

Prueba de Acceso a la Universidad

Curso: 2025-2026

Asignatura: MATEMÁTICAS II



Responde P1, P2 y P3, una de entre P4.1 y P4.2 y otra entre P5.1 y P5.2.

P1) Dada una hoja de papel de dimensiones 20cm × 30cm, calcula el lado del cuadrado a recortar en cada esquina de forma que la caja resultante de subir las solapas que quedan, sea de volumen máximo.

P2) Calcula los valores posibles de r y t para que $|A| + |B| = 4$, sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{pmatrix}$$

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

P4.1) En un examen tipo test de 10 preguntas, cada pregunta tiene para elegir 4 respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Si se responde al azar:

- (i) ¿Cuál es la probabilidad de fallar todas?
- (ii) ¿Cuál es la probabilidad de acertar 7 exactamente?
- (iii) Para aprobar se deben responder al menos 7 bien. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar?

P4.2) Desde hace siglos, tal y como quedó reflejado en una sentencia de 1375, cada 13 de julio los habitantes de Bearne entregan tres vacas a los roncaleses, conociéndose tal tratado como el *Tributo de las Tres Vacas o Iror Emontarzuna* (en roncalés). Dado que los habitantes del valle del Roncal hablaban roncalés (dialecto del euskera) y los habitantes de Bearne hablaban bearnés (dialecto del gascón), se cree que fueron los suletinos quienes, además de participar en el arbitraje junto con habitantes de Ansó, facilitaron las labores de traducción, pues es sabido que algunos de ellos hablaban tanto el suletino (dialecto del euskera cercano al roncalés) como el bearnés.

Supongamos que se juntaron 5 bearneses, 5 roncaleses y 2 suletinos sobre la Piedra de San Martín. Suponiendo que los bearneses se comunican entre sí en bearnés, los roncaleses en euskera y que los suletinos también hablaban entre ellos únicamente en euskera (pero siendo estos últimos capaces de comunicarse en bearnés con los habitantes de Bearne), responde:

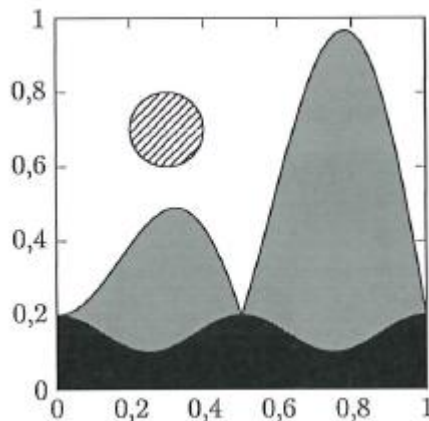
- (i) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en euskera?
- (ii) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en bearnés?

- (iii) En 1375, tras firmar la paz, los 5 roncaleses y 5 bearneses se fueron a la cantina de Joantxo a celebrarlo. Si en una mesa han sido sentados tres ellos al azar, ¿cuál es probabilidad de que no hablen todos el mismo idioma?

P5.1) El pintor Coreano Tokien-co Lorelari idea sus cuadros mediante funciones matemáticas. El cuadro mostrado (conformado por cielo azul, sol amarillo, monte verde y mar azul oscuro) está compuesto por las curvas correspondientes a las siguientes tres ecuaciones:

$$y = 0.15 + \frac{1}{20} \cos(4\pi x); \quad (x - 0.3)^2 + (y - 0.7)^2 = \frac{1}{100}; \quad y = 0.2 + x \cdot |\sin(2\pi x)|$$

Asocia cada curva con su ecuación. ¿Qué porcentaje del cuadro es monte visible (verde)?



P5.2) Sea $f(x) = \log_2(x \cdot (\sin(\pi x) + 2))$. Demuestra que existe un punto c en $[2, 4]$ tal que $f'(c) = \frac{1}{2}$.

