

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	---	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ .
- (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Pregunta 2. (2 puntos) Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m² pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Pregunta 3. Dados el plano $\pi : 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

- (1 punto) Halle el punto simétrico del punto P(2, 0, 0) respecto al plano π .
- (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - Halle la distancia entre el plano π y la recta r.
 - Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

- (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.
- (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

Pregunta 4.2. Sabiendo que $P(B) = 0.4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0.4$ y $P(B|A) = 0.2$, calcule las siguientes

probabilidades:

- a) (1 punto) $P(\bar{A})$ y $P(A \cap B)$.
 b) (1 punto) $P((A \cap B) | (A \cup B))$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

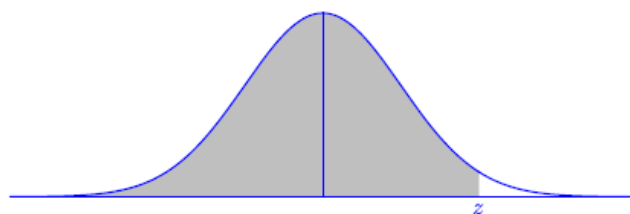
Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$
 b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

Pregunta 1. Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ .
 b) (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

- a) La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3 y su rango puede ser 3, 2 o 1.
 Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (\lambda - 2)(\lambda - 1) + 0 - \lambda - 0 - 0 =$$

$$= 1 + \lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2 - \lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3 = \lambda} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1 = \lambda} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y el rango de A es 3.

CASO 2. $\lambda = 3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la fila y columna terceras tenemos que su determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $\lambda = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la fila y columna terceras tenemos que su determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Conclusión: Para $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 1$ el rango de A es 3 y para $\lambda = 1$ o $\lambda = 3$ el rango es 2.

b) Para $\lambda = 2$ sabemos que el determinante de A es distinto de cero y por tanto la matriz A tiene inversa. Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^2 - AX = I \Rightarrow A^2 - I = AX \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A - A^{-1} \cdot I = A^{-1}AX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I \cdot A - A^{-1} = I \cdot X \Rightarrow \boxed{A - A^{-1} = X}$$

Hallamos la inversa de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-2 & 2 \\ 0 & 1 & 2-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1-2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

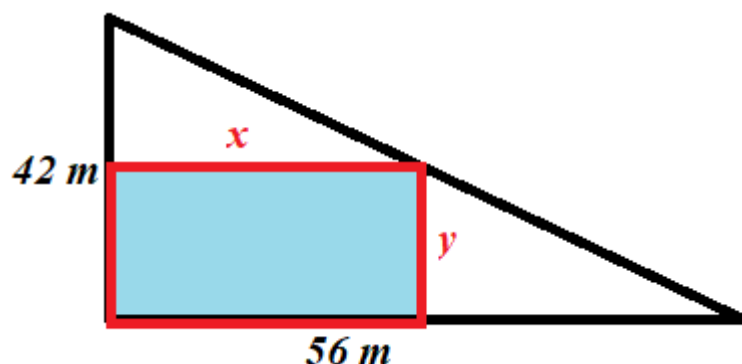
Hallamos la expresión de la matriz X.

$$X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2. (2 puntos) Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa. Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m² pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Dibujamos la situación planteada.

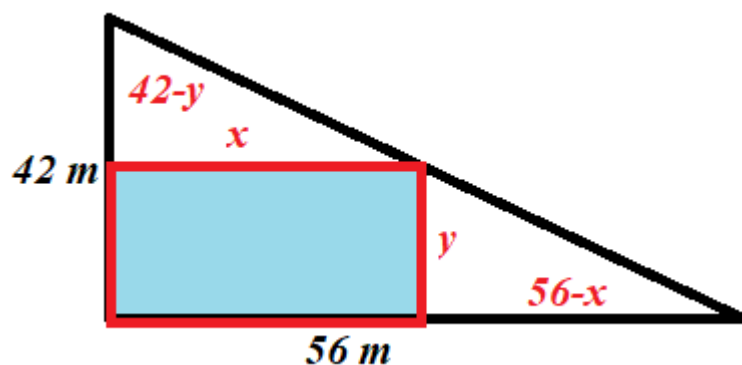


El área del rectángulo techado es $x \cdot y$ metros cuadrados y el coste de su alicatado es $30x \cdot y$ euros.

