



UNIVERSIDAD  
DE MURCIA



Universidad  
Politécnica  
de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

**306-MATEMÁTICAS II**

PAU2026 - JUNIO

**IMPORTANTE:** En las preguntas 1, 2 y 3 no hay optatividad. En las preguntas 4 y 5 hay optatividad, teniendo que contestar solo una de las dos opciones. Si se responden las 2 opciones, solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada pregunta es 2 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

**PREGUNTA 1:** Darío y Cayetana están organizando un pequeño negocio y deciden invertir dinero en tres cosas:  $x$  miles de euros en publicidad,  $y$  miles de euros en materiales,  $z$  miles de euros en logística. El reparto depende de un parámetro positivo,  $k$ , que representa una estrategia de ajuste económico según la situación del mercado. Se sabe que la suma de todo lo invertido es en total 12 mil euros. Darío propone que la inversión en publicidad más el doble de la inversión en materiales sea igual a la inversión en logística más  $k$ . Cayetana quiere que el doble de la inversión en publicidad menos la inversión en materiales más la inversión en logística sea igual a 4 mil euros.

- a) [0,75 ptos.] Plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que refleje los datos del problema.
- b) [1,25 ptos.] Discuta el correspondiente sistema. En caso de existir solución única, encuéntrela y exprésela en función de  $k$  si es necesario.

**PREGUNTA 2:** Considere un punto  $P$  de coordenadas  $(a,b)$  que está en el primer cuadrante, sobre una circunferencia de radio 10 centrada en el origen  $O(0,0)$ . Sea  $x$  el ángulo que forma el radio  $OP$  con el eje horizontal (o eje  $X$ ), medido en radianes.

- a) [0,75 ptos.] Demuestre que el área del rectángulo de vértices  $O(0,0)$ ,  $A(a,0)$ ,  $B(0,b)$  y  $P(a,b)$  viene dada por la función  $f(x) = 100 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ .
- b) [1,25 ptos.] Calcule el ángulo  $x$  (en radianes) para que el área de dicho rectángulo sea máxima.

**PREGUNTA 3:** Considere el plano  $\pi: 2x - y + 3z - 5 = 0$  y la recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

- a) [0,75 ptos.] Estudie la posición relativa de  $r$  y  $\pi$ .
- b) [1,25 ptos.] Si  $r$  corta a  $\pi$  en un solo punto, calcule dicho punto y el ángulo que forma  $r$  con  $\pi$ . Si  $r$  es paralela a  $\pi$ , calcule la distancia de  $r$  a  $\pi$ .

**PREGUNTA 4** (a elegir entre 4.1 y 4.2):

4.1) [2 ptos.] Justifique que la derivada de la función  $f(x) = e^x(x-1) + 1 - x$  se anula en algún punto del intervalo  $(0,1)$ .

4.2) a) [1,5 ptos.] Calcule la integral indefinida  $\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

- b) [0,5 ptos.] Determine la primitiva de la función  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$  cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas  $(e, 1)$ .

**PREGUNTA 5** (a elegir entre 5.1 y 5.2):

5.1) En una fábrica hay tres máquinas. A, B y C. que producen el mismo tipo de pieza. La máquina A fabrica el 50% de las piezas. y el 3 %, de ellas son defectuosas. La máquina B fabrica el 30% de las piezas, y el 4 % de ellas son defectuosas. La máquina C fabrica el 20% de las piezas, y el 5% de ellas son defectuosas. Se elige una pieza al azar de la producción total.

- [0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza sea defectuosa.
- [0,75 ptos.]** Sabiendo que la pieza elegida es defectuosa, calcule la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B.
- [0,5 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza no sea defectuosa sabiendo que procede de la máquina C.

5.2) Una fábrica produce bombillas y se sabe que el 5% son defectuosas.

- [0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 9 bombillas escogidas al azar haya exactamente 3 bombillas defectuosas.
- [1,25 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 200 bombillas escogidas al azar haya al menos 10 bombillas defectuosas.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