AYUDA

- Volumen de una esfera: $\frac{4}{3} \pi R^3$
- Área de una esfera: $4\pi R^2$
- Ecuación de circunferencia de radio R centrada en (a, b) : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$$Z \sim N(0, 1)$$

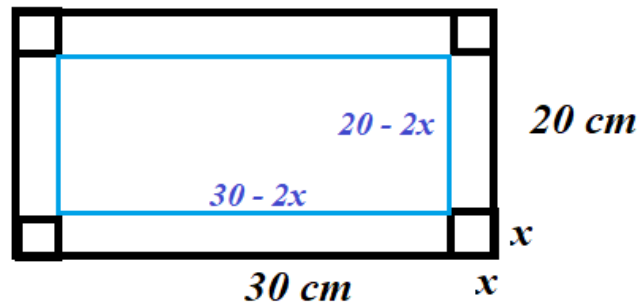
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0016	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0043	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0186	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1181	0.1161	0.1141	0.1121	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2234	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3120
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483

$$P(Z < k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-t^2/2} dt$$

SOLUCIONES

P1) Dada una hoja de papel de dimensiones 20cm × 30cm, calcula el lado del cuadrado a recortar en cada esquina de forma que la caja resultante de subir las solapas que quedan, sea de volumen máximo.

Dibujamos la situación planteada.



La caja tiene de base un rectángulo de lados $30 - 2x$ y $20 - 2x$, siendo su altura x . El volumen de esta caja es $V(x) = (20 - 2x)(30 - 2x)x$, siendo $0 \leq x \leq 10$.

Derivamos la función volumen de la caja y averiguamos cuando se anula dicha derivada.

$$\begin{aligned} V'(x) &= -2(30 - 2x)x + -2(20 - 2x)x + (20 - 2x)(30 - 2x) = \\ &= -60x + 4x^2 - 40x + 4x^2 + 600 - 40x - 60x + 4x^2 \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 200x + 600 \\ V'(x) &= 0 \Rightarrow 12x^2 - 200x + 600 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 50x + 150 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 150}}{2 \cdot 3} = \frac{50 \pm 10\sqrt{7}}{6} = \begin{cases} \frac{50 - 10\sqrt{7}}{6} = \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3} \approx 3.92 \\ \frac{50 + 10\sqrt{7}}{6} = \frac{25 + 5\sqrt{7}}{3} \approx 12.74 > 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Sustituimos $x = \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3}$ en la segunda derivada.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 200x + 600 \Rightarrow V''(x) = 24x - 200 \Rightarrow \\ \Rightarrow V''\left(\frac{25 - 5\sqrt{7}}{3}\right) &= 24 \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3} - 200 = -195 < 0 \end{aligned}$$

Para $x = \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3}$ la primera derivada de la función volumen se anula y la segunda derivada toma valor negativo. La caja es de volumen máximo para un recorte en cada esquina de un cuadrado de lado $x = \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3} \approx 3.92$ centímetros.

P2) Calcula los valores posibles de r y t para que $|A| + |B| = 4$, sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de los determinantes de A y B.

$$|A| = \begin{vmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \{ \text{Columna } 2^a - \text{Columna } 1^a \} = \begin{vmatrix} t & 0 & t \\ t & 3 & -3+t \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Columna } 3^a - \text{Columna } 1^a \} = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ t & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \{ \text{Columna } 3^a + \text{Columna } 2^a \} =$$

$$= \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ t & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = t \cdot 3 \cdot 0 = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{vmatrix} = \{ \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \} = \begin{vmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Columna } 3^a + \text{Columna } 2^a \} = \begin{vmatrix} 1+r & r & 4r \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4r$$

Comprobamos cuando se cumple la igualdad.

$$|A| + |B| = 4 \Rightarrow 0 - 4r = 4 \Rightarrow \boxed{r = \frac{4}{-4} = -1}$$

La igualdad se cumple para $r = -1$ y cualquier valor de t .

