1-x}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 1 = A(-2)(2) \rightarrow -4A=1 \rightarrow A = -\frac{1}{4} \\ x=2 \rightarrow -1 = B \cdot 2(4) \rightarrow 8B=-1 \rightarrow B = -\frac{1}{8} \\ x=-2 \rightarrow 3 = C(-2)(-4) \rightarrow 8C=3 \rightarrow C = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{1-x}{x^3-4x} = \frac{-1/4}{x} - \frac{1/8}{x-2} + \frac{3/8}{x+2}$$

$$\dots = 8 \int \frac{-1/4}{x} - \frac{1/8}{x-2} + \frac{3/8}{x+2} dx = 8 \frac{-1}{4} \int \frac{1}{x} dx - 8 \frac{1}{8} \int \frac{1}{x-2} dx + 8 \frac{3}{8} \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= \boxed{-2 \ln|x| - \ln|x-2| + 3 \ln|x+2| + K}$$

b) Hallamos los posibles puntos de corte de la gráfica de $g(x) = x^3 - 4x$ con el eje X.

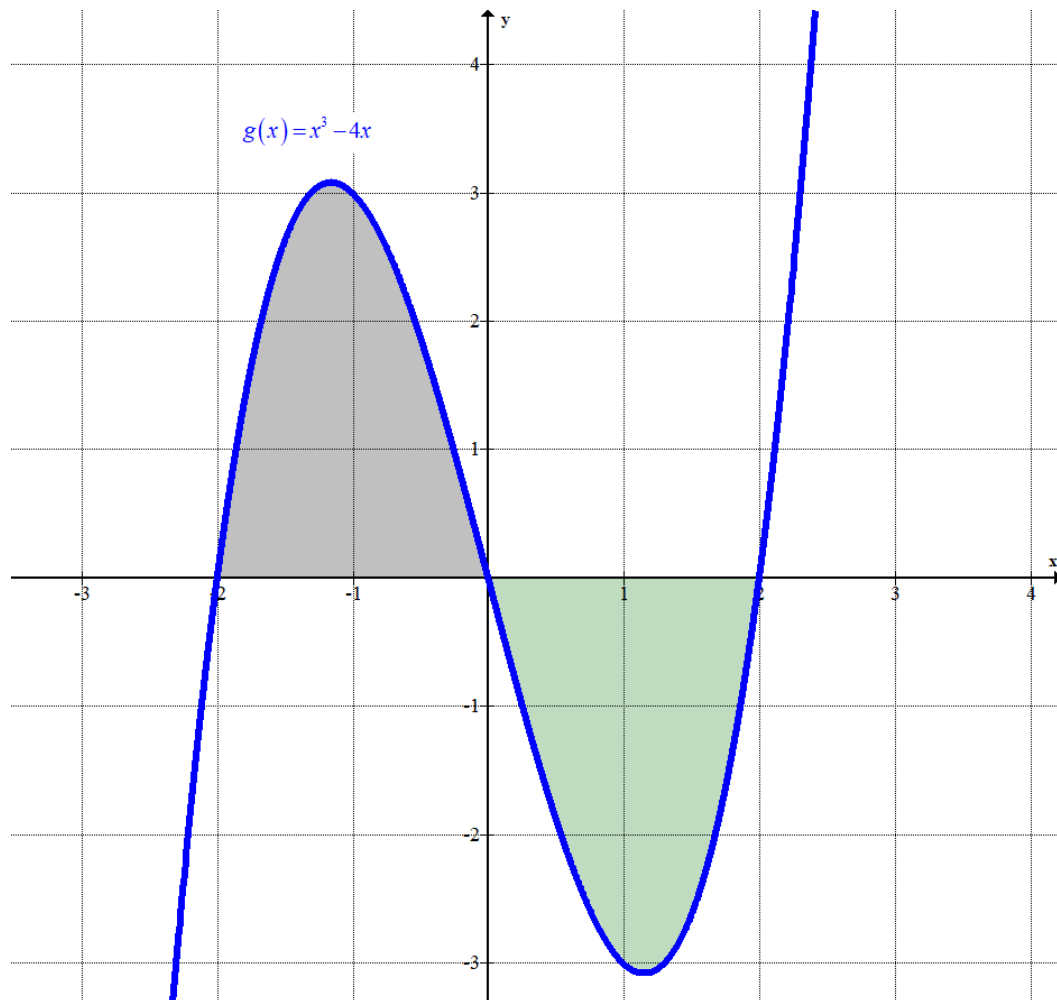
$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^3 - 4x \\ \text{Eje X} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