| n | x | p      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|---|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|   |   | 0,01   | 0,05   | 0,10   | 0,15   | 0,20   | 0,25   | 0,30   | 1/3    | 0,35   | 0,40   | 0,45   | 0,49   | 0,50   |
| 2 | 0 | 0,9801 | 0,9025 | 0,8100 | 0,7225 | 0,6400 | 0,5625 | 0,4900 | 0,4444 | 0,4225 | 0,3600 | 0,3025 | 0,2601 | 0,2500 |
|   | 1 | 0,0198 | 0,0950 | 0,1800 | 0,2550 | 0,3200 | 0,3750 | 0,4200 | 0,4444 | 0,4550 | 0,4800 | 0,4950 | 0,4998 | 0,5000 |
|   | 2 | 0,0001 | 0,0025 | 0,0100 | 0,0225 | 0,0400 | 0,0625 | 0,0900 | 0,1111 | 0,1225 | 0,1600 | 0,2025 | 0,2401 | 0,2500 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0010 | 0,0034 | 0,0080 | 0,0156 | 0,0270 | 0,0370 | 0,0429 | 0,0640 | 0,0911 | 0,1176 | 0,1250 |
| 3 | 0 | 0,9703 | 0,8574 | 0,7290 | 0,6141 | 0,5120 | 0,4219 | 0,3430 | 0,2963 | 0,2746 | 0,2160 | 0,1664 | 0,1327 | 0,1250 |
|   | 1 | 0,0294 | 0,1354 | 0,2430 | 0,3251 | 0,3840 | 0,4219 | 0,4410 | 0,4444 | 0,4436 | 0,4320 | 0,4084 | 0,3823 | 0,3750 |
|   | 2 | 0,0003 | 0,0071 | 0,0270 | 0,0574 | 0,0950 | 0,1406 | 0,1890 | 0,2222 | 0,2389 | 0,2880 | 0,3341 | 0,3674 | 0,3750 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0010 | 0,0034 | 0,0080 | 0,0156 | 0,0270 | 0,0370 | 0,0429 | 0,0640 | 0,0911 | 0,1176 | 0,1250 |
| 4 | 0 | 0,9606 | 0,8145 | 0,6561 | 0,5220 | 0,4096 | 0,3164 | 0,2401 | 0,1975 | 0,1785 | 0,1296 | 0,0915 | 0,0677 | 0,0625 |
|   | 1 | 0,0388 | 0,1715 | 0,2916 | 0,3685 | 0,4096 | 0,4219 | 0,4116 | 0,3951 | 0,3845 | 0,3456 | 0,2995 | 0,2600 | 0,2500 |
|   | 2 | 0,0006 | 0,0135 | 0,0486 | 0,0975 | 0,1536 | 0,2109 | 0,2646 | 0,2963 | 0,3105 | 0,3456 | 0,3675 | 0,3747 | 0,3750 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0036 | 0,0115 | 0,0256 | 0,0469 | 0,0756 | 0,0988 | 0,1115 | 0,1536 | 0,2005 | 0,2400 | 0,2500 |
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0345 | 0,0313 |
|   | 1 | 0,0480 | 0,2036 | 0,3281 | 0,3915 | 0,4096 | 0,3955 | 0,3602 | 0,3292 | 0,3124 | 0,2592 | 0,2059 | 0,1657 | 0,1563 |
|   | 2 | 0,0010 | 0,0214 | 0,0729 | 0,1382 | 0,2048 | 0,2637 | 0,3087 | 0,3292 | 0,3364 | 0,3456 | 0,3369 | 0,3185 | 0,3125 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0081 | 0,0244 | 0,0512 | 0,0879 | 0,1323 | 0,1646 | 0,1811 | 0,2304 | 0,2757 | 0,3060 | 0,3125 |
| 6 | 0 | 0,9415 | 0,7351 | 0,5314 | 0,3771 | 0,2621 | 0,1780 | 0,1176 | 0,0878 | 0,0754 | 0,0467 | 0,0277 | 0,0176 | 0,0156 |
|   | 1 | 0,0571 | 0,2321 | 0,3543 | 0,3993 | 0,3932 | 0,3560 | 0,3025 | 0,2634 | 0,2437 | 0,1866 | 0,1359 | 0,1014 | 0,0938 |
|   | 2 | 0,0014 | 0,0305 | 0,0984 | 0,1762 | 0,2458 | 0,2966 | 0,3241 | 0,3292 | 0,3280 | 0,3110 | 0,2780 | 0,2436 | 0,2344 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0021 | 0,0146 | 0,0415 | 0,0819 | 0,1318 | 0,1852 | 0,2195 | 0,2355 | 0,2765 | 0,3032 | 0,3121 | 0,3125 |
| 7 | 0 | 0,9321 | 0,6983 | 0,4783 | 0,3206 | 0,2097 | 0,1335 | 0,0824 | 0,0585 | 0,0490 | 0,0280 | 0,0152 | 0,0090 | 0,0078 |
|   | 1 | 0,0659 | 0,2573 | 0,3720 | 0,3960 | 0,3670 | 0,3115 | 0,2471 | 0,2048 | 0,1848 | 0,1306 | 0,0872 | 0,0604 | 0,0547 |
|   | 2 | 0,0020 | 0,0406 | 0,1240 | 0,2097 | 0,2753 | 0,3115 | 0,3177 | 0,3073 | 0,2985 | 0,2613 | 0,2140 | 0,1740 | 0,1641 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0036 | 0,0230 | 0,0617 | 0,1147 | 0,1730 | 0,2269 | 0,2561 | 0,2679 | 0,2903 | 0,2918 | 0,2786 | 0,2734 |
| 8 | 0 | 0,9227 | 0,6634 | 0,4305 | 0,2725 | 0,1678 | 0,1001 | 0,0576 | 0,0390 | 0,0319 | 0,0168 | 0,0084 | 0,0046 | 0,0039 |
|   | 1 | 0,0746 | 0,2793 | 0,3826 | 0,3847 | 0,3355 | 0,2670 | 0,1977 | 0,1561 | 0,1373 | 0,0896 | 0,0548 | 0,0352 | 0,0313 |
|   | 2 | 0,0026 | 0,0515 | 0,1488 | 0,2376 | 0,2936 | 0,3115 | 0,2965 | 0,2731 | 0,2587 | 0,2090 | 0,1569 | 0,1183 | 0,1094 |
|   | 3 | 0,0001 | 0,0054 | 0,0331 | 0,0839 | 0,1468 | 0,2076 | 0,2541 | 0,2731 | 0,2786 | 0,2787 | 0,2568 | 0,2273 | 0,2188 |
| 9 | 0 | 0,9135 | 0,6302 | 0,3874 | 0,2316 | 0,1342 | 0,0751 | 0,0404 | 0,0260 | 0,0207 | 0,0101 | 0,0046 | 0,0023 | 0,0020 |
|   | 1 | 0,0830 | 0,2985 | 0,3874 | 0,3679 | 0,3020 | 0,2253 | 0,1556 | 0,1171 | 0,1004 | 0,0605 | 0,0339 | 0,0202 | 0,0176 |
|   | 2 | 0,0034 | 0,0629 | 0,1722 | 0,2597 | 0,3020 | 0,3003 | 0,2668 | 0,2341 | 0,2162 | 0,1612 | 0,1110 | 0,0776 | 0,0703 |
|   | 3 | 0,0001 | 0,0077 | 0,0446 | 0,1069 | 0,1762 | 0,2336 | 0,2668 | 0,2731 | 0,2716 | 0,2508 | 0,2119 | 0,1739 | 0,1641 |
| 9 | 4 | 0,0000 | 0,0006 | 0,0074 | 0,0283 | 0,0661 | 0,1168 | 0,1715 | 0,2048 | 0,2194 | 0,2508 | 0,2600 | 0,2506 | 0,2461 |
|   | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0008 | 0,0050 | 0,0165 | 0,0389 | 0,0735 | 0,1024 | 0,1181 | 0,1672 | 0,2128 | 0,2408 | 0,2461 |
|   | 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0006 | 0,0028 | 0,0087 | 0,0210 | 0,0341 | 0,0424 | 0,0743 | 0,1160 | 0,1542 | 0,1641 |
|   | 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0003 | 0,0012 | 0,0039 | 0,0073 | 0,0098 | 0,0212 | 0,0407 | 0,0635 | 0,0703 |
| 9 | 8 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0009 | 0,0013 | 0,0035 | 0,0083 | 0,0153 | 0,0176 |
|   | 9 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0016 | 0,0020 |