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Determinamos la posición relativa de ambas rectas. Para ello obtenemos un vector director y un punto de cada una de ellas.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -2) \\ P_r(0, -3, 2) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (3, 1, 2) \\ Q_s(-4, 1, -1) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales. Las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, -2) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Determinamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, -3, 2) \\ Q_s(-4, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (-4, 1, -1) - (0, -3, 2) = (-4, 4, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, -2) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-4, 4, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 8 - 24 - 8 + 9 - 8 = -42 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero las rectas se cruzan. Hallamos la recta t que corta perpendicularmente a ambas. Un vector director de la recta t es el producto vectorial de los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{v}_s$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, -2) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2+2)i + (-2-6)j + (1-3)k = (4, -8, -2)$$

Hallamos el plano π que contiene las rectas r y t . Este plano tiene como vectores directores

$\vec{u}_r$ y $\vec{w}_t = \frac{1}{2} \vec{u}_r \times \vec{v}_s$. Y contiene el punto P_r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, -2) \\ \vec{w}_t = \frac{1}{2} \vec{u}_r \times \vec{v}_s = (2, -4, -1) \\ P_r(0, -3, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y+3 & z-2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - 4y - 12 - 4z + 8 - 2z + 4 + y + 3 - 8x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x - 3y - 6z + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x + y + 2z - 1 = 0}$$

Hallamos el punto de corte de la recta s y el plano $\pi: 3x + y + 2z - 1 = 0$. Este punto pertenece a la recta t que intentamos determinar.

$$s \equiv \begin{cases} \pi: 3x + y + 2z - 1 = 0 \\ \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 3(-4 + 3\lambda) + 1 + \lambda + 2(-1 + 2\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow$$

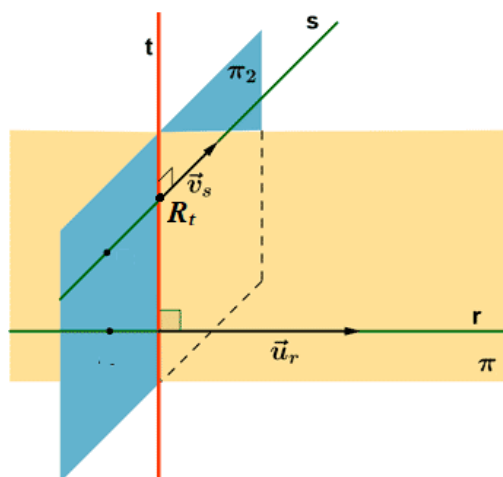
$$\Rightarrow -12 + 9\lambda + 1 + \lambda - 2 + 4\lambda - 1 = 0 \Rightarrow 14\lambda = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 3 \cdot 1 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = -1 + 2 \cdot 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{R_t(-1, 2, 1)}$$

Determinamos la ecuación continua de la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} R_t(-1, 2, 1) \\ \vec{w}_t = (2, -4, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow t: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{-1}$$

La recta t que corta perpendicularmente a r y s tiene ecuación $t: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{-1}$.



P4.1) En un examen tipo test de 10 preguntas, cada pregunta tiene para elegir 4 respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Si se responde al azar:

(i) ¿Cuál es la probabilidad de fallar todas?

(ii) ¿Cuál es la probabilidad de acertar 7 exactamente?

(iii) Para aprobar se deben responder al menos 7 bien. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar?

Consideramos la variable aleatoria X = Número de respuestas falladas en un examen tipo test de 10 preguntas cuyas respuestas se realizan al azar.
 Esta variable es una binomial, siendo n = número de repeticiones = 10 y p = probabilidad de fallar una pregunta = $3/4 = 0.75$. $X = B(10, 0.75)$.

