

PRIMER EJERCICIO.

La primera componente de la velocidad de las moléculas de nitrógeno a una temperatura de 300 K, que denotamos por X , sigue una distribución $N(0, 298)$. Sea Z una variable aleatoria que sigue una distribución $N(0, 1)$.

(a) Se tiene que

$$\begin{aligned} P(|X| < 300) &= P(-300 < X < 300) = P\left(-\frac{300}{\sqrt{298}} < Z < \frac{300}{\sqrt{298}}\right) = P(-1,01 < Z < 1,01) \\ &= P(Z < 1,01) - P(Z < -1,01) = P(Z < 1,01) - (1 - P(Z < 1,01)) \\ &= 2P(Z < 1,01) - 1 = 2 \cdot 0,8438 - 1 = 0,6876. \end{aligned}$$

(b) Se tiene que

$$\begin{aligned} P(-600 < X < -300) &= P\left(-\frac{600}{\sqrt{298}} < Z < -\frac{300}{\sqrt{298}}\right) = P(-2,01 < Z < -1,01) \\ &= P(Z < -1,01) - P(Z < -2,01) \\ &= 1 - P(Z < 1,01) - (1 - P(Z < 2,01)) \\ &= P(Z < 2,01) - P(Z < 1,01) = 0,9778 - 0,8438 = 0,134. \end{aligned}$$

(c) Sean m_N la masa de una molécula de nitrógeno, $\sigma_N = k_B T / m_N$, m_A la masa de una molécula de argón y $\sigma_A = k_B T / m_A$. Como se sabe que $m_N < m_A$, entonces $\sigma_N > \sigma_A$. Si X^N es la primera componente de la velocidad de las moléculas de nitrógeno y X^A es la primera componente de la velocidad de las moléculas de argón, entonces $\frac{300}{\sigma_A} > \frac{300}{\sigma_N}$ y la probabilidad de un intervalo que contiene a otro es mayor que la probabilidad del intervalo al que contiene, por lo tanto

$$P(|X^A| < 300) = P\left(|Z| < \frac{300}{\sigma_A}\right) > P\left(|Z| < \frac{300}{\sigma_N}\right) = P(|X^N| < 300).$$

SEGUNDO EJERCICIO.

Sea A la matriz de coeficientes del sistema,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & a & a-1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tenemos que

$$\det A = a(a-1) + a(a-2) - a(a-1) - a = a(a-3).$$

Como $a \neq 0$, la única posibilidad de que el sistema tenga más de una solución es que sea $a = 3$. En este caso,

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

El rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada es 2, luego el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

(b) Se tiene el sistema equivalente

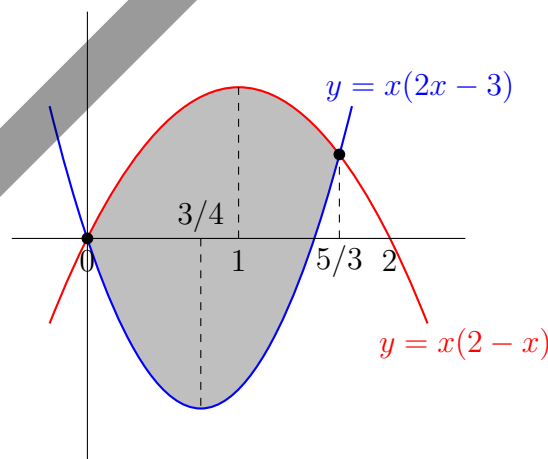
$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

Las soluciones son $x = t$, $y = \frac{1-t}{3}$, $z = 2$, con t cualquier número real.

TERCER EJERCICIO.

(a) La parábola de ecuación $y = x(2x-3)$ corta el eje OX cuando $x = 0$ y $x = 3/2$ y tiene el vértice en el punto $(3/4, -9/8)$. La parábola de ecuación $y = x(2-x)$ corta el eje OX cuando $x = 0$ y $x = 2$ y tiene el vértice en el punto $(1, 1)$. Además, las parábolas se cortan cuando

$$x(2x-3) = x(2-x) \iff x = 0, \quad x = 5/3.$$



- (b) El área entre las dos parábolas se calcula mediante la siguiente integral:

$$\int_0^{5/3} (x(2-x) - x(2x-3)) dx = \int_0^{5/3} (5x - 3x^2) dx = \left(\frac{5x^2}{2} - x^3 \right) \Big|_0^{5/3} = \frac{125}{54}.$$

Por tanto, el área del recinto es $A = \frac{125}{54} u^2$, siendo u la unidad de longitud.

CUARTO EJERCICIO.

(4A)

- (a) El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$ y $P(0, 1, 0)$ es un punto de la recta. El vector normal al plano π es $\vec{n} = (-1, 2, 1)$. Esos dos vectores son perpendiculares ya que su producto escalar es $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0$. Dependiendo del parámetro A , puede ser que el plano contenga a la recta o que la recta y el plano sean paralelos. Sustituimos el punto $P(0, 1, 0)$ en la ecuación del plano, y obtenemos $2 + A = 0$. Concluimos que si $A = -2$, el plano contiene a la recta y si $A \neq -2$, la recta y el plano son paralelos.