## SOLUCIONES

**PREGUNTA 1:** Darío y Cayetana están organizando un pequeño negocio y deciden invertir dinero en tres cosas:  $x$  miles de euros en publicidad,  $y$  miles de euros en materiales,  $z$  miles de euros en logística. El reparto depende de un parámetro positivo,  $k$ , que representa una estrategia de ajuste económico según la situación del mercado. Se sabe que la suma de todo lo invertido es en total 12 mil euros. Darío propone que la inversión en publicidad más el doble de la inversión en materiales sea igual a la inversión en logística más  $k$ . Cayetana quiere que el doble de la inversión en publicidad menos la inversión en materiales más la inversión en logística sea igual a 4 mil euros.

- a) **[0,75 pts.]** Plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que refleje los datos del problema.  
 b) **[1,25 pts.]** Discuta el correspondiente sistema. En caso de existir solución única, encuéntrala y exprese la en función de  $k$  si es necesario.

a) Obtenemos las ecuaciones asociadas al enunciado.

La suma de todo lo invertido es en total 12 mil euros  $\rightarrow x + y + z = 12$

La inversión en publicidad más el doble de la inversión en materiales sea igual a la inversión en logística más  $k \rightarrow x + 2y = z + k$ .

El doble de la inversión en publicidad menos la inversión en materiales más la inversión en logística sea igual a 4 mil euros  $\rightarrow 2x - y + z = 4$ .

