

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Modelo orientativo
--	--	-----------------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La primera interpretación en EE.UU. de la octava sinfonía de Mahler tuvo lugar en Filadelfia en 1916 con la participación de una orquesta, dos coros con el mismo número de miembros, un tercer coro infantil y, además, ocho cantantes solistas invitados especialmente y que no pertenecían a ninguno de los coros. La décima parte del número total de intérpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta. Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta. El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de intérpretes. ¿Cuántos intérpretes tenía la orquesta y cada uno de los coros? ¿Cuántos intérpretes había en total?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x^3 \sqrt{(x^2 - 1)^2}$.

a) (0.75 puntos) Halle $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}$.

b) (1.75 puntos) Halle el área, en el primer cuadrante, comprendida entre la recta $y = x$ y la gráfica de la función $f(x)$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: z = 0$.

a) (1 punto) Halle una ecuación de la recta paralela al plano π cuya dirección sea perpendicular a r y que pase por el punto $(1, 1, 1)$.

b) (1.5 puntos) Halle una ecuación de una recta que forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con la recta r , que esté contenida en el plano π y pase por el punto $(0, 0, 0)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La selección española competirá en la Copa Mundial Femenina de Fútbol 2023. En los dos primeros partidos de la fase de grupos, que consta de tres partidos, la probabilidad de ganar cada uno de ellos es del 80%. Sin embargo, debido al aumento en la moral de las jugadoras, si ganan los dos primeros partidos la probabilidad de ganar el tercero asciende al 90%. En caso contrario, la probabilidad de ganar el tercer partido se mantendrá en el 80%. Se pide:

- (0.5 puntos) Determinar la probabilidad de que la selección española no gane ningún partido durante la fase de grupos.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que la selección gane el tercer partido de la fase de grupos.
- (1 punto) Si sabemos que la selección ha ganado el tercer partido, determinar la probabilidad de que no haya ganado alguno de los dos encuentros anteriores.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

- (0.75 puntos) Estudiar si existe algún valor de m para el cual la matriz BA tiene inversa.
- (0.75 puntos) Estudiar el rango de la matriz AB en función del parámetro m .
- (1 punto) Para $m = 1$, discutir el sistema $(A^t A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$ según los valores de a .

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real $f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}$, se pide:

- (0.75 puntos) Hallar el dominio de definición de $f(x)$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica.
- (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función, así como sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- (0.75 puntos) Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la recta de ecuación $9x - 8y = 6$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 0, -1)$, $D(1, 1, 2)$, se pide:

- (0.75 puntos) Comprobar que los puntos A , B , C y D no son coplanarios y hallar el volumen del tetraedro que forman.
- (0.75 puntos) Hallar el área del triángulo que forman los puntos B , C y D y el ángulo B del mismo.
- (1 punto) Hallar uno de los puntos E del plano determinado por A , B y C tales que el cuadrilátero $ABCE$ sea un paralelogramo. Hallar el área de dicho paralelogramo.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 de probabilidad 0.5 y A_2 de probabilidad 0.3 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$. De cierto suceso B de probabilidad 0.4 se sabe que es independiente de A_1 y que la probabilidad del suceso $A_3 \cap B$ es 0.1. Con estos datos se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de A_3 .
- (1.5 puntos) Decidir si B y A_2 son independientes.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La primera interpretación en EE.UU. de la octava sinfonía de Mahler tuvo lugar en Filadelfia en 1916 con la participación de una orquesta, dos coros con el mismo número de miembros, un tercer coro infantil y, además, ocho cantantes solistas invitados especialmente y que no pertenecían a ninguno de los coros. La décima parte del número total de intérpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta. Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta. El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de intérpretes. ¿Cuántos intérpretes tenía la orquesta y cada uno de los coros? ¿Cuántos intérpretes había en total?

Llamamos “x” al número de miembros de la orquesta, “y” al número de miembros del primer y el segundo coro, “z” al número de miembros del tercer coro infantil.

A partir de los datos del ejercicio establecemos las ecuaciones correspondientes.

“La décima parte del número total de intérpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta” $\rightarrow \frac{2y+z}{10} = x - 15$.

“Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta” $\rightarrow y = (z + x) + 140$.

