



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025-2026
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El examen consta de cinco preguntas, las tres primeras obligatorias. Las dos últimas preguntas tienen opcionalidad interna.

Cada pregunta se puntúa con 2 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras que aparecen en el listado publicado en la web de la Universidad de La Rioja. No se permite el préstamo de materiales (ni bolígrafos, ni tìpex, ni materiales auxiliares) entre el alumnado, durante el examen.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

En el grado de matemáticas la probabilidad de aprobar las asignaturas: Métodos Algorítmicos en Matemáticas, Estadística y Bases de datos son 60%, 75% y 80%, respectivamente.

- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de aprobar las tres. [0.5 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de suspender solo una de las tres. [0.75 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que habiendo suspendido solo una de las tres, calcula la probabilidad de que haya sido Métodos Algorítmicos en Matemáticas. [0.75 puntos]

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados.

- En un reparto de tierras una de las parcelas esta delimitada por las curvas $y = \sqrt{4-x}$, $y = \sqrt{4-4x}$ e $y = 0$. Ayudándote de la Figura 1, determina el área de esa parcela. [1 punto]
- En dicha parcela el propietario decide hacer una piscina rectangular, de tal manera que uno de sus lados está en el eje $y = 0$, véase la Figura 1. Calcula el área máxima de la piscina. [1 punto]

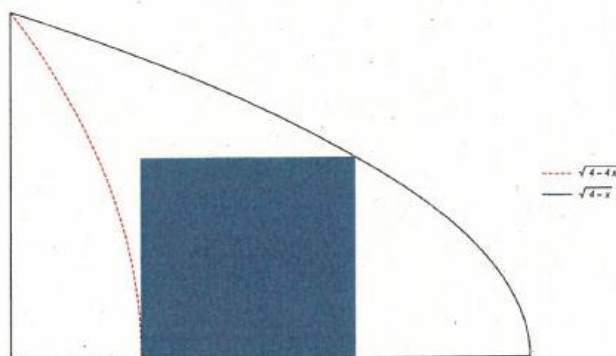


Figura 1: Parcela con piscina

Pregunta 3**Contesta justificadamente los siguientes apartados.**

En una tienda de comida para llevar, el producto más vendido se elabora con tres variantes: A, B y C. Cada variante se vende en dos tamaños: pequeño y grande. Cada día se elaboran las cantidades de cada variante que aparecen en la siguiente tabla:

	A	B	C
Pequeño	100	50	100
grande	160	150	100

De la variante A venden en tienda el 50%, de la variante B el 60% y de la variante C el 40%. El resto se reparte a domicilio.

- Escribe la matriz que expresa el número de productos según el tamaño y la variante. [0.5 puntos]
- Escribe la matriz que expresa el número de productos y el porcentaje según la variante y el tipo de venta. [0.5 puntos]
- Calcula la matriz que expresa el número de productos según tamaño y tipo de venta. [1 punto]

PARTE B (preguntas 4 y 5.)**Ejercicio 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)****4.1** Dada la función $f(x) = xe^{-2x^2}$

- Determina su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas. [0.75 puntos]
- Halla los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento y, los puntos de inflexión. [0.75 puntos]
- Con la información obtenida en los apartados anteriores representa la curva. [0.5 puntos]

4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- [1 punto] Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{\sin x} - 1 \right)}{a^2 x^2}, a \neq 0.$$

- Sea la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$. Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en $(0,1)$. [1 punto]

Ejercicio 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)**5.1** Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En un chiringuito de playa se instala un toldo para los clientes. El toldo se coloca en los siguientes puntos de apoyo: $(3, 8, 17/2)$, $(4, 6, 37/4)$, $(2, 8, 8)$ y $(s, 16, 8)$ con $s \in \mathbb{R}$

- Determina la ecuación del plano que contiene al toldo. [0.75 puntos]
- Calcula el valor de s para que los cuatro puntos sean coplanarios, es decir, están en el mismo plano. [0.75 puntos]
- Se quiere instalar un altavoz para poner música y este debe estar como mínimo a 2 metros de distancia del toldo, ¿estará correctamente colocado si el altavoz está en el punto $(0, 0, 5)$? [0.5 puntos]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean las rectas $r: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z - 1}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de las dos rectas r y s . [1 punto]
- b) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1, 1, -1)$ y es paralelo a las dos rectas r y s . [1 punto]

Soluciones

Pregunta 1.

