



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: ORDINÀRIA 2026	CONVOCATORIA: ORDINARIA 2026
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus VirusX. Se sabe que la enfermedad la padece el 20% de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90% de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5% de los casos. Se pide:

Responda a todos los apartados

- 1.1 (0.75 puntos)** Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.
- 1.2 (0.75 puntos)** Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.
- 1.3 (1 punto)** Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada

T de orden 3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

- 2.1.1 (1 punto)** Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .
- 2.1.2 (0.75 puntos)** Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$.
- 2.1.3 (0.75 puntos)** Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

2.2 Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$, se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

3.2 Consideramos la recta s del espacio con ecuación:

$$\frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}.$$

Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s .

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f .

4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2.$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$.

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la parte verde?

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus VirusX. Se sabe que la enfermedad la padece el 20% de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90% de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5% de los casos. Se pide:

Responda a todos los apartados

1.1 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

1.2 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.

1.3 (1 punto) Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

Llamamos X al suceso “padecer la enfermedad X ”, $T+$ a “dar positivo en el test de antígenos para la detección de la enfermedad” y $T-$ a “dar negativo en el test de antígenos”.

Nos proporcionan las siguientes probabilidades:

$$P(X) = 0.20; P(T+/X) = 0.90; P(T+/X^c) = 0.05$$

1.1 Debemos calcular $P(T+)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+) = P(X)P(T+/X) + P(X^c)P(T+/X^c) = 0.20 \cdot 0.90 + (1 - 0.20) \cdot 0.05 = \boxed{0.22}$$

1.2 Debemos calcular $P(X^c/T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(X^c/T+) = \frac{P(X^c \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(X^c)P(T+/X^c)}{P(T+)} = \frac{0.8 \cdot 0.05}{0.22} = \boxed{\frac{2}{11} \approx 0.1818}$$

1.3 Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de personas que tienen la enfermedad de un grupo de 8. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 8 y p = probabilidad de que una persona tenga la enfermedad = 0.2.

Debemos calcular $P(Y \leq 2)$. Si miramos en la tabla encontramos que esta probabilidad vale 0.7969.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,4900
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9800	0,9700
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5200	0,3439
	1		0,9997	0,9925	0,9720	0,9600	0,9400
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4608	0,3174
	1		0,9994	0,9880	0,9777	0,9677	0,9577
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4077	0,2770
	1		0,9990	0,9774	0,9515	0,9211	0,8969
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,3521	0,2211
	1		0,9885	0,9672	0,9457	0,9244	0,9031
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,3177	0,1870
	1		0,9880	0,9556	0,9233	0,8911	0,8590
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,2778	0,1613
	1		0,9873	0,9428	0,9111	0,8822	0,8577

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada

T de orden 3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$.

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

2.1.1 La matriz $T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada

$$\text{es } T/u = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 4 \\ m & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando la matriz T tiene determinante nulo.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 0 - m^2 - 0 = 4 - m^2$$

$$|T| = 0 \Rightarrow 4 - m^2 = 0 \Rightarrow 4 = m^2 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq -2$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de T es no nulo y su rango es 3, el rango de la matriz ampliada también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = -2$

En este caso el determinante de T es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz T queda $T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera y segunda son

proporcionales. Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna primeras y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$. El rango de T es 2.

La matriz ampliada queda $T/u = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la primera columna (proporcional a la segunda) y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 8 - 0 - 0 + 8 = 16 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de T. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de T es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz T queda $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera y segunda son

iguales. Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna primeras y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$. El rango de T es 2.

La matriz ampliada queda $T/u = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera y

segunda son iguales, por lo que el rango no puede ser 3. El rango de la matriz ampliada es 2, como el rango de T, aunque menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: Si $m \neq -2$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m = -2$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.1.2 Para $m = -1$ el sistema es compatible determinado. Obtenemos su solución.

$$m = -1 \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Tv = u \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \\ \boxed{z = -2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = y \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2(2x - 4) = 4 \Rightarrow -x + 4x - 8 = 4 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 4} \Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 4 - 4 = 4}$$

La solución de $Tv = u$ es $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.1.3 Para $m = 2$ la matriz T queda $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinamos los valores de α tales que

$$\det(T - \alpha I) = 0.$$

$$T - \alpha I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(T - \alpha I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\alpha)^2(1-\alpha) + 0 + 0 - 0 - 4(1-\alpha) - 0 = 0 \Rightarrow (2-\alpha)^2(1-\alpha) - 4(1-\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(2-\alpha)^2 - 4](1-\alpha) = 0 \Rightarrow [4 + \alpha^2 - 4\alpha - 4](1-\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha^2 - 4\alpha)(1-\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha - 4)(1-\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 4 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Las tensiones principales para $m = 2$ son $\alpha = 0$; $\alpha = 4$ y $\alpha = 1$.

2.2 Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz traspuesta. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

2.2.1 La matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ es $A^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Comprobamos que $A \cdot A^T = I$ y por tanto la inversa de A es su matriz traspuesta.

$$\begin{aligned} A \cdot A^T &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Queda comprobado que la matriz A es ortogonal.

2.2.2 La matriz traspuesta de $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para que B sea ortogonal se debe cumplir $B \cdot B^T = I$

$$B \cdot B^T = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Existen 4 matrices de la forma de B que son ortogonales:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Despejamos X en la ecuación matricial.

La matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple que $B^{-1} = B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$.

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$, se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

3.1.1 Para que el plano π y la recta r sean perpendiculares el vector director de la recta y el vector normal del plano deben tener coordenadas proporcionales.

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 1) \end{cases}$$

$$\pi: 2x + my + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, m, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -1, 1) \\ \vec{n} = (2, m, 1) \\ \pi \perp r \rightarrow \vec{n} \parallel \vec{v}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{-1}{m} = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Para $m = -1$ el plano π y la recta r son perpendiculares.

3.1.2 Para el que el plano π y la recta r sean paralelos el vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares. Además, la recta no debe estar contenida en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -1, 1) \\