“El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de intérpretes” $\rightarrow x = \frac{x+2y+z+8}{12} + 21$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} y = (z + x) + 140 \\ \frac{2y+z}{10} = x - 15 \\ x = \frac{x+2y+z+8}{12} + 21 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x + y - z = 140 \\ 2y + z = 10x - 150 \\ 12x = x + 2y + z + 8 + 252 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x + y - z = 140 \\ -10x + 2y + z = -150 \\ 11x - 2y - z = 260 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + 11 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 11x \quad -2x \quad -z \quad = 260 \\ -11x \quad +11y \quad -11z \quad = 1540 \\ \hline 9y \quad -12z \quad = 1800 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 10 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ -10x \quad +2y \quad +z \quad = -150 \\ 10x \quad -10y \quad +10z \quad = -1400 \\ \hline -8y \quad +11z \quad = -1550 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x + y - z = 140 \\ -8y + 11z = -1550 \\ 9y - 12z = 1800 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8 \cdot \text{Ecuación } 3^a + 9 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 72y - 96z = 14400 \\ -72y + 99z = -13950 \\ \hline 3z = 450 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y - z = 140 \\ -8y + 11z = -1550 \\ 3z = 450 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y - z = 140 \\ -8y + 11z = -1550 \\ \boxed{z = \frac{450}{3} = 150} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 150 = 140 \\ -8y + 1650 = -1550 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 150 = 140 \\ -8y = -3200 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y = 290 \\ \boxed{y = \frac{-3200}{-8} = 400} \end{array} \right\} \Rightarrow -x + 400 = 290 \Rightarrow \boxed{x = 400 - 290 = 110}$$

En la orquesta había 110 miembros, en cada coro no infantil 400 miembros y en el coro infantil 150. La suma de todos ellos asciende a $110 + 2 \cdot 400 + 150 + 8 = 1068$ intérpretes.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL SISTEMA.

Aplicamos el método de Cramer al sistema $\left. \begin{array}{l} -x + y - z = 140 \\ -10x + 2y + z = -150 \\ 11x - 2y - z = 260 \end{array} \right\}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 140 & 1 & -1 \\ -150 & 2 & 1 \\ 260 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & 1 \\ 11 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-280 + 260 - 300 + 520 - 150 + 280}{2 + 11 - 20 + 22 - 10 - 2} = \frac{330}{3} = 110$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 140 & -1 \\ -10 & -150 & 1 \\ 11 & 260 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & 1 \\ 11 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-150 + 1540 + 2600 - 1650 - 1400 + 260}{3} = \frac{1200}{3} = 400$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 140 \\ -10 & 2 & -150 \\ 11 & -2 & 260 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & 1 \\ 11 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-520 - 1650 + 2800 - 3080 + 2600 + 300}{3} = \frac{450}{3} = 150$$

En la orquesta había 110 miembros, en cada coro no infantil 400 miembros y en el coro infantil 150. La suma de todos ellos asciende a $110 + 2 \cdot 400 + 150 + 8 = 1068$ intérpretes.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

a) (0.75 puntos) Halle $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}$.

b) (1.75 puntos) Halle el área, en el primer cuadrante, comprendida entre la recta $y = x$ y la gráfica de la función $f(x)$.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} x\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} x\sqrt[3]{\frac{((x-1)(x+1))^2}{(x-1)^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} x\sqrt[3]{(x+1)^2} = 1\sqrt[3]{(1+1)^2} = \boxed{\sqrt[3]{4}} \end{aligned}$$