(i) Como las respuestas son independientes entre sí la probabilidad de fallar todas las respuestas es el producto de las probabilidades de fallar cada una de ellas.

$$P(X = 10) = 0.75^{10} \approx \boxed{0.0563}$$

(ii) Debemos calcular la probabilidad de fallar 3 respuestas: $P(X = 3)$.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.75^3 \cdot 0.25^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} 0.75^3 \cdot 0.25^7 \approx \boxed{0.0031}$$

(iii) Para aprobar se deben responder correctamente a 7, 8, 9 o 10 preguntas. Para ello se deben fallar 3, 2, 1 o 0 preguntas.

$$\begin{aligned} P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) &= \\ &= \binom{10}{3} 0.75^3 \cdot 0.25^7 + \binom{10}{2} 0.75^2 \cdot 0.25^8 + \binom{10}{1} 0.75^1 \cdot 0.25^9 + \binom{10}{0} 0.75^0 \cdot 0.25^{10} = \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} 0.75^3 \cdot 0.25^7 + \frac{10 \cdot 9}{2} 0.75^2 \cdot 0.25^8 + 10 \cdot 0.75 \cdot 0.25^9 + 0.25^{10} \approx \boxed{0.0035} \end{aligned}$$

La probabilidad de aprobar tiene un valor aproximado de 0.0035.

P4.2) Desde hace siglos, tal y como quedó reflejado en una sentencia de 1375, cada 13 de julio los habitantes de Bearne entregan tres vacas a los roncaleses, conociéndose tal tratado como el *Tributo de las Tres Vacas o Iror Emontarzuna* (en roncalés). Dado que los habitantes del valle del Roncal hablaban roncalés (dialecto del euskera) y los habitantes de Bearne hablaban bearnés (dialecto del gascón), se cree que fueron los suletinos quienes, además de participar en el arbitraje junto con habitantes de Ansó, facilitaron las labores de traducción, pues es sabido que algunos de ellos hablaban tanto el suletino (dialecto del euskera cercano al roncalés) como el bearnés.

Supongamos que se juntaron 5 bearneses, 5 roncaleses y 2 suletinos sobre la Piedra de San Martín. Suponiendo que los bearneses se comunican entre sí en bearnés, los roncaleses en euskera y que los suletinos también hablaban entre ellos únicamente en euskera (pero siendo estos últimos capaces de comunicarse en bearnés con los habitantes de Bearne), responde:

- (i) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en euskera?
- (ii) Cogiendo dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se comuniquen en bearnés?
- (iii) En 1375, tras firmar la paz, los 5 roncaleses y 5 bearneses se fueron a la cantina de Joantxo a celebrarlo. Si en una mesa han sido sentados tres ellos al azar, ¿cuál es probabilidad de que no hablen todos el mismo idioma?

- (i) Hay 12 personas en la cantina. Una vez elegida la primera persona (una entre 12) solo quedan 11 personas, entre las cuales se elige una de ellas. Las distintas parejas que se pueden formar son $12 \cdot 11 = 132$. Hay 5 roncaleses y 2 suletinos que hablan euskera entre ellos y con los roncaleses, por lo que las formas de elegir dos personas que hablen euskera es $7 \cdot 6 = 42$.

La probabilidad de que las dos personas elegidas al azar se comuniquen en euskera vale

$$\frac{42}{132} = \frac{7}{22} \approx 0.3182.$$

- (ii) Hay 5 bearneses que hablan bearnés, por lo que las formas de elegir dos personas que hablen bearnés es $5 \cdot 4 = 20$. A estos le sumamos las posibles parejas de un bearnés y un suletino: $5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 20$. La probabilidad de que las dos personas elegidas al azar se comuniquen en bearnés vale

$$\frac{20 + 20}{132} = \frac{10}{33} \approx 0.303.$$

- (iii) Las formas de sentarse las 10 personas en la mesa son $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Existen muchas maneras de sentarse en la mesa de forma que no hablen todos el mismo idioma. Resulta más sencillo contabilizar los casos favorables al suceso contrario “hablan todos el mismo idioma”. Para ello deben ser las tres personas roncaleses ($5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$) o las tres personas bearneses ($5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$).