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ x + 2y = z + k \\ 2x - y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ x + 2y - z = k \\ 2x - y + z = 4 \end{array} \right\}$$

b) Discutimos el sistema en función del valor de  $k$ .

Aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ x + 2y - z = k \\ 2x - y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x \quad +2y \quad -z \quad = k \\ -x \quad -y \quad -z \quad = -12 \\ \hline y \quad -2z \quad = k - 12 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x \quad -y \quad +z \quad = 4 \\ -2x \quad -2y \quad -2z \quad = -24 \\ \hline -3y \quad -z \quad = -20 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ y - 2z = k - 12 \\ -3y - z = -20 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ -3y \quad -z \quad = -20 \\ 3y \quad -6z \quad = 3k - 36 \\ \hline -7z \quad = 3k - 56 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ y - 2z = k - 12 \\ -7z = 3k - 56 \end{array} \right\}$$

El sistema triangular obtenido siempre va a tener solución única, independientemente del valor de  $k$ . Obtenemos la expresión de su solución.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ y - 2z = k - 12 \\ -7z = 3k - 56 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ y - 2z = k - 12 \\ \boxed{z = \frac{3k - 56}{-7} = 8 - \frac{3k}{7}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 8 - \frac{3k}{7} = 12 \\ y - 2\left(8 - \frac{3k}{7}\right) = k - 12 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 4 + \frac{3k}{7} \\ y - 16 + \frac{6k}{7} = k - 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 4 + \frac{3k}{7} \\ \boxed{y = 4 + k - \frac{6k}{7} = 4 + \frac{k}{7}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 4 + \frac{k}{7} = 4 + \frac{3k}{7} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2k}{7}}$$

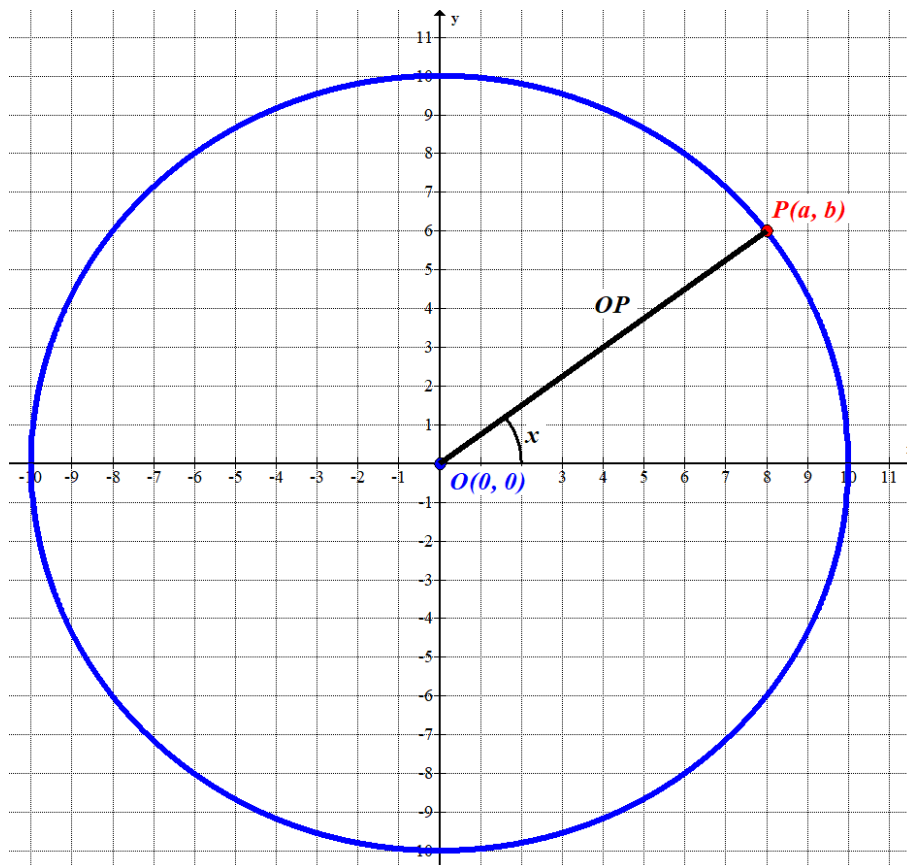
La solución del sistema es  $x = \frac{2k}{7}$ ;  $y = 4 + \frac{k}{7}$ ;  $z = 8 - \frac{3k}{7}$ .

**PREGUNTA 2:** Considere un punto P de coordenadas  $(a,b)$  que está en el primer cuadrante, sobre una circunferencia de radio 10 centrada en el origen  $O(0,0)$ . Sea  $x$  el ángulo que forma el radio OP con el eje horizontal (o eje X), medido en radianes.