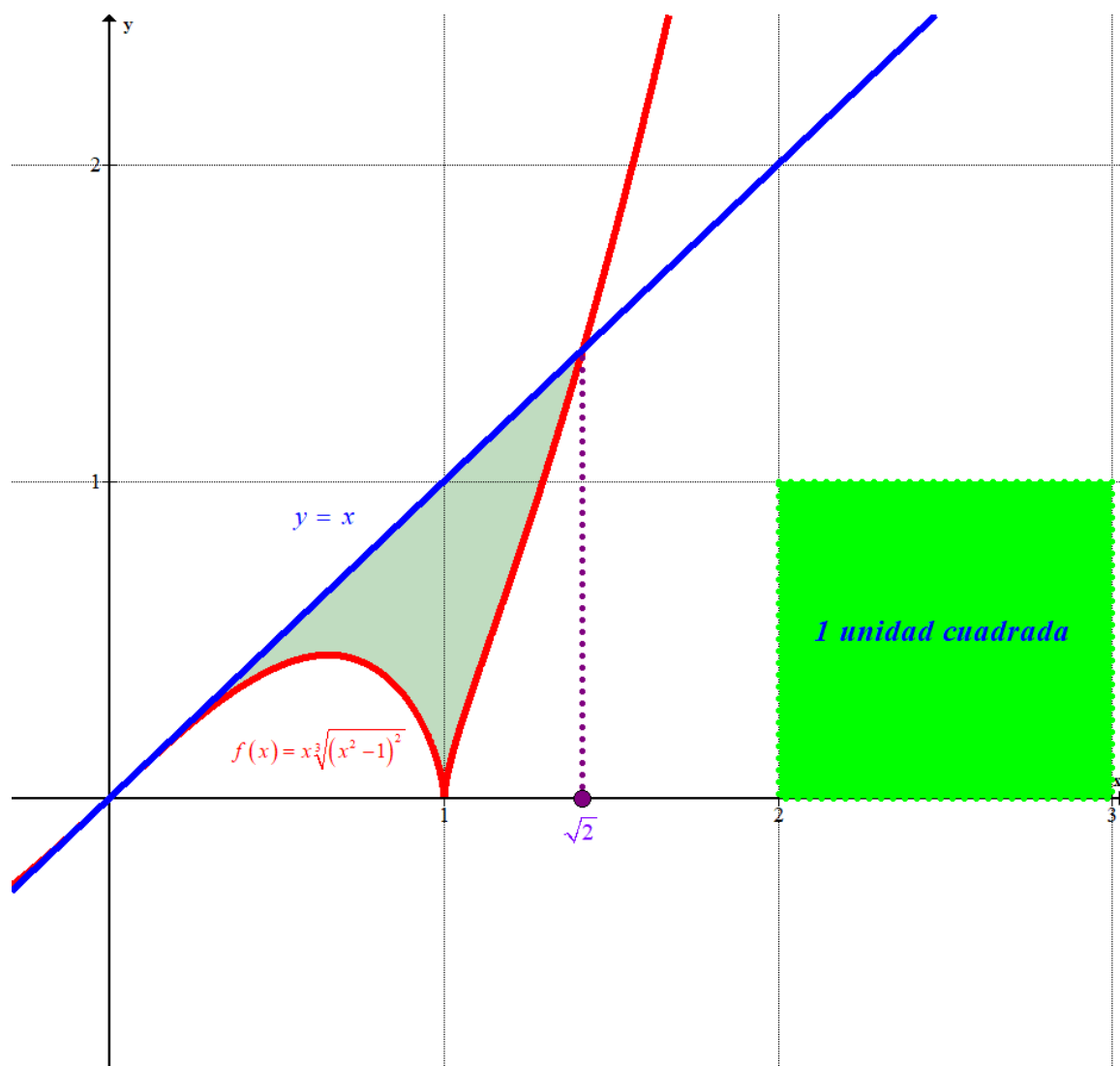
b) Averiguamos si la recta corta a la gráfica de la función.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} f(x) &= x\sqrt[3]{(x^2-1)^2} \\ y &= x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x &= x\sqrt[3]{(x^2-1)^2} \Rightarrow x - x\sqrt[3]{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x\left(1 - \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 0 \\ 1 - \sqrt[3]{(x^2-1)^2} &= 0 \end{aligned} \right. &\Rightarrow \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

La región en el primer cuadrante, comprendida entre la recta $y = x$ y la gráfica de la función $f(x)$ es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y $\sqrt{2}$ de la diferencia entre la función y la recta.

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - x dx &= \int_0^{\sqrt{2}} x(x^2-1)^{2/3} dx - \int_0^{\sqrt{2}} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2/3} dx - \int_0^{\sqrt{2}} x dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{(x^2-1)^{1+2/3}}{1+2/3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \left[\frac{(x^2-1)^{5/3}}{10/3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \left[\frac{3(x^2-1)^{5/3}}{10} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \\ &= \left[\frac{3((\sqrt{2})^2-1)^{5/3}}{10} - \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \right] - \left[\frac{3(0^2-1)^{5/3}}{10} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{3}{10} - 1 + \frac{3}{10} = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{2}{5} = 0.4$ unidades cuadradas.



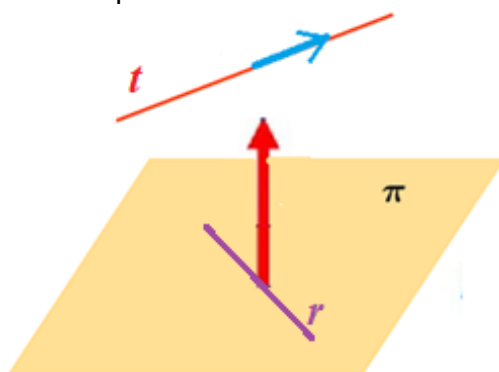
A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: z = 0$.

a) (1 punto) Halle una ecuación de la recta paralela al plano π cuya dirección sea perpendicular a r y que pase por el punto $(1, 1, 1)$.

b) (1.5 puntos) Halle una ecuación de una recta que forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con la recta r , que esté contenida en el plano π y pase por el punto $(0, 0, 0)$.

a) La recta r está contenida en el plano π .



Buscamos una recta t que sea paralela al plano y perpendicular a la recta r .