En el grado de matemáticas la probabilidad de aprobar las asignaturas: Métodos Algorítmicos en Matemáticas, Estadística y Bases de datos son 60%, 75% y 80%, respectivamente.

- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de aprobar las tres. [0.5 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de suspender solo una de las tres. [0.75 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que habiendo suspendido solo una de las tres, calcula la probabilidad de que haya sido Métodos Algorítmicos en Matemáticas. [0.75 puntos]

- a) Llamamos A, B y C a los sucesos aprobar Métodos algorítmicos en matemáticas, Estadística y Bases de datos, respectivamente. Nos dicen que $P(A) = 0.60$, $P(B) = 0.75$ y $P(C) = 0.80$. Suponemos que los sucesos A, B y C son independientes entre sí, por lo que la probabilidad de aprobar las tres asignaturas es el producto de las probabilidades de aprobar cada una de ellas.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.6 \cdot 0.75 \cdot 0.8 = \boxed{0.36}$$

La probabilidad de aprobar las tres asignaturas vale 0.36.

- b) El suceso suspender solo una de las tres asignaturas puede ocurrir de tres formas distintas y su probabilidad será la suma de las probabilidades de estos tres sucesos.

$$\begin{aligned} &P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) = \\ &= P(\bar{A})P(B)P(C) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(A)P(B)P(\bar{C}) = \\ &= (1 - 0.6) \cdot 0.75 \cdot 0.8 + 0.6(1 - 0.75) \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.75 \cdot (1 - 0.8) = \boxed{0.45} \end{aligned}$$

La probabilidad de suspender solo una de las tres asignaturas vale 0.45.

- c) Si llamamos D al suceso “suspender solo una de las tres asignaturas” nos piden calcular $P(\bar{A} / D)$. Sabemos que $P(D) = 0.45$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} / D) &= \frac{P(\bar{A} \cap D)}{P(D)} = \frac{P(\bar{A} \cap B \cap C)}{P(D)} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C)}{P(D)} = \\ &= \frac{(1 - 0.6) \cdot 0.75 \cdot 0.8}{0.45} = \boxed{\frac{8}{15} \approx 0.5333} \end{aligned}$$

Pregunta 2.**Contesta justificadamente los siguientes apartados.**

- (a) En un reparto de tierras una de las parcelas está delimitada por las curvas $y = \sqrt{4-x}$, $y = \sqrt{4-4x}$ e $y = 0$. Ayudándote de la Figura 1, determina el área de esa parcela. [1 punto]
- b) En dicha parcela el propietario decide hacer una piscina rectangular, de tal manera que uno de sus lados está en el eje $y = 0$, véase la Figura 1. Calcula el área máxima de la piscina. [1 punto]