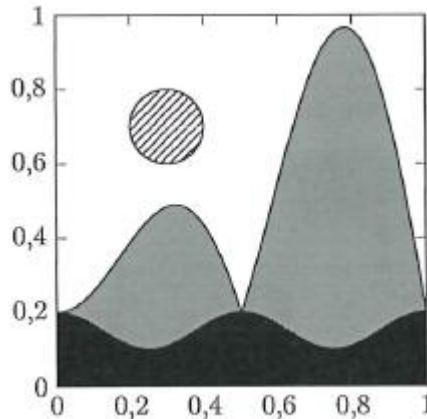
$$P(\text{No hablen todos el mismo idioma}) =$$

$$= 1 - P(\text{Hablen todos el mismo idioma}) = 1 - \frac{60 + 60}{720} = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6} \approx 0.8333}$$

P5.1) El pintor Coreano Tokien-co Lorelari idea sus cuadros mediante funciones matemáticas. El cuadro mostrado (conformado por cielo azul, sol amarillo, monte verde y mar azul oscuro) está compuesto por las curvas correspondientes a las siguientes tres ecuaciones:

$$y = 0.15 + \frac{1}{20} \cos(4\pi x); \quad (x - 0.3)^2 + (y - 0.7)^2 = \frac{1}{100}; \quad y = 0.2 + x \cdot |\sin(2\pi x)|$$

Asocia cada curva con su ecuación. ¿Qué porcentaje del cuadro es monte visible (verde)?



La ecuación $(x - 0.3)^2 + (y - 0.7)^2 = \frac{1}{100}$ corresponde a una circunferencia, por lo que es la ecuación del sol amarillo.

La curva del mar oscila de forma periódica, por lo que su ecuación es $y = 0.15 + \frac{1}{20} \cos(4\pi x)$.

Por eliminación la ecuación $y = 0.2 + x \cdot |\sin(2\pi x)|$ es la montaña.

La montaña visible es la integral definida de 0 a 1 de la diferencia entre $y = 0.2 + x \cdot |\sin(2\pi x)|$ e $y = 0.15 + \frac{1}{20} \cos(4\pi x)$.

Representamos la función $y = 0.2 + x \cdot |\sin(2\pi x)|$ como una función a trozos. Para ello averiguamos cuando se anula $\sin(2\pi x)$.

$$\sin(2\pi x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\pi x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 2\pi x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \\ 2\pi x = 2\pi \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ se cumple que $\sin(2\pi x) \geq 0$ y para $\frac{1}{2} < x < 1$ se cumple que $\sin(2\pi x) < 0$

La función se puede expresar como $y = 0.2 + x \cdot |\sin(2\pi x)| = \begin{cases} 0.2 + x \cdot \sin(2\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0.2 - x \cdot \sin(2\pi x) & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$.

Calculamos el área de la montaña visible.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1/2} 0.2 + x \cdot \sin(2\pi x) - \left[0.15 + \frac{1}{20} \cos(4\pi x) \right] dx + \\
& + \int_{1/2}^1 0.2 - x \cdot \sin(2\pi x) - \left[0.15 + \frac{1}{20} \cos(4\pi x) \right] dx = \int_0^{1/2} 0.05 + x \cdot \sin(2\pi x) - \frac{1}{20} \cos(4\pi x) dx + \\
& + \int_{1/2}^1 0.05 - x \cdot \sin(2\pi x) - \frac{1}{20} \cos(4\pi x) dx = \dots
\end{aligned}$$

Calculamos la integral $\int x \cdot \sin(2\pi x) dx$ usando el método de integración por partes.