Su vector director debe ser perpendicular al vector normal del plano y al vector director de la recta. Este vector es el producto vectorial de ambos vectores.

$$\left. \begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 0, 0) \\ \pi: z = 0 &\Rightarrow \vec{n} = (0, 0, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{u}_t = \vec{v}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -j = (0, -1, 0)$$

Hallamos la ecuación de la recta pedida.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_t &= (0, -1, 0) \\ (1, 1, 1) &\in t \end{aligned} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Si la recta t buscada está contenida en el plano su vector director $\vec{u}_t = (a, b, c)$ debe ser perpendicular al vector normal del plano π y su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_t &= (a, b, c) \\ \pi: z = 0 &\Rightarrow \vec{n} = (0, 0, 1) \\ \vec{u}_t \cdot \vec{n} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a, b, c)(0, 0, 1) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \vec{u}_t = (a, b, 0)$$

La recta t forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_t = (a, b, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 0, 0) \\ (r, t) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(r, t) = \frac{\vec{u}_t \cdot \vec{v}_r}{|\vec{u}_t| |\vec{v}_r|} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \frac{(a, b, 0)(1, 0, 0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + 0} \sqrt{1^2 + 0 + 0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2} = 2a \Rightarrow 2(a^2 + b^2) = 4a^2 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 = 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b^2 = 2a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow \begin{cases} b = a \rightarrow \vec{u}_t = (a, a, 0) \rightarrow \vec{u}_t = (1, 1, 0) \\ o \\ b = -a \rightarrow \vec{u}_t = (a, -a, 0) \rightarrow \vec{w}_{t'} = (1, -1, 0) \end{cases}$$

Hemos tomado el valor de $a = 1$ obteniendo dos vectores directores que dan lugar a dos rectas que cumplen lo pedido.

$$t: \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, 0) \\ (0, 0, 0) \in t \end{cases} \Rightarrow t: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

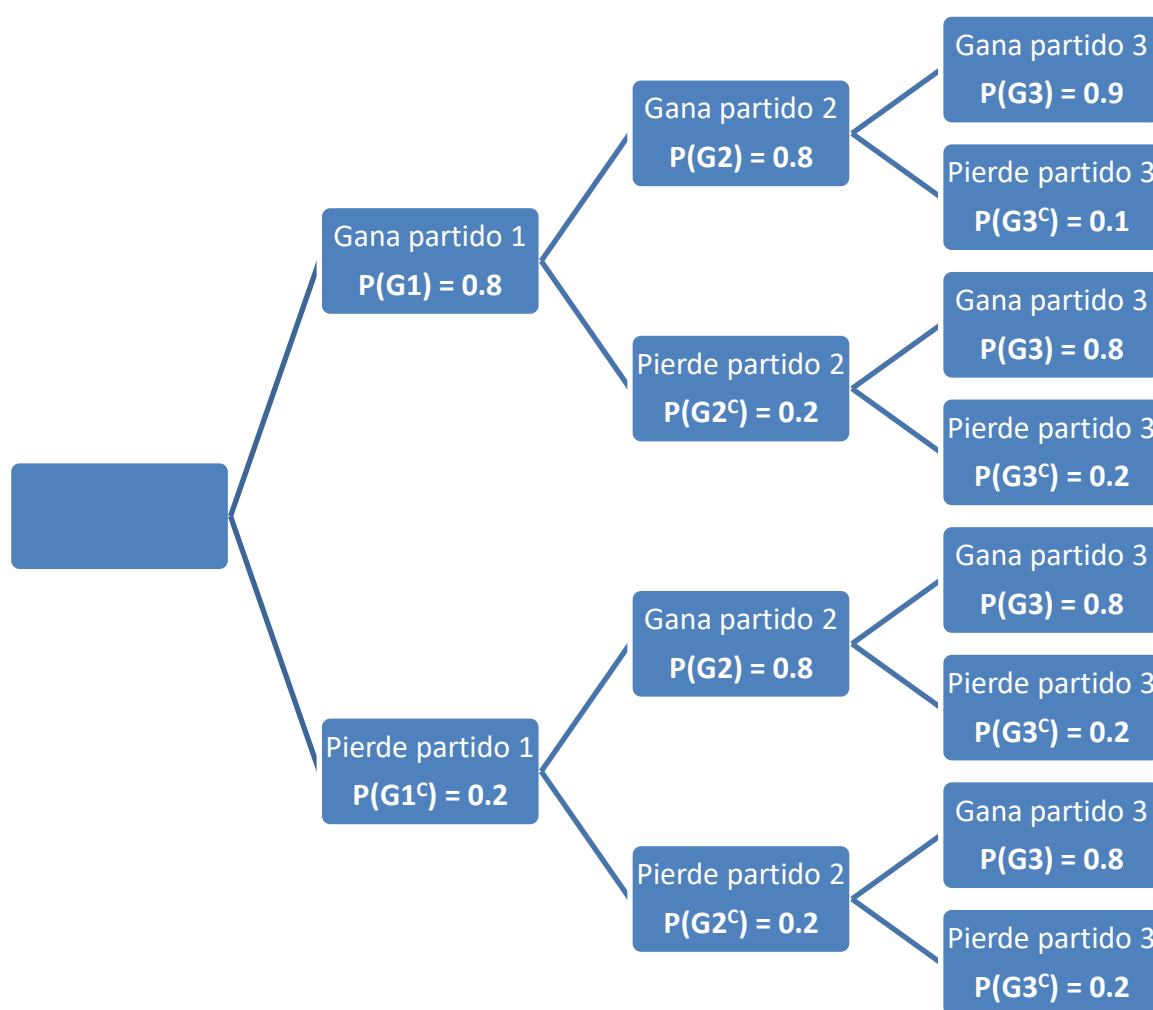
$$t': \begin{cases} \vec{w}_{t'} = (1, -1, 0) \\ (0, 0, 0) \in t' \end{cases} \Rightarrow t': \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = 0 \end{cases}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La selección española competirá en la Copa Mundial Femenina de Fútbol 2023. En los dos primeros partidos de la fase de grupos, que consta de tres partidos, la probabilidad de ganar cada uno de ellos es del 80%. Sin embargo, debido al aumento en la moral de las jugadoras, si ganan los dos primeros partidos la probabilidad de ganar el tercero asciende al 90%. En caso contrario, la probabilidad de ganar el tercer partido se mantendrá en el 80%. Se pide:

- (0.5 puntos) Determinar la probabilidad de que la selección española no gane ningún partido durante la fase de grupos.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que la selección gane el tercer partido de la fase de grupos.
- (1 punto) Si sabemos que la selección ha ganado el tercer partido, determinar la probabilidad de que no haya ganado alguno de los dos encuentros anteriores.

Realizamos un diagrama de árbol.



Respondemos a las preguntas planteadas.

- Es la situación que ocurre en la rama inferior.

$$P(G1^c \cap G2^c \cap G3^c) = 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = \frac{1}{125} = 0.008$$

- Ganar el tercer partido ocurre de distintas maneras. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(G3) &= P(G1 \cap G2 \cap G3) + P(G1 \cap G2^c \cap G3) + \\
 &+ P(G1^c \cap G2 \cap G3) + P(G1^c \cap G2^c \cap G3) = \\
 &= 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = \boxed{\frac{108}{125} = 0.864}
 \end{aligned}$$

- c) Nos piden calcular $P(\text{Haya perdido el partido 1, el 2 o ambos} / G3)$. Este suceso es el contrario del que haya ganado los dos primeros partidos. Calculamos la probabilidad pedida a través del suceso contrario. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Haya perdido el partido 1, el 2 o ambos} / G3) &= 1 - P(G1 \cap G2 / G3) = \\
 &= 1 - \frac{P(G1 \cap G2 \cap G3)}{P(G3)} = 1 - \frac{0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.9}{0.864} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.333}
 \end{aligned}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar si existe algún valor de m para el cual la matriz BA tiene inversa.

b) (0.75 puntos) Estudiar el rango de la matriz AB en función del parámetro m .

c) (1 punto) Para $m = 1$, discutir el sistema $(A^t A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$ según los valores de a .

a) Para que la matriz BA tenga inversa su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+0 & 1+m^2 & 1+3m \\ 0 & m^2 & 3m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m^2+1 & 3m+1 \\ 0 & m^2 & 3m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$$

$$|BA| = \begin{vmatrix} m & m^2+1 & 3m+1 \\ 0 & m^2 & 3m \\ 0 & m & 3 \end{vmatrix} = 3m^3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 3m^3 = 0$$

El determinante de la matriz BA es nulo independientemente del valor de m . La matriz BA no tiene inversa para ningún valor de m .

b) Hallamos la expresión de la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m^2+m+1 \\ 0 & m^2+3 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

El rango de la matriz AB es 2, 1 o 0.

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|AB| = \begin{vmatrix} m & m^2+m+1 \\ 0 & m^2+3 \end{vmatrix} = m(m^2+3)$$

$$|AB| = 0 \Rightarrow m(m^2+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2+3 = 0 \rightarrow m^2 = -3 \rightarrow m = \sqrt{-3} = \text{No existe} \end{cases}$$

Analizamos dos situaciones distintas.

- Si $m \neq 0$ el determinante de AB es no nulo y su rango es 3.