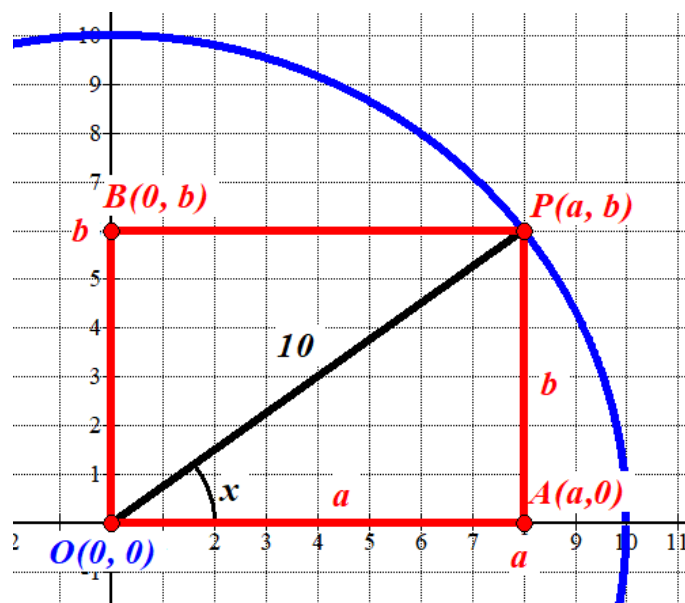
a) [0,75 ptos.] Demuestre que el área del rectángulo de vértices  $O(0,0)$ ,  $A(a,0)$ ,  $B(0,b)$  y  $P(a,b)$  viene dada por la función  $f(x) = 100 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ .

b) [1,25 ptos.] Calcule el ángulo  $x$  (en radianes) para que el área de dicho rectángulo sea máxima.

Dibujamos la situación planteada.



a) La longitud del radio  $OP$  es 10 y el rectángulo del que queremos hallar la expresión de su área es el del dibujo siguiente.



El área del rectángulo OBPA es el producto de la base por la altura:  $A(x) = a \cdot b$ .

Consideramos el triángulo rectángulo OAP y aplicamos las igualdades trigonométricas.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{10} \rightarrow b = 10 \cdot \operatorname{sen} x \\ \cos x = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{10} \rightarrow a = 10 \cdot \cos x \\ A(x) = a \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{A(x) = 10 \operatorname{sen} x \cdot 10 \cos x = 100 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

b) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= 100 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 100 \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + 100 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) = \\ &= 100 \cos^2(x) - 100 \operatorname{sen}^2(x) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 100 \cos^2(x) - 100 \operatorname{sen}^2(x) = 0 \Rightarrow \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 0 \Rightarrow -2 \operatorname{sen}^2(x) = -1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \text{ está en el primer cuadrante} \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$

Hemos obtenido el punto crítico  $x = \frac{\pi}{4}$ . Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = 100 \cos^2(x) - 100 \operatorname{sen}^2(x) \Rightarrow f''(x) = 200 \cos(x)(-\operatorname{sen}(x)) - 200 \operatorname{sen}(x) \cos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = -200 \operatorname{sen}(x) \cos(x) - 200 \operatorname{sen}(x) \cos(x) = -400 \operatorname{sen}(x) \cos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -400 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -400 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -200 < 0$$

Para  $x = \frac{\pi}{4}$  la primera derivada se anula y la segunda toma valor negativo. La función presenta un máximo relativo para este valor del ángulo  $x$ . Este máximo relativo es el máximo absoluto de la función área.

**PREGUNTA 3:** Considere el plano  $\pi : 2x - y + 3z - 5 = 0$  y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

- a) [0,75 ptos.] Estudie la posición relativa de  $r$  y  $\pi$ .  
 b) [1,25 ptos.] Si  $r$  corta a  $\pi$  en un solo punto, calcule dicho punto y el ángulo que forma  $r$  con  $\pi$ . Si  $r$  es paralela a  $\pi$ , calcule la distancia de  $r$  a  $\pi$ .

- a) Para estudiar la posición relativa de recta y plano obtengo un vector normal del plano y un vector director de la recta.

$$\pi : 2x - y + 3z - 5 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, -1, 3)$$

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, -1, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -1) \end{cases}$$

Averiguamos si el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta se anula.