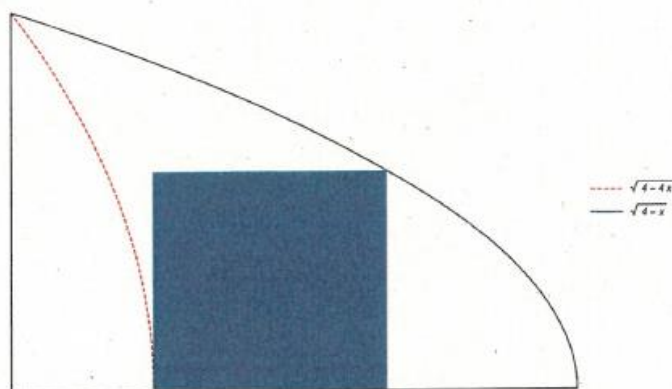


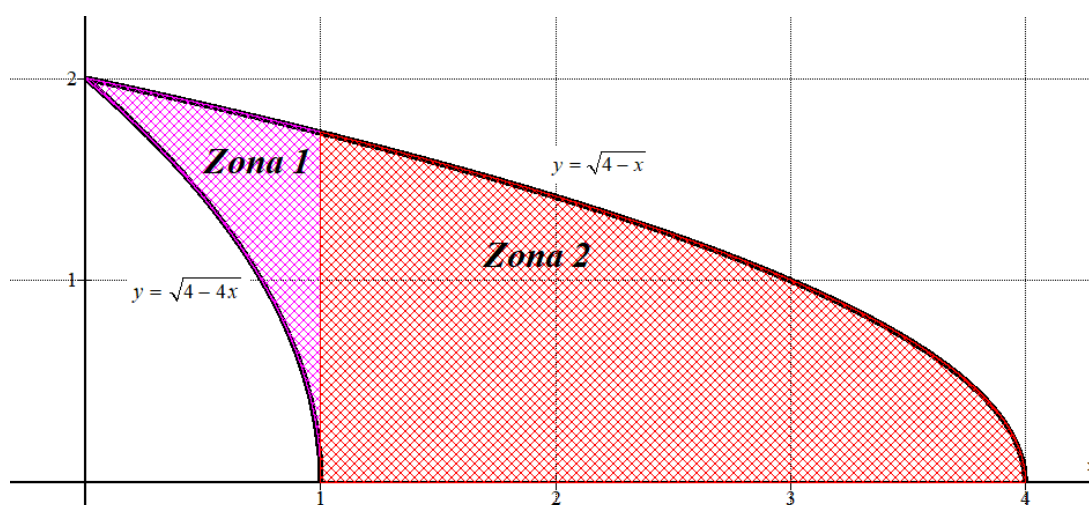
Figura 1: Parcela con piscina

- a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas con el eje $y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{4-x} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{4-x} = 0 \Rightarrow 4-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{4-4x} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{4-4x} = 0 \Rightarrow 4-4x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Añadimos a la Figura 1 la información obtenida y coloreamos la parcela.



El área de la parcela la obtenemos como la suma de las áreas de la zona 1 y zona 2.
El área de la zona 1 es el valor de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones: $\sqrt{4-x} - \sqrt{4-4x}$.

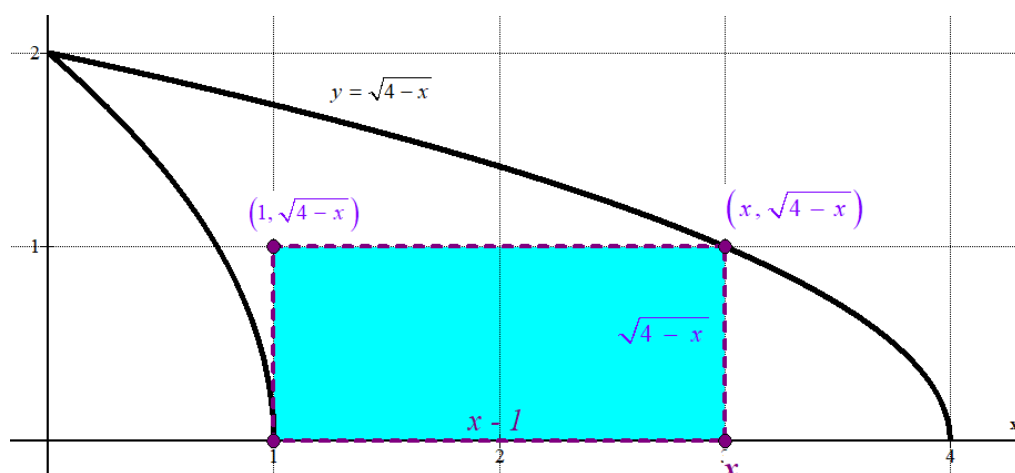
$$\begin{aligned}
 \text{Área 1} &= \int_0^1 \sqrt{4-x} - \sqrt{4-4x} dx = \int_0^1 (4-x)^{1/2} - (4-4x)^{1/2} dx = \\
 &= \left[\frac{(4-x)^{1/2+1}}{1/2+1} \cdot \frac{1}{-1} - \frac{(4-4x)^{1/2+1}}{1/2+1} \cdot \frac{1}{-4} \right]_0^1 = \left[-\frac{(4-x)^{3/2}}{3/2} + \frac{(4-4x)^{3/2}}{\frac{3}{2} \cdot 4} \right]_0^1 = \\
 &= \left[-\frac{\sqrt{(4-4x)^3}}{6} + \frac{2\sqrt{(4-x)^3}}{3} \right]_0^1 = \left[-\frac{\sqrt{(4-4)^3}}{6} + \frac{2\sqrt{(4-1)^3}}{3} \right] - \left[-\frac{\sqrt{(4-0)^3}}{6} + \frac{2\sqrt{(4-0)^3}}{3} \right] = \\
 &= \frac{-2\sqrt{27}}{3} - \frac{\sqrt{64}}{6} + \frac{2\sqrt{64}}{3} = -2\sqrt{3} - \frac{8}{6} + \frac{16}{3} = \boxed{4 - 2\sqrt{3} \approx 0.54 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