- Si $m=0$ el determinante de AB es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1 pues la columna 1ª es nula.

c) Para $m=1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculamos la expresión de la matriz $A^t A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$

El sistema $(A^t A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$ queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 4 & 10 & a^2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el valor del determinante de la matriz de coeficientes M .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 20 + 4 + 4 - 2 - 10 - 16 = 0$$

La matriz M no tiene rango 3. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primera $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 16 = 4 \neq 0$. El rango de la matriz M es 2.

Estudiamos el rango de la matriz ampliada M^* . Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = 2a^2 + a + \cancel{4a} - 2a - a^2 - \cancel{4a} = a^2 - a = a(a-1)$$

Este determinante se anula para $a=0$ y para $a=1$.

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de orden 3 de la matriz M^* es no nulo y su rango es 3. Como el rango de la matriz M es 2, tienen rangos distintos y el sistema es incompatible.

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de orden 3 de la matriz M^* es nulo y su rango es 2 al igual que el rango de la matriz M , pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de orden 3 de la matriz M^* es nulo y su rango es 2 al igual que el rango de la matriz M , pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es incompatible. Si $a = 0$ o $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

OTRA FORMA DE DISCUTIR EL SISTEMA.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular más sencillo de estudiar.

$$\begin{aligned}
 M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 4 & 10 & a^2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad a \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -a \\ \hline 0 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 4 \quad 10 \quad a^2 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -a \\ \hline 0 \quad 3 \quad 9 \quad a^2 - a \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & a^2 - a \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 3 \quad 9 \quad a^2 - a \\ 0 \quad -3 \quad -9 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad a^2 - a \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad a}^{M^*} \\ 0 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \\ 0 \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{M} \quad a^2 - a \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La expresión $a^2 - a = a(a-1)$ se anula para $a = 0$ o $a = 1$.

El rango de la matriz M es 2 y el rango de la matriz ampliada M^* también es 2 cuando se anula $a^2 - a$.

Si $a = 0$ o $a = 1$ los rangos son iguales (2) y menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el rango de la matriz ampliada M^* es 3 distinto del rango de la matriz de coeficientes M . El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es incompatible. Si $a = 0$ o $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real $f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Hallar el dominio de definición de $f(x)$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica.
 b) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función, así como sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
 c) (0.75 puntos) Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la recta de ecuación $9x - 8y = 6$.

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x - \frac{4}{(x-1)^2} = 1 - \frac{4}{(1-1)^2} = 1 - \frac{4}{0} = 1 - \infty = -\infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{4}{(x-1)^2} = \infty - \frac{4}{(\infty-1)^2} = \infty - \frac{4}{\infty} = \infty - 0 = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{4}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} - \frac{4}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{4}{x(x-1)^2} = 1 - \frac{4}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{4}{(x-1)^2} \right) = -\frac{4}{(\infty-1)^2} = \frac{-4}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$.

- b) Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula su derivada.

$$f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{0 \cdot (x-1)^2 - 4 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = 1 - \frac{-8(x-1)}{(x-1)^4} = 1 + \frac{8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{8}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} = -1 \Rightarrow -8 = (x-1)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{-8} = -2 \Rightarrow \boxed{x = -2+1 = -1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1$ (punto crítico) y $x = 1$ (excluido del dominio).

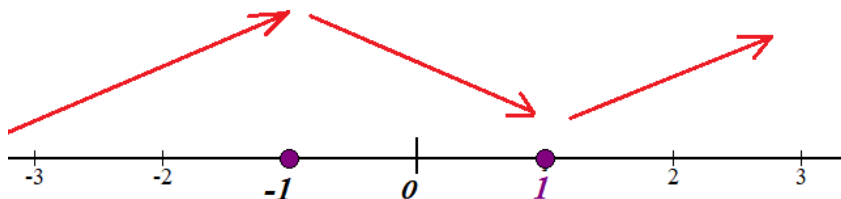
- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = 1 + \frac{8}{(-2-1)^3} = \frac{35}{27} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 1 + \frac{8}{0-1} = -7 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 1 + \frac{8}{2-1} = 9 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$. La función tiene un máximo relativo en $x = -1$.

c) Obtenemos la pendiente de la recta $9x - 8y = 6$.

$$9x - 8y = 6 \Rightarrow 9x - 6 = 8y \Rightarrow y = \frac{9}{8}x - \frac{6}{8}$$

La pendiente es $m = \frac{9}{8}$.