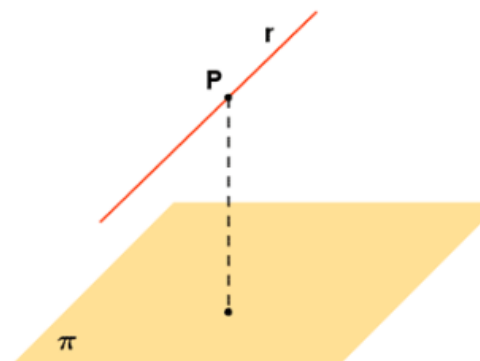
$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, -1, 3) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, -1, 3)(2, 1, -1) = 4 - 1 - 3 = 0$$

Al ser nulo el producto escalar la recta es paralela al plano o está contenida en él. Averiguamos si el punto  $P_r(1, -1, 2)$  de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ \text{¿} P_r(1, -1, 2) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 1 - (-1) + 3 \cdot 2 - 5 = 0? \Rightarrow \text{¿} 2 + 1 + 6 - 5 = 0? \Rightarrow \text{¡¡NO!!}$$

El punto no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.

- b) Como la recta es paralela al plano hallo la distancia entre recta y plano. Esta distancia es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.



$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ P_r(1, -1, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - (-1) + 3 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{14}} \approx 1.07 \text{ unidades}}$$

La distancia de la recta al plano vale  $\frac{4}{\sqrt{14}} \approx 1.07$  unidades.

4.1) [2 ptos.] Justifique que la derivada de la función  $f(x) = e^x(x-1) + 1 - x$  se anula en algún punto del intervalo (0,1).

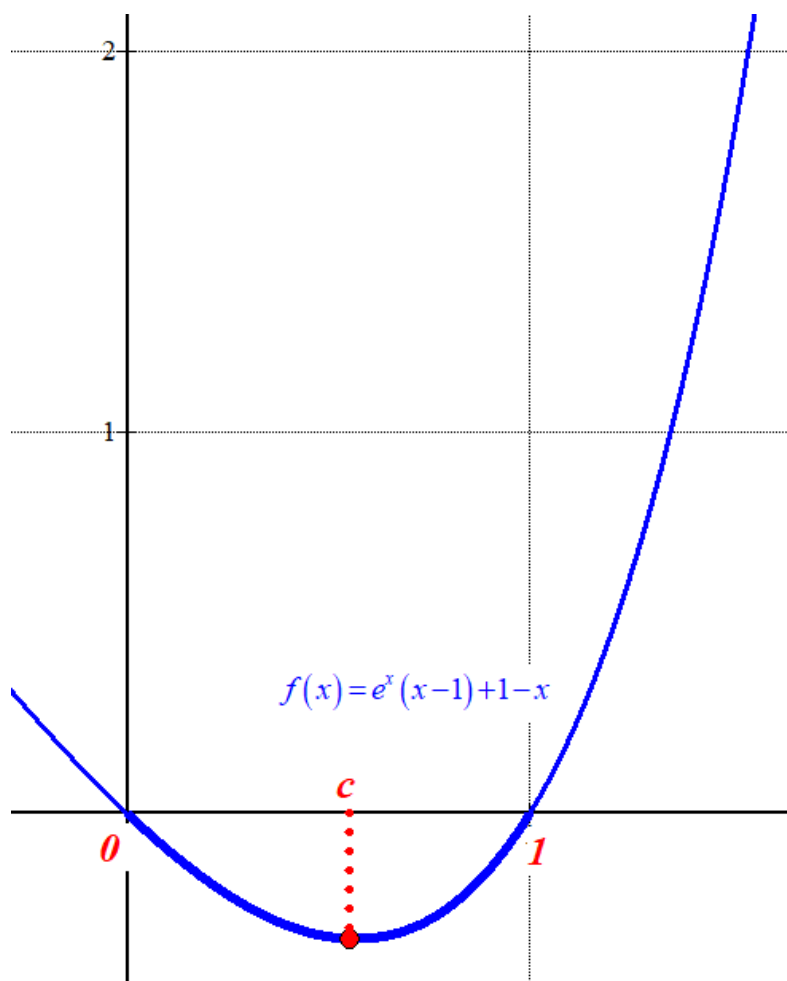
El **Teorema de Rolle** establece que si una función  $f(x)$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ , y toma el mismo valor en los extremos ( $f(a) = f(b)$ ), entonces existe al menos un punto  $c \in (a, b)$  donde su derivada se anula, es decir,  $f'(c) = 0$ .

Para el ejercicio consideramos la función  $f(x) = e^x(x-1) + 1 - x$  que es una función continua en todo  $\mathbb{R}$  pues es producto de una función exponencial y otra polinómica. También es derivable en todo  $\mathbb{R}$  por el mismo motivo.

Consideramos el intervalo  $(0, 1)$  y vemos si la función toma el mismo valor en los extremos del intervalo de definición.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = e^0(0-1) + 1 - 0 = 1(-1) + 1 = -1 + 1 = 0 \\ f(1) = e^1(1-1) + 1 - 1 = e \cdot 0 + 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = f(1) = 0$$

Se cumplen todos los requisitos del teorema de Rolle y podemos afirmar que la derivada de la función  $f(x) = e^x(x-1) + 1 - x$  se anula en algún punto del intervalo  $(0,1)$ .