El área de la zona 2 es el valor de la integral definida de 1 a 4 de $y = \sqrt{4-x}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Área 1} &= \int_1^4 \sqrt{4-x} dx = \int_1^4 (4-x)^{1/2} dx = \left[-\frac{(4-x)^{1/2+1}}{1/2+1} \right]_1^4 = \left[-\frac{2\sqrt{(4-x)^3}}{3} \right]_1^4 = \\
 &= \left[-\frac{2\sqrt{(4-4)^3}}{3} \right] - \left[-\frac{2\sqrt{(4-1)^3}}{3} \right] = \frac{2 \cdot \sqrt{27}}{3} = \boxed{2\sqrt{3} \approx 3.46 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

El área de la parcela es la suma de las dos áreas obtenidas: $4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4$ unidades cuadradas.

- b) Tomamos un punto cualquiera de la gráfica de $y = \sqrt{4-x}$, siendo $1 \leq x \leq 4$ y dibujamos la piscina obteniendo la longitud de sus lados.



El área de la piscina es el producto de la base por la altura: $A(x) = (x-1)\sqrt{4-x}$

Derivamos la función área y averiguamos cuando se anula su derivada (puntos críticos).

$$\begin{aligned} A(x) = (x-1)\sqrt{4-x} &\Rightarrow A'(x) = \sqrt{4-x} + (x-1) \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{2(\sqrt{4-x})^2 - x + 1}{2\sqrt{4-x}} = \\ &= \frac{2(4-x) - x + 1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-2x-x+1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{-3x+9}{2\sqrt{4-x}} = \frac{-3(x-3)}{2\sqrt{4-x}} \end{aligned}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3(x-3)}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Rightarrow -3(x-3) = 0 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=3$.

- Antes de $x=3$ consideramos $x=2$ y la derivada vale $A'(2) = \frac{-3(2-3)}{2\sqrt{4-2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 0$.

La función área crece de 1 a 3.

- Después de $x=3$ consideramos $x=3.5$ y la derivada vale

$$A'(3.5) = \frac{-3(3.5-3)}{2\sqrt{4-3.5}} = \frac{-1.5}{2\sqrt{0.5}} < 0. \text{ La función área decrece de 3 a 4.}$$

Como el área crece antes de $x=3$ y decrece después podemos afirmar que el área es máxima para $x=3$.

Para $x=3$ el área de la piscina vale $A(3) = (3-1)\sqrt{4-3} = 2$ unidades cuadradas.

El área máxima que puede tener la piscina es de 2 unidades cuadradas.