El resto tiene un área de $\frac{42 \cdot 56}{2} - xy = 1176 - xy$ metros cuadrados y el coste de su alicatado es $50 \cdot 1176 - 50xy = 58800 - 50xy$ euros.

El coste total del alicatado es $C(x, y) = 30xy + 58800 - 50xy = 58800 - 20xy$ euros.

Buscamos la relación entre x e y . Los triángulos rectángulos pequeños son semejantes.



Se cumple que los catetos tienen longitudes proporcionales.

$$\frac{42-y}{y} = \frac{x}{56-x} \Rightarrow (42-y)(56-x) = xy \Rightarrow 2352 - 56y + \cancel{xy} - 42x = \cancel{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -56y = 42x - 2352 \Rightarrow y = \frac{2352}{56} - \frac{42}{56}x \Rightarrow y = 42 - \frac{3}{4}x$$

Obtenemos la expresión del coste total del alicatado del jardín.

$$\left. \begin{array}{l} y = 42 - \frac{3}{4}x \\ C(x, y) = 58800 - 20xy \end{array} \right\} \Rightarrow C(x) = 58800 - 20x \left(42 - \frac{3}{4}x \right) = 58800 - 840x + 15x^2$$

El coste del alicatado es $C(x) = 15x^2 - 840x + 58800$ euros.

Calculamos su derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$C(x) = 15x^2 - 840x + 58800 \Rightarrow C'(x) = 30x - 840$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 30x - 840 = 0 \Rightarrow 30x = 840 \Rightarrow x = \frac{840}{30} = 28$$

Sustituimos $x = 28$ en la segunda derivada.

$$C'(x) = 30x - 840 \Rightarrow C''(x) = 30 \Rightarrow C''(28) = 30 > 0$$

Para $x = 28$ se anula la primera derivada y la segunda derivada es positiva, por lo que la función presenta un valor mínimo para $x = 28$.

Para este valor el otro lado de la zona techada vale $y = 42 - \frac{3}{4} \cdot 28 = 21$.

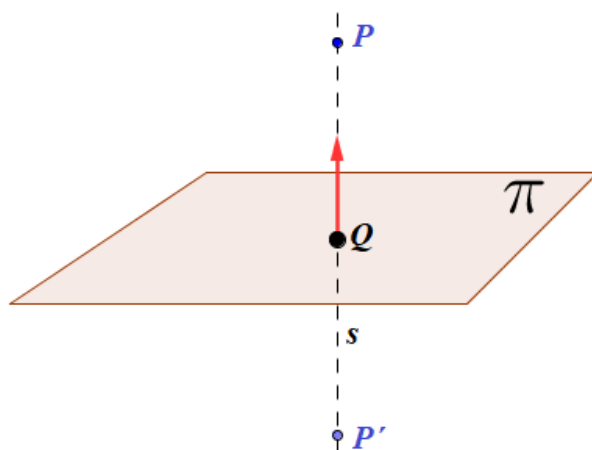
Las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo son 28 metros en el lado largo y 21 en el lado corto, es decir, a la mitad de cada lado.