La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la recta de ecuación $9x - 8y = 6$ debe tener la misma pendiente, es decir, debe tener pendiente $\frac{9}{8}$. Como la pendiente de la recta tangente en $x = a$ es $f'(a)$ resolvemos la igualdad correspondiente.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 1 + \frac{8}{(x-1)^3} \\ m = \frac{9}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{9}{8} - 1 \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64 = (x-1)^3 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(5) = \frac{9}{8} \\ f(5) = 5 - \frac{4}{(5-1)^2} = 5 - \frac{4}{16} = \frac{19}{4} \\ y - f(5) = f'(5)(x-5) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{19}{4} = \frac{9}{8}(x-5) \Rightarrow y - \frac{19}{4} = \frac{9}{8}x - \frac{45}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y - 38 = 9x - 45 \Rightarrow \boxed{9x - 8y - 7 = 0}$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 0, -1)$, $D(1, 1, 2)$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Comprobar que los puntos A , B , C y D no son coplanarios y hallar el volumen del tetraedro que forman.
- b) (0.75 puntos) Hallar el área del triángulo que forman los puntos B , C y D y el ángulo B del mismo.
- c) (1 punto) Hallar uno de los puntos E del plano determinado por A , B y C tales que el cuadrilátero $ABCE$ sea un paralelogramo. Hallar el área de dicho paralelogramo.

- a) Hallamos la ecuación del plano π definido por los puntos A , B y C . Luego comprobamos si el punto D pertenece a este plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) - (0, 0, 1) = (1, 1, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 0, -1) - (0, 0, 1) = (1, 0, -2) \\ A(0, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - y + 0 - (z-1) + 2y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : -2x + y - z + 1 = 0}$$

Comprobamos si el punto D pertenece al plano ABC .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : -2x + y - z + 1 = 0 \\ \text{¿} D(1, 1, 2) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -2 + 1 - 2 + 1 = 0? \Rightarrow \text{¿} -2 = 0?$$

No se cumple y los puntos A , B , C y D no son coplanarios.

Al no ser coplanarios definen un tetraedro del cual hallamos su volumen.

El volumen del tetraedro $ABCD$ es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}].$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) - (0, 0, 1) = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 0, -1) - (0, 0, 1) = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AD} = (1, 1, 2) - (0, 0, 1) = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 1 - 0 - 1 + 2 = -2$$

$$\text{Volumen} = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{6} = \frac{|-2|}{6} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3} u^3}$$

También se puede estudiar si son coplanarios o no viendo si el volumen es nulo (coplanarios) o no (no coplanarios).

- b) El área del triángulo que forman los puntos B , C y D es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (1, 0, -1) - (1, 1, 0) = (0, -1, -1) \\ \overrightarrow{BD} = (1, 1, 2) - (1, 1, 0) = (0, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i = (-2, 0, 0)$$

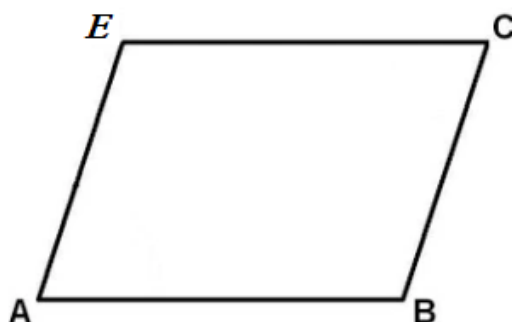
$$\text{Área } BCD = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 0^2}}{2} = \boxed{1 \text{ u}^2}$$

Hallamos el ángulo B del triángulo BCD.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (0, -1, -1) \\ \overrightarrow{BD} = (0, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(B) = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{(0, -1, -1)(0, 0, 2)}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ}$$

c) Consideramos el cuadrilátero del dibujo.



Para que el cuadrilátero ABCE sea un paralelogramo debe cumplirse que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (0, -1, -1) \\ \overrightarrow{AE} = (a, b, c) - (0, 0, 1) = (a, b, c-1) \\ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow (0, -1, -1) = (a, b, c-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ -1 = c - 1 \rightarrow c = 0 \end{cases} \Rightarrow E(0, -1, 0)$$

Habría otras soluciones para el punto E si cambiamos el orden de los vértices.

El área del paralelogramo ABCE es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AE} = (0, -1, 0) - (0, 0, 1) = (0, -1, -1) \\ \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) - (0, 0, 1) = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i - j + k + i$$

$$\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AB} = 2i - j + k = (2, -1, 1)$$

$$\text{Área } ABCE = |\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{6} \text{ u}^2}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 de probabilidad 0.5 y A_2 de probabilidad 0.3 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$. De cierto suceso B de probabilidad 0.4 se sabe que es independiente de A_1 y que la probabilidad del suceso $A_3 \cap B$ es 0.1. Con estos datos se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de A_3 .
 b) (1.5 puntos) Decidir si B y A_2 son independientes.

a) Si A_1 y A_2 son incompatibles significa que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Por lo que $P(A_1 \cap A_2) = P(\emptyset) = 0$