Pregunta 3**Contesta justificadamente los siguientes apartados.**

En una tienda de comida para llevar, el producto más vendido se elabora con tres variantes: A, B y C. Cada variante se vende en dos tamaños: pequeño y grande. Cada día se elaboran las cantidades de cada variante que aparecen en la siguiente tabla:

	A	B	C
Pequeño	100	50	100
grande	160	150	100

De la variante A venden en tienda el 50%, de la variante B el 60% y de la variante C el 40%. El resto se reparte a domicilio.

- Escribe la matriz que expresa el número de productos según el tamaño y la variante. [0.5 puntos]
- Escribe la matriz que expresa el número de productos y el porcentaje según la variante y el tipo de venta. [0.5 puntos]
- Calcula la matriz que expresa el número de productos según tamaño y tipo de venta. [1 punto]

a) La matriz que se pide es la que aparece en la tabla.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 100 & 50 & 100 \\ 160 & 150 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix}$$

b) Escribimos la matriz que expresa el porcentaje según la variante y el tipo de venta.

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.50 & 1-0.5 \\ 0.60 & 1-0.6 \\ 0.40 & 1-0.4 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow N = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c) Obtenemos el producto de las dos matrices anteriores.

$$M \cdot N = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 100 & 50 & 100 \\ 160 & 150 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix}$$

$$MN = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 50+30+40 & 50+20+60 \\ 80+90+40 & 80+60+60 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 120 & 130 \\ 210 & 200 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

4.1 Dada la función $f(x) = xe^{-2x^2}$

- a) Determina su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas. [0.75 puntos]
 b) Halla los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento y, los puntos de inflexión. [0.75 puntos]
 c) Con la información obtenida en los apartados anteriores representa la curva. [0.5 puntos]

a) La función existe para cualquier valor real, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

Como el dominio son todos los números reales la función no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4xe^{2x^2}} = \frac{1}{4 \cdot \infty \cdot e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como la función tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

b) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = xe^{-2x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-2x^2} + x(-4x)e^{-2x^2} = e^{-2x^2} - 4x^2e^{-2x^2} = (1 - 4x^2)e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1 - 4x^2)e^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{-2x^2} \neq 0\} \Rightarrow 1 - 4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(x) = (1 - 4x^2)e^{-2x^2} \Rightarrow f''(x) = -8xe^{-2x^2} + (1 - 4x^2)(-4x)e^{-2x^2} =$$

$$= -8xe^{-2x^2} + (-4x + 16x^3)e^{-2x^2} = (-12x + 16x^3)e^{-2x^2} \Rightarrow f''(x) = 4x(4x^2 - 3)e^{-2x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-1}{2}\right)\left(4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 3\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = -2 \cdot (-2)e^{-1/2} > 0 \\ f''\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\right)e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \cdot (-2)e^{-1/2} < 0 \end{cases}$$

Para $x = \frac{-1}{2}$ la primera derivada se anula y la segunda tiene un valor positivo. La función presenta un mínimo relativo en $x = \frac{-1}{2}$.

Para $x = \frac{1}{2}$ la primera derivada se anula y la segunda tiene un valor negativo. La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -0.5$ y $x = 0.5$.

- En el intervalo $(-\infty, -0.5)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = (1 - 4(-1)^2)e^{-2(-1)^2} = \frac{-3}{e^2} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -0.5).$$

- En el intervalo $(-0.5, 0.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = (1 - 4 \cdot 0^2)e^{-2 \cdot 0^2} = 1 > 0. \text{ La función crece en } (-0.5, 0.5).$$

- En el intervalo $(0.5, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = (1 - 4 \cdot 1^2)e^{-2 \cdot 1^2} = \frac{-3}{e^2} < 0. \text{ La función decrece en } (0.5, +\infty).$$

La función decrece en $(-\infty, -0.5) \cup (0.5, +\infty)$ y crece en $(-0.5, 0.5)$.