Pregunta 3. Dados el plano $\pi : 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

- a) (1 punto) Halle el punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π .
 b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 b1) Halle la distancia entre el plano π y la recta r .
 b2) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

- a) Hallamos el punto simétrico P' del punto P respecto del plano determinando primero la recta s perpendicular al plano que pasa por P .



$$\pi : 2x + 2y - z = 13 \Rightarrow \vec{n} = (2, 2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(2, 0, 0) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta s y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} s : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \\ \pi : 2x + 2y - z = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(2 + 2\lambda) + 2 \cdot 2\lambda - (-\lambda) = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4\lambda + 4\lambda + \lambda = 13 \Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\ y = 2 \cdot 1 = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(4, 2, -1)}$$

El punto P' es el resultado de sumarle al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (4, 2, -1) - (2, 0, 0) = (2, 2, -1)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (4, 2, -1) + (2, 2, -1) = (6, 4, -2)$$

El punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π tiene coordenadas $P'(6, 4, -2)$.

b1) Determinamos la posición relativa de la recta r y el plano π .

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 4)$$

$$\pi: 2x + 2y - z = 13 \Rightarrow \vec{n} = (2, 2, -1)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Al ser nulo el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta podemos afirmar que la recta es paralela o está contenida en el plano.

La distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4} \Rightarrow P_r(2, 0, 0) \\ \pi: 2x + 2y - z - 13 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \boxed{3u}$$

La distancia tiene un valor de 3 unidades.

b2) El plano π' que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano. También contiene al punto $P_r(2, 0, 0)$ de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2, 0, 0) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 1, 4) \\ \vec{v} = \vec{n} = (2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x-2) + 8y + 2z - 2z + y - 8(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2 + 8y + 2z - 2z + y - 8x + 16 = 0 \Rightarrow -9x + 9y + 18 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y - 2 = 0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi': x - y - 2 = 0$.

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

- a) (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.
- b) (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

a) $X =$ Duración en horas de una batería. $X = N(24, 3)$.

La batería es defectuosa si $X < 21$. Nos piden calcular $P(X < 21)$.

$$P(X < 21) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 24}{3} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{21 - 24}{3}\right) = P(Z < -1) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

z	0.00	0
0,0	0,3900	0
0,1	0,3989	0
0,2	0,4049	0
0,3	0,4129	0
0,4	0,4212	0
0,5	0,4299	0
0,6	0,4389	0
0,7	0,4483	0
0,8	0,4580	0
0,9	0,4671	0
1,0	0,4772	0

La probabilidad de que una batería sea defectuosa es de 0.1587.

- b) La probabilidad de que un teléfono tenga una batería no defectuosa vale $1 - 0.1587 = 0.8413$. Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de teléfonos con la batería no defectuosa de un grupo de 10. Esta variable es una binomial de parámetros $n =$ número de repeticiones $= 10$ y $p =$ probabilidad de que un teléfono tenga una batería no defectuosa $= 0.8413$. $Y = B(10, 0.8413)$

Nos piden calcular $P(Y \geq 9)$.

$$P(Y \geq 9) = P(Y = 9) + P(Y = 10) = \binom{10}{9} 0.8413^9 \cdot 0.1587^1 + \binom{10}{10} 0.8413^{10} \cdot 0.1587^0 =$$

$$= 10 \cdot 0.8413^9 \cdot 0.1587 + 0.8413^{10} \approx \boxed{0.5127}$$

La probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa tiene un valor de 0.5127.

Pregunta 4.2. Sabiendo que $P(B) = 0.4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0.4$ y $P(B|A) = 0.2$, calcule las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) $P(\overline{A})$ y $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P((A \cap B) | (A \cup B))$.

a) Obtenemos las probabilidades pedidas.

$$P(B|A) = 0.2 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.2 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(A)$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 0.4 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

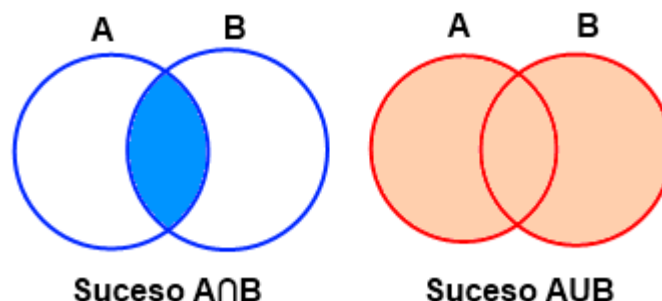
$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(B) = 0.4 \\ P(A \cup B) = 0.6 \\ P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(A) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.6 = P(A) + 0.4 - 0.2 \cdot P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8 \cdot P(A) = 0.6 - 0.4 = 0.2 \Rightarrow P(A) = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4} = 0.25 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.75 \\ P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(A) = 0.05 \end{array} \right.$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P((A \cap B) | (A \cup B)) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0.05}{0.6} = \frac{1}{12} \approx 0.0833$$