4.2) a) **[1,5 ptos.]** Calcule la integral indefinida  $\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

b) **[0,5 ptos.]** Determine la primitiva de la función  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$  cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas (e, 1).

a) Calculamos la integral pedida usando el método de cambio de variable.

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \rightarrow dx = x dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\cancel{x} \cdot t^2} \cancel{x} dt = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{-1}{t} = \left\{ \ln x = t \right\} = \boxed{\frac{-1}{\ln x} + K}$$

b) La primitiva de la función  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$  la hemos calculado en el apartado anterior y tiene la

expresión  $F(x) = \frac{-1}{\ln x} + K$ . Determinamos el valor de  $K$  para que la primitiva pase por el punto de coordenadas (e, 1).

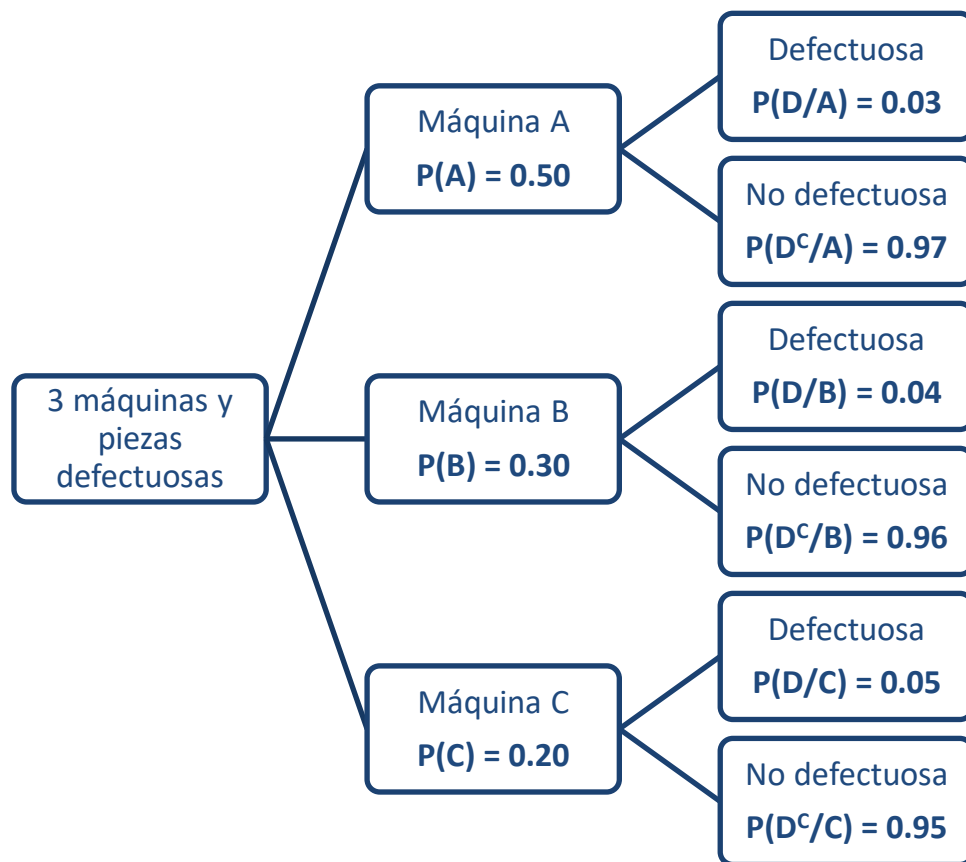
$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{-1}{\ln x} + K \\ F(e) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{\ln e} + K = 1 \Rightarrow \frac{-1}{1} + K = 1 \Rightarrow K = 2 \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{-1}{\ln x} + 2}$$

La primitiva buscada es  $F(x) = \frac{-1}{\ln x} + 2$ .

5.1) En una fábrica hay tres máquinas. A, B y C. que producen el mismo tipo de pieza. La máquina A fabrica el 50% de las piezas. y el 3 %, de ellas son defectuosas. La máquina B fabrica el 30% de las piezas, y el 4 % de ellas son defectuosas. La máquina C fabrica el 20% de las piezas, y el 5% de ellas son defectuosas. Se elige una pieza al azar de la producción total.

- a) **[0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza sea defectuosa.  
 b) **[0,75 ptos.]** Sabiendo que la pieza elegida es defectuosa, calcule la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B.  
 c) **[0,5 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza no sea defectuosa sabiendo que procede de la máquina C.