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente: los puntos de la recta son de la forma $(t, t+1, -t)$, siendo $t \in \mathbb{R}$. Sustituyendo ese punto en la ecuación del plano, se tiene que $A + 2 = 0$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, si $A = -2$, todos los puntos de la recta están en el plano, y si $A \neq -2$, ningún punto de la recta está en el plano, es decir, la recta es paralela al plano.

- (b) Si $A = -2$, la recta está contenida en el plano. En consecuencia, la distancia entre la recta y el plano es 0. Si $A \neq -2$, $\text{dist}(r, \pi) = \frac{|A+2|}{\sqrt{6}} u$, siendo u la unidad de longitud.

(4B)

- (a) El plano π debe ser perpendicular al vector que une los puntos A y B , es decir, a $\vec{AB} = (-2, -1, 1)$. Tomamos, por ejemplo, $\vec{n} = (2, 1, -1)$ y la ecuación del plano es de la forma $2x + y - z + d = 0$. Además, el punto medio de A y B , $P = (0, 1/2, 5/2)$, debe estar en el plano. Sustituyendo, $d = 2$ y la ecuación del plano es $2x + y - z + 2 = 0$.

Otra posibilidad es pedir que la distancia de A a π y la distancia de B a π sean iguales:

$$d(A, \pi) = d(B, \pi) \iff \frac{|2+1-2+d|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|-2+0-3+d|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} \iff |d+1| = |d-5|.$$

Necesariamente, $d = 2$.

(b) La distancia de A a π es $d(A, \pi) = \frac{|2 + 1 - 2 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} u = \frac{3}{\sqrt{6}} u = \sqrt{\frac{3}{2}} u$, siendo u la unidad de longitud. También se puede tener en cuenta que $d(A, \pi) = \frac{1}{2}d(A, B) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

QUINTO EJERCICIO.

(5A) Suponemos que la base del montículo de hormigón está en el eje OX y el eje de simetría es el eje OY . El problema se reduce a calcular el punto de corte con el eje OX de la recta tangente a la parábola que describe el montículo y que pasa por el punto $(0, 15)$.

La ecuación de la parábola que tiene el vértice en el punto $(0, 12)$ y pasa por los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ es $y = 12 - \frac{4}{3}x^2 = f(x)$.

La ecuación de la recta tangente a la parábola que pasa por el punto $(a, f(a))$ es

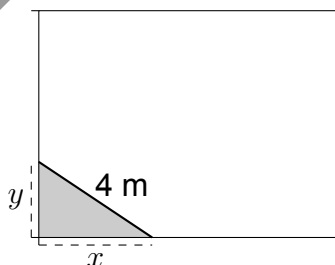
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Esa recta tiene que pasar por el punto $(0, 15)$, es decir, teniendo en cuenta que $f'(x) = -\frac{8}{3}x$ y $a > 0$,

$$f(a) - af'(a) = 12 - \frac{4}{3}a^2 - a\left(-\frac{8}{3}a\right) = 12 + \frac{4}{3}a^2 = 15 \implies a = \frac{3}{2}.$$

La recta tangente buscada es $y = 15 - 4x$, y corta al eje OX cuando $x = 15/4$. La distancia de este punto a $x = 3$, que es el extremo de la base del montículo, es $d = 3/4 = 0,75$ m.

(5B) Se tiene una sala rectangular con paredes más largas que la barra que se quiere utilizar para acotar una zona, así que la barra deberá colocarse en una de las esquinas y acotará una zona triangular:



Sea x la distancia del extremo de la barra colocado en el lado horizontal de la sala a la esquina que quedará en la zona acotada, y sea y la distancia del otro extremo de la barra a la misma esquina. El área de la zona acotada es $A = \frac{xy}{2}$. Como x e y son los catetos de

un triángulo rectángulo de hipotenusa 4, tenemos que $x^2 + y^2 = 16$. Queremos encontrar el máximo de la función

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2}, \quad x \in [0, 4].$$

Se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{16 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} \right) = \frac{8 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \implies x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Como x es una distancia, debe ser positiva, $x = 2\sqrt{2}$. Para comprobar que el área es máxima cuando $x = 2\sqrt{2}$, se puede usar la segunda derivada de la función:

$$f''(x) = \frac{-2x\sqrt{16 - x^2} - (8 - x^2) \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}}}{16 - x^2} \implies f''(2\sqrt{2}) < 0$$

y, por tanto, f tiene un máximo en $x = 2\sqrt{2}$. Como f no tiene más puntos críticos positivos, el área máxima se obtiene cuando la barra se coloca a $x = 2\sqrt{2}$ m de la esquina en la pared horizontal y a $y = 2\sqrt{2}$ m de la esquina en la pared vertical.