El área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X lo determinamos como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas de la función: una de -2 a 0 y otra de 0 a 2 .

$$\int_{-2}^0 g(x) dx = \int_{-2}^0 x^3 - 4x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 = \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 \right] = -4 + 8 = 4$$

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 x^3 - 4x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right] = 4 - 8 = -4$$

El área tiene un valor de $4 + 4 = 8$ unidades cuadradas.



- EJERCICIO 3.A. (2,5 puntos) a) 1 punto b) 0,75 puntos c) 0.75 puntos**
- a) Sean los puntos $A(1,3,-2)$ y $B(3,-1,2)$, calcular la ecuación del plano perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto que divide el segmento AB en dos partes iguales.
- b) Calcular la distancia del punto A al plano $\pi: 2x - y + 2z - 4 = 0$.
- c) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π y que pase por el punto B .

a) Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,3,-2) \\ B(3,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3,-1,2) - (1,3,-2) = (2,-4,4)$$

Hallamos el punto medio del segmento AB .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,3,-2) \\ B(3,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{(3,-1,2) + (1,3,-2)}{2} = (2,1,0)$$

El plano π' perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como vector normal dicho vector. Hallamos la ecuación del plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (2,-4,4) \\ P(2,1,0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': 2x - 4y + 4z + D = 0 \\ P(2,1,0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - 4 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi': 2x - 4y + 4z + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - 2y + 2z = 0}$$

La ecuación del plano perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto que divide el segmento AB en dos partes iguales es $\pi': x - 2y + 2z = 0$.

b) Hallamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y + 2z - 4 = 0 \\ A(1,3,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 + 2(-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 3 - 4 - 4|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3u$$

La distancia del punto A al plano π es de 3 unidades.

c) El plano paralelo al plano $\pi: 2x - y + 2z - 4 = 0$ tiene ecuación $\pi'': 2x - y + 2z + D = 0$.

Hallamos el valor de D para que dicho plano pase por el punto B .

$$\left. \begin{array}{l} \pi'': 2x - y + 2z + D = 0 \\ B(3,-1,2) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 3 - (-1) + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow 6 + 1 + 4 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -11 \Rightarrow \boxed{\pi'': 2x - y + 2z - 11 = 0}$$

La ecuación del plano paralelo al plano π que pase por el punto B es $\pi'': 2x - y + 2z - 11 = 0$.

EJERCICIO 3.B. (2,5 puntos)**a) 0,75 puntos****b) 0,75 puntos****c) 1 punto**

- a) Dados los vectores $\vec{u} = (0, 3, -4)$ y $\vec{v} = (12, 4, 3)$ comprobar que el paralelogramo que forman es un rectángulo y calcular su área.
- b) Hallar la ecuación del plano formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el punto $(1, 0, 0)$.
- c) Obtener un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo 13.

- a) Para que formen un rectángulo el ángulo entre ellos debe ser 90° y para ello su producto escalar debe ser nulo.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 3, -4) \cdot (12, 4, 3) = 0 + 12 - 12 = 0$$

Se cumple y forman un rectángulo. Como los vectores definen un rectángulo el área de este rectángulo es el producto de las longitudes de los dos vectores.

$$\text{Área} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{169} = \boxed{65 \text{ u}^2}$$

- b) Hallamos la ecuación del plano pedido.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (0, 3, -4) \\ \vec{v} = (12, 4, 3) \\ (1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 3 & -4 \\ 12 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9(x-1) - 48y + 0 - 36z - 0 + 16(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25(x-1) - 48y - 36z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 25x - 48y - 36z - 25 = 0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi : 25x - 48y - 36z - 25 = 0$.