Llamamos A, B y C a los sucesos “pieza producida por la máquina A, B o C. Y denominamos D al suceso “la pieza es defectuosa”. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Calculamos el valor de la probabilidad  $P(D)$ . Para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total. El valor que obtendremos estará comprendido entre 0.03 y 0.05.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.2 \cdot 0.05 = \boxed{0.037}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa vale 0.037.

- b) Nos piden calcular  $P(B/D)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.04}{0.037} = \boxed{\frac{12}{37} \approx 0.3243}$$

La probabilidad de que una pieza defectuosa haya sido fabricada por la máquina B vale 0.3243.

- c) Nos piden calcular  $P(D^c / C)$ . Esta probabilidad está puesta en el diagrama de árbol. Como nos dicen que el 5 % de las piezas producidas por la máquina C son defectuosas entonces el 95 % de las piezas producidas por la máquina C no serán defectuosas y la probabilidad pedida vale  $P(D^c / C) = 0.95$ .

5.2) Una fábrica produce bombillas y se sabe que el 5% son defectuosas.

- a) **[0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 9 bombillas escogidas al azar haya exactamente 3 bombillas defectuosas.
- b) **[1,25 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 200 bombillas escogidas al azar haya al menos 10 bombillas defectuosas.

a) Consideramos  $X$  la variable aleatoria que cuenta el número de bombillas defectuosas de un lote de 9. Esta variable es una binomial donde  $n$  = número de repeticiones = 9 y  $p$  = probabilidad de que una bombilla esté defectuosa = 0.05.  $X = B(9, 0.05)$ .

Nos piden calcular  $P(X = 3)$ . Buscamos en la tabla de la binomial y vemos que esta probabilidad vale 0.0077.

| n | x | 0,01   | 0,05   |
|---|---|--------|--------|
| 2 | 0 | 0,9801 | 0,9025 |
|   | 1 | 0,0198 | 0,0950 |
|   | 2 | 0,0001 | 0,0025 |
| 3 | 0 | 0,9703 | 0,8774 |
|   | 1 | 0,0294 | 0,1544 |
|   | 2 | 0,0003 | 0,0071 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0001 |
| 4 | 0 | 0,9606 | 0,8450 |
|   | 1 | 0,0388 | 0,1115 |
|   | 2 | 0,0006 | 0,0035 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0005 |
|   | 4 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 |
|   | 1 | 0,0480 | 0,2336 |
|   | 2 | 0,0010 | 0,0014 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0001 |
|   | 4 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 5 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 0 | 0,9415 | 0,7051 |
|   | 1 | 0,0571 | 0,2021 |
|   | 2 | 0,0014 | 0,0005 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0001 |
|   | 4 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 5 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 6 | 0,0000 | 0,0000 |
| 7 | 0 | 0,9321 | 0,6083 |
|   | 1 | 0,0659 | 0,1573 |
|   | 2 | 0,0020 | 0,0006 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 4 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 5 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 6 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 7 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 0 | 0,9227 | 0,5340 |
|   | 1 | 0,0746 | 0,1093 |
|   | 2 | 0,0026 | 0,0015 |
|   | 3 | 0,0001 | 0,0004 |
|   | 4 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 5 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 6 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 7 | 0,0000 | 0,0000 |
|   | 8 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 0 | 0,9135 | 0,4302 |
|   | 1 | 0,0830 | 0,0385 |
|   | 2 | 0,0033 | 0,0025 |
|   | 3 | 0,0000 | 0,0007 |
|   | 4 | 0,0000 | 0,0000 |

b) Consideramos  $X$  la variable aleatoria que cuenta el número de bombillas defectuosas de un lote de 200. Esta variable es una binomial donde  $n$  = número de repeticiones = 200 y  $p$  = probabilidad de que una bombilla esté defectuosa = 0.05.  $X = B(200, 0.05)$ .

Nos piden calcular  $P(X \geq 10)$ . Como el número de repeticiones es muy alto calculamos la probabilidad pedida usando la aproximación a una normal. Como la media es  $np = 200 \cdot 0.05 = 10$

y la desviación típica es  $\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.05 \cdot 0.95} = \frac{\sqrt{38}}{2} \approx 3.0822$  la variable binomial  $X$  se

aproxima por una variable normal  $Y = N\left(10, \frac{\sqrt{38}}{2}\right)$ . Esta aproximación es buena pues  $np = 10 > 5$  y  $nq = 200 \cdot 0.95 = 190 > 5$ .

$$P(X \geq 10) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 9.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 10}{\sqrt{38}/2} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{9.5 - 10}{\sqrt{38}/2}\right) = P(Z \geq -0.162) = P(Z \leq 0.162) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.5636}$$

| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 |