Hemos utilizado que $A \cap B$ está contenido en $A \cup B$ y por tanto $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$



Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

Hallamos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x) \\ \text{Eje abscisas} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

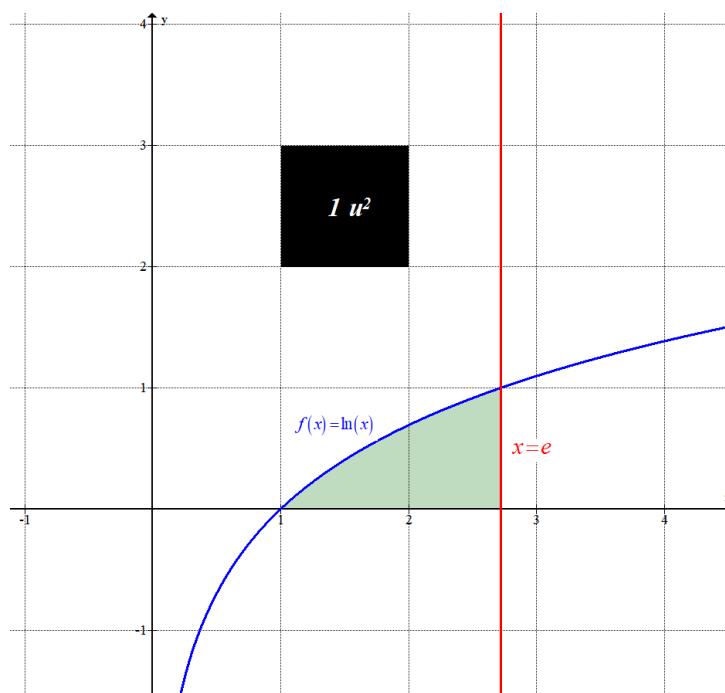
El área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$ es el valor de la integral definida de 1 a e de $f(x) = \ln(x)$.

$$\text{Área} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \ln(x) dx = \dots$$

$$\int \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + K$$

$$\dots = [x \ln(x) - x]_1^e = [e \cdot \ln(e) - e] - [1 \cdot \ln(1) - 1] = e \cdot 1 - e - 1 \cdot 0 + 1 = \boxed{1 u^2}$$

Dibujamos la región del plano de la que hemos hallado el área.



Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$
 b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

a) Para que la función sea continua deben coincidir el valor de la función con los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{2e^0}{1+0^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x}{1+x^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + b = 3 \cdot 0^2 - \operatorname{sen}(a \cdot 0) + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Esta función es derivable en

$\mathbb{R} - \{0\}$ siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} 6x - a \cdot \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x(1+x^2) - 2x \cdot 2e^x}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 6x - a \cdot \cos(ax) = 6 \cdot 0 - a \cdot \cos(a \cdot 0) = -a \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^0(1-2 \cdot 0 + 0^2)}{(1+0^2)^2} = 2 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

Los valores buscados son $a = -2$ y $b = 2$.

- b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{2e^2}{1+2^2} = \frac{2}{5}e^2 \\ f'(2) &= \frac{2e^2(1-2 \cdot 2 + 2^2)}{(1+2^2)^2} = \frac{2e^2}{25} \\ y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{2}{5}e^2 = \frac{2e^2}{25}(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - \frac{2}{5}e^2 = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} \Rightarrow y = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} + \frac{2}{5}e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} + \frac{10e^2}{25} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}}$$

La recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$ tiene ecuación

$$y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}.$$