- c) Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es su producto vectorial. También podemos utilizar el vector normal del plano obtenido en el apartado anterior como un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\pi : 25x - 48y - 36z - 25 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (25, -48, -36)$$

El vector $\vec{n} = (25, -48, -36)$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. También lo son todos los vectores con coordenadas proporcionales $\vec{w} = a\vec{n} = (25a, -48a, -36a)$.

Obtenemos el valor de "a" para que el vector $\vec{w}$ tenga módulo 13.

$$|\vec{w}| = 13 \Rightarrow \sqrt{(25a)^2 + (-48a)^2 + (-36a)^2} = 13 \Rightarrow 625a^2 + 2304a^2 + 1296a^2 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4225a^2 = 169 \Rightarrow a^2 = \frac{169}{4225} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\frac{169}{4225}} = \frac{\pm 13}{65}}$$

Un vector que cumple lo pedido es $\vec{w}_1 = \frac{13}{65}(25, -48, -36) = \left(5, \frac{-48}{5}, \frac{-36}{5}\right)$.

Otro vector es $\vec{w}_2 = \frac{-13}{65}(25, -48, -36) = \left(-5, \frac{48}{5}, \frac{36}{5}\right)$

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)**a) 0,75 puntos****b) 0,75 puntos****c) 1 punto**

En un estudio realizado por una empresa hotelera se ha obtenido que la distribución del tiempo de estancia del viajero en el hotel es una ley normal de media 3,7 días y desviación típica 1,5 días. Calcular:

- a) ¿Qué probabilidad habrá de que un viajero permanezca en el hotel entre 2 y 5 días?
 b) Si se contabilizan 1000 viajeros, ¿cuántos han estado en el hotel más de 7 días?
 c) La empresa quiere bonificar con un descuento a los viajeros que permanezcan muchos días. Después de hacer un estudio del presupuesto con el que cuenta la empresa, solo se puede aplicar al 10% de los viajeros. ¿A partir de qué número de días de permanencia se les podrá aplicar el descuento?

Sea X = Los días de estancia de un viajero en un hotel. $X = N(3.7, 1.5)$.

a) Calculamos $P(2 \leq X \leq 5)$.

$$\begin{aligned}
 P(2 \leq X \leq 5) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 3.7}{1.5} \end{array} \right\} = P\left(\frac{2 - 3.7}{1.5} \leq Z \leq \frac{5 - 3.7}{1.5}\right) = P(-1.13 \leq Z \leq 0.867) = \\
 &= P(Z \leq 0.867) - P(Z \leq -1.13) = P(Z \leq 0.867) - P(Z \geq 1.13) = \\
 &= P(Z \leq 0.87) - [1 - P(Z \leq 1.13)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.8078 - 1 + 0.8708 = \boxed{0.6786}
 \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0

b) Calculamos la probabilidad de que un viajero pase en el hotel más de 7 días: $P(X > 7)$.

$$\begin{aligned}
 P(X > 7) &= 1 - P(X \leq 7) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 3.7}{1.5} \end{array} \right\} = 1 - P\left(Z \leq \frac{7 - 3.7}{1.5}\right) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 2.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9861 = \boxed{0.0139}
 \end{aligned}$$

Como $1000 \cdot 0.0139 = 13.9$, podemos decir que de los 1000 viajeros pasan en el hotel más de 7 días 14 de ellos.

c) Debemos averiguar el valor de m tal que $P(X \geq m) = 0.10$.

z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192
1,5	0,9332
1,6	0,9452
1,7	0,9554
1,8	0,9641
1,9	0,9713
2,0	0,9772
2,1	0,9821
2,2	0,9861
2,3	0,9898

$$P(X \geq m) = 0.10 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{m-3.7}{1.5}\right) = 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{m-3.7}{1.5}\right) = 1 - 0.1 = 0.9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m-3.7}{1.5} = 1.285 \Rightarrow m-3.7 = 1.9275 \Rightarrow \boxed{m = 5.6275 \text{ días}}$$

Si se les aplica el descuento a partir de 6 días se le aplicaría al 10% de los viajeros.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177