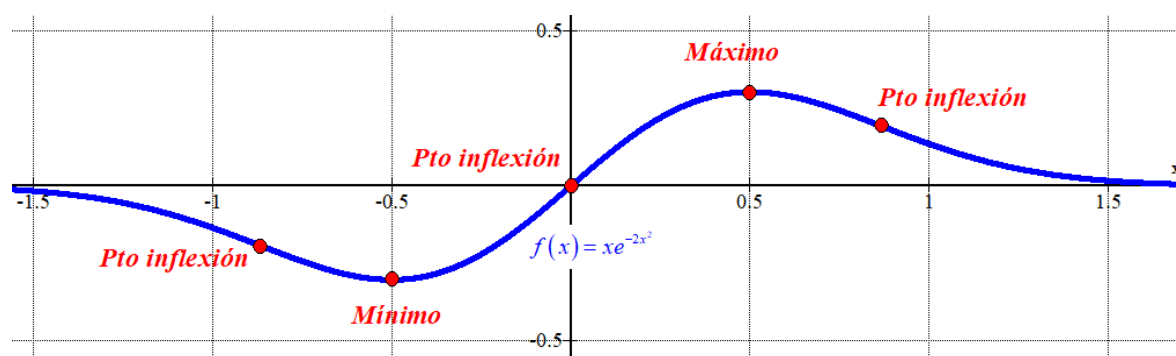
Para obtener los posibles puntos de inflexión averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -4x(4x^2 - 3)e^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ 4x^2 - 3 = 0 \rightarrow 4x^2 = 3 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$$

La función tiene tres puntos de inflexión: $x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$ y $x = \frac{+\sqrt{3}}{2}$.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función-

x	$f(x) = xe^{-2x^2}$
-1	$-e^{-2} \simeq -0.13$
$-\sqrt{3}/2$	-0.19 Punto de inflexión
-1/2	-0.3 Mínimo
0	0 Punto de inflexión
1/2	0.3 Máximo
$\sqrt{3}/2$	0.19 Punto de inflexión
1	$e^{-2} \simeq 0.13$



4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{\sin x} - 1 \right)}{a^2 x^2}, a \neq 0.$$

b) Sea la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$. Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en $(0,1)$. [1 punto]

a) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{\sin x} - 1 \right)}{a^2 x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x - \sin x}{\sin x} \right)}{a^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \sin x)}{a^2 x^2 \sin x} = \frac{2}{a^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \\ &= \frac{2(0 - \sin 0)}{a^2 \cdot 0^2 \sin 0} = \frac{0}{0} = \text{In det er min acción}(L'Hôpital) = \frac{2}{a^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \frac{1 - \cos 0}{2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + 0^2 \cos 0} = \frac{0}{0} = \text{In det er min acción}(L'Hôpital) = \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x + x^2(-\sin x)} = \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} = \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(2 - x^2) \sin x + 4x \cos x} = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{2 \sin 0}{(2 - 0^2) \sin 0 + 4 \cdot 0 \cdot \cos 0} = \\ &= \frac{0}{0} = \text{In det er min acción}(L'Hôpital) = \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{-2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + 4 \cos x + 4x(-\sin x)} = \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \frac{\cos 0}{-2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + (2 - 0^2) \cos 0 + 4 \cos 0 + 4 \cdot 0 \cdot (-\sin 0)} = \frac{2}{6a^2} = \boxed{\frac{1}{3a^2}} \end{aligned}$$

b) Aplicamos el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$ en el intervalo $[0,1]$. La función es continua en el intervalo $[0,1]$. La función tiene una expresión polinómica y es derivable en $(0,1)$.

Se cumple que $f(0) = 0^3(0-1)^2 + 1 = 1$ y $f(1) = 1^3(1-1)^2 + 1 = 1$, por lo que $f(0) = f(1)$.

Podemos aplicar el teorema de Rolle y afirmar que existe $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0$.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

También podemos hacerlo calculando la inversa y encontrando sus raíces.