Es posible también tomar $h(x) = (2f(x))^2 = 16x^2 - x^4$ ya que los extremos de las funciones f y h se encuentran en los mismos valores de x . De esta manera,

$$h'(x) = 32x - 4x^3 = 4x(8 - x^2) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Como x es una distancia, debe ser positiva, $x = 2\sqrt{2}$. Finalmente,

$$h''(x) = 32 - 12x^2 \implies h''(2\sqrt{2}) < 0$$

y, por tanto, h tiene un máximo en $x = 2\sqrt{2}$.

CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Si no se demanda una técnica particular de resolución, cualquier desarrollo que conduzca a la solución será válido.
4. Si el ejercicio está correcto (siguiendo la técnica indicada, en su caso), se dará por bueno íntegramente. Sólo en el caso de no ser completamente correcto, se aplicarán las puntuaciones indicadas para cada paso en los criterios de corrección.
5. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
6. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa del ejercicio.
7. En los ejercicios en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
8. Los errores cometidos en un apartado, por ejemplo, en el cálculo del valor de un cierto parámetro, no se tendrán en cuenta en la calificación de los desarrollos posteriores que puedan verse afectados, siempre que resulten de una complejidad equivalente.
9. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
10. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
11. Se valorará la buena presentación del examen.
12. Se valorarán negativamente los planteamientos incorrectos, la confusión de conceptos y la abundancia de errores de cálculo.
13. Los errores aislados se valorarán negativamente cuando indiquen falta de reflexión crítica o de sentido común.
14. Se valorará negativamente la falta de rigor matemático en las explicaciones y la incorrecta utilización de los símbolos matemáticos, con una penalización de hasta 0,2 puntos en cada ejercicio.
15. Las respuestas deben estar escritas con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN de cada uno de los problemas

PRIMER EJERCICIO

- (a)
 - Tipificar correctamente la distribución de probabilidad (0,25 puntos).
 - Reescribir la probabilidad a calcular en términos de probabilidades de la forma $P(Z < \alpha)$ siendo Z la variable tipificada y $\alpha > 0$ (0,25 puntos).
 - Encontrar la probabilidad buscada utilizando la tabla de la distribución normal (0,25 puntos).
- (b)
 - Tipificar correctamente la distribución de probabilidad (0,25 puntos).
 - Reescribir la probabilidad a calcular en términos de probabilidades de la forma $P(Z < \alpha)$ siendo Z la variable tipificada y $\alpha > 0$ (0,25 puntos).
 - Encontrar la probabilidad buscada utilizando la tabla de la distribución normal (0,25 puntos).
- (c) Responder correctamente y de forma razonada a la pregunta (0,5 puntos).

SEGUNDO EJERCICIO

- (a)
 - Calcular el determinante de la matriz de coeficientes (0,5 puntos).
 - Comprobar que cuando $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado (0,5 puntos).
- (b) Resolver el sistema cuando $a = 3$ (1 punto).

TERCER EJERCICIO

- (a)
 - Calcular los vértices y los puntos de corte de las parábolas con el eje OX (0,5 puntos).
 - Encontrar los puntos de corte de las parábolas (0,25 puntos).
 - Dibujar correctamente el recinto (0,25 puntos).
- (b)
 - Escribir correctamente la integral que proporciona el área del recinto (0,25 puntos).
 - Calcular correctamente la primitiva del integrando y aplicar correctamente la regla de Barrow (0,5 puntos).
 - Dar la solución como una fracción, sin aproximar mediante decimales (0,25 puntos).

CUARTO EJERCICIO

4A

- (a)
 - Calcular el vector director de la recta y el vector normal al plano (0,5 puntos).
 - Comprobar que el vector director de la recta y el vector normal al plano son perpendiculares (0,5 puntos).
 - Deducir la posición relativa de la recta y el plano en función de A (0,5 puntos).
- (b) Calcular la distancia de la recta al plano (0,5 puntos).

4B

- (a)
 - Encontrar el vector normal al plano π (0,5 puntos).
 - Determinar la ecuación del plano π (1 punto).
- (b) Calcular la distancia del punto A al plano π (0,5 puntos).

QUINTO EJERCICIO

5A

- Encontrar la ecuación de la parábola que describe el montículo (0,5 puntos).
- Encontrar la ecuación general de una recta tangente a la parábola (0,5 puntos).
- Encontrar la abscisa del punto de tangencia (0,5 puntos).
- Calcular la distancia pedida (0,5 puntos).

5B

- Encontrar la expresión del área de la zona acotada (0,25 puntos).
- Encontrar la relación entre los lados del triángulo (0,25 puntos).
- Encontrar la función que se debe maximizar (0,25 puntos).
- Calcular el punto donde se anula la derivada (0,5 puntos).
- Deducir que la función tiene un máximo en el punto donde se anula la derivada (0,5 puntos).
- Explicar dónde se debe colocar la barra (0,25 puntos).