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \sin(2\pi x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin(2\pi x) dx \rightarrow v = \int \sin(2\pi x) dx = \frac{-\cos(2\pi x)}{2\pi} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{-\cos(2\pi x)}{2\pi} \cdot x - \int \frac{-\cos(2\pi x)}{2\pi} dx = \frac{-x \cdot \cos(2\pi x)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int \cos(2\pi x) dx = \\
&= \frac{-x \cdot \cos(2\pi x)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} = \boxed{\frac{-x \cdot \cos(2\pi x)}{2\pi} + \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2}}
\end{aligned}$$

Seguimos con el cálculo de la integral definida.

$$\begin{aligned}
& \dots = \left[0.05x - \frac{x \cdot \cos(2\pi x)}{2\pi} + \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2} - \frac{\sin(4\pi x)}{20 \cdot 4\pi} \right]_0^{1/2} + \\
& + \left[0.05x + \frac{x \cdot \cos(2\pi x)}{2\pi} - \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2} - \frac{\sin(4\pi x)}{20 \cdot 4\pi} \right]_{1/2}^1 = \\
&= \left[0.05 \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \cos\left(2\pi \frac{1}{2}\right)}{2\pi} + \frac{\sin\left(2\pi \frac{1}{2}\right)}{4\pi^2} - \frac{\sin\left(4\pi \frac{1}{2}\right)}{20 \cdot 4\pi} \right] - \\
& - \left[0.05 \cdot 0 - \frac{0 \cdot \cos(2\pi \cdot 0)}{2\pi} + \frac{\sin(2\pi \cdot 0)}{4\pi^2} - \frac{\sin(4\pi \cdot 0)}{20 \cdot 4\pi} \right] + \\
& + \left[0.05 \cdot 1 + \frac{1 \cdot \cos(2\pi \cdot 1)}{2\pi} - \frac{\sin(2\pi \cdot 1)}{4\pi^2} - \frac{\sin(4\pi \cdot 1)}{20 \cdot 4\pi} \right] -
\end{aligned}$$

$$- \left[0.05 \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \cos\left(2\pi \frac{1}{2}\right)}{2\pi} - \frac{\sin\left(2\pi \frac{1}{2}\right)}{4\pi^2} - \frac{\sin\left(4\pi \frac{1}{2}\right)}{20 \cdot 4\pi} \right] =$$

$$= 0.025 + \frac{1}{4\pi} + 0.05 + \frac{1}{2\pi} - 0.025 + \frac{1}{4\pi} = \boxed{0.05 + \frac{1}{\pi} \simeq 0.368 u^2}$$

La montaña visible tiene un área de $0.05 + \frac{1}{\pi} \simeq 0.368$ unidades cuadradas y el cuadro es un cuadrado de lado 1 y tiene una superficie de 1 unidad cuadrada.

El porcentaje del cuadro que ocupa la montaña visible vale $\frac{0.05 + 1/\pi}{1} = 0.368 = 36.8\%$.

P5.2) Sea $f(x) = \log_2(x \cdot (\sin(\pi x) + 2))$. Demuestra que existe un punto c en $[2, 4]$ tal que $f'(c) = \frac{1}{2}$.

La función $f(x) = \log_2(x \cdot (\sin(\pi x) + 2))$ es continua en $[2, 4]$ si la expresión que está dentro del logaritmo es positiva.

$$\left. \begin{array}{l} x \in [2, 4] \Rightarrow x > 0 \\ -1 \leq \sin(\pi x) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sin(\pi x) + 2 \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot (\sin(\pi x) + 2) > 0$$

La función es continua y derivable en el intervalo $[2, 4]$.

Aplicando el teorema del valor medio tenemos que existe $c \in (2, 4)$ tal que $f'(c) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$

$$\left. \begin{array}{l} f(4) = \log_2(4 \cdot (\sin(4\pi) + 2)) = \log_2(8) = 3 \\ f(2) = \log_2(2 \cdot (\sin(2\pi) + 2)) = \log_2(4) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f'(c) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}}$$