Encontramos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x) = x^3(x-1)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2(x-1)^2 + x^3 2(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x-1)[3x^2(x-1) + 2x^3] = (x-1)[3x^3 - 3x^2 + 2x^3] = (x-1)[5x^3 - 3x^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2(x-1)(5x-3)$$

Buscamos los valores que anulan la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(x-1)(5x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 5x-3 = 0 \rightarrow 5x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{5} = 0.6 \in (0,1) \end{cases}$$

La derivada se anula para $x = \frac{3}{5} = 0.6$ que pertenece al intervalo $(0, 1)$.

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En un chiringuito de playa se instala un toldo para los clientes. El toldo se coloca en los siguientes puntos de apoyo: $(3, 8, 17/2)$, $(4, 6, 37/4)$, $(2, 8, 8)$ y $(s, 16, 8)$ con $s \in \mathbb{R}$

- a) Determina la ecuación del plano que contiene al toldo. [0.75 puntos]
 b) Calcula el valor de s para que los cuatro puntos sean coplanarios, es decir, están en el mismo plano. [0.75 puntos]
 c) Se quiere instalar un altavoz para poner música y este debe estar como mínimo a 2 metros de distancia del toldo, ¿estará correctamente colocado si el altavoz está en el punto $(0, 0, 5)$? [0.5 puntos]

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los tres primeros puntos de apoyo.

$$\left. \begin{array}{l} (3, 8, 17/2) \in \pi \\ (4, 6, 37/4) \in \pi \\ (2, 8, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, 8, 17/2) - (2, 8, 8) = (1, 0, 1/2) \\ \vec{v} = (4, 6, 37/4) - (2, 8, 8) = (2, -2, 5/4) \\ (2, 8, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}' = 2\vec{u} = 2(1, 0, 1/2) = (2, 0, 1) \\ \vec{v}' = 4\vec{v} = 4(2, -2, 5/4) = (8, -8, 5) \\ (2, 8, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-8 & z-8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 8y - 64 - 16z + 128 - 0 - 10y + 80 + 8x - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 2y - 16z + 128 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4x - y - 8z + 64 = 0}$$

El plano que contiene el toldo tiene ecuación $\pi: 4x - y - 8z + 64 = 0$.

b) Para que los cuatro puntos sean coplanarios el cuarto punto debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 4x - y - 8z + 64 = 0 \\ (s, 16, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 4s - 16 - 64 + 64 = 0 \Rightarrow 4s = 16 \Rightarrow \boxed{s = 4}$$

Para $s = 4$ los cuatro puntos de apoyo son coplanarios.

c) Hallamos la distancia del punto $(0, 0, 5)$ al plano π que contiene el toldo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 4x - y - 8z + 64 = 0 \\ P(0, 0, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|4 \cdot 0 - 0 - 8 \cdot 5 + 64|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2}} = \frac{24}{\sqrt{81}} = \frac{24}{9} \approx 2.6666 \text{ metros}$$

Se cumple que el altavoz está a más de 2 metros de distancia del toldo y la instalación del altavoz en el punto $(0, 0, 5)$ es correcta.

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean las rectas $r: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z - 1}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de las dos rectas r y s . [1 punto]
 b) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1, 1, -1)$ y es paralelo a las dos rectas r y s . [1 punto]

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ P_r(0, 3, 1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ Q_s(0, 0, 1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$$

Las rectas se cortan o se cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 3, 1) \\ Q_s(0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 0, 1) - (0, 3, 1) = (0, -3, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 12 - 0 - 0 + 6 = -6 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero las rectas se cruzan (tienen distinta dirección y no coinciden en ningún punto).

- b) El plano paralelo a las dos rectas r y s tiene como vectores directores los vectores directores de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ P \equiv (1, 1, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + 4y - 4 + 2z + 2 - 2z + 2 - 2y + 2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x + 2y + 4z - 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: 3x + 2y + 4z - 1 = 0$.