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)] = \\ &= 1 - [0.5 + 0.3 - 0] = \boxed{0.2} \end{aligned}$$

b) Sabemos que $P(B) = 0.4$. Si B es independiente de A_1 se cumple que

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2. \text{ También sabemos que } P(A_3 \cap B) = 0.1.$$

$$\begin{aligned} P(A_3 \cap B) &= P(\overline{A_1 \cup A_2} \cap B) = P(B) - P((A_1 \cup A_2) \cap B) = \{A_1 \cap A_2 = \emptyset\} = \\ &= 0.4 - [P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)] = 0.4 - [0.2 + P(A_2 \cap B)] \end{aligned}$$

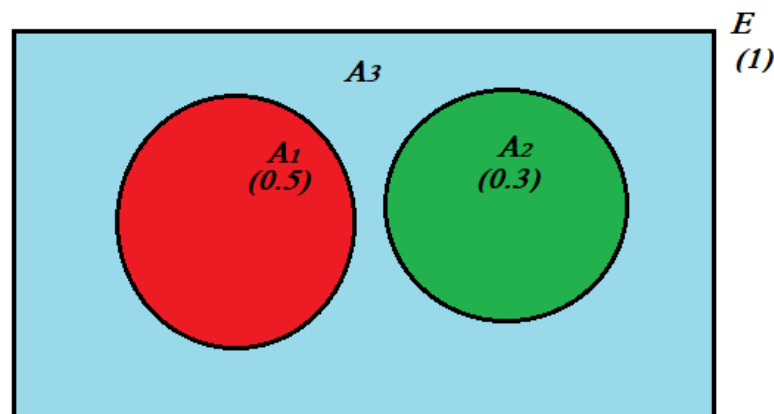
$$\begin{aligned} P(A_3 \cap B) = 0.1 &\Rightarrow 0.4 - 0.2 - P(A_2 \cap B) = 0.1 \Rightarrow 0.4 - 0.2 - 0.1 = P(A_2 \cap B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(A_2 \cap B) = 0.1 \end{aligned}$$

Para que B y A_2 sean independientes debe cumplirse que $P(A_2 \cap B) = P(A_2)P(B)$.

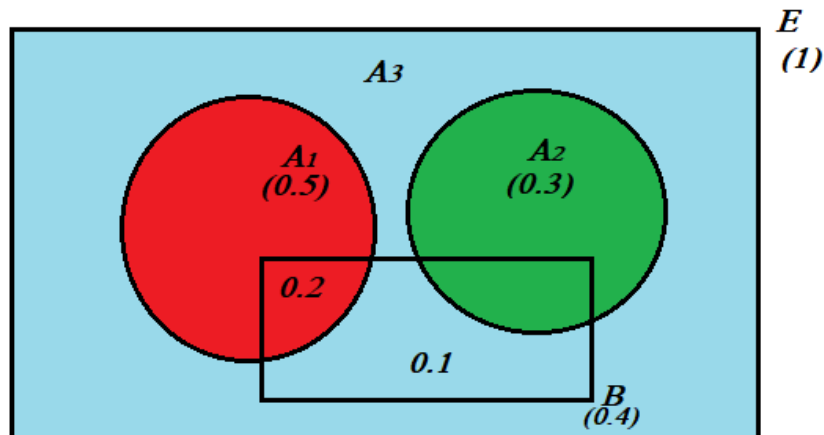
$$\left. \begin{array}{l} P(A_2 \cap B) = 0.1 \\ P(A_2)P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A_2 \cap B) = 0.1 \neq 0.12 = P(A_2)P(B)$$

Los sucesos A_2 y B no son independientes.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO



- a) Al ser A_1 y A_2 incompatibles no tienen nada en común. Y el suceso $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ es la región azul del dibujo superior. Como el espacio muestral E tiene probabilidad 1, A_1 tiene probabilidad 0.5 y A_2 tiene probabilidad 0.3 la probabilidad de A_3 es lo que falta para la unidad $= 1 - 0.5 - 0.3 = 0.2$.
- b) Sabemos que $P(B) = 0.4$. Si B es independiente de A_1 se cumple que $P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$. También sabemos que $P(A_3 \cap B) = 0.1$. Colocamos estos valores en el diagrama de Venn.



Observamos en el dibujo que el suceso B tiene probabilidad 0.4, que $P(A_3 \cap B) = 0.1$, $P(A_1 \cap B) = 0.2$ y por tanto $P(A_2 \cap B) = 0.4 - 0.1 - 0.2 = 0.1$.

$$\text{Por tanto } \left. \begin{array}{l} P(A_2 \cap B) = 0.1 \\ P(A_2)P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A_2 \cap B) = 0.1 \neq 0.12 = P(A_2)P(B).$$

Los sucesos A_2 y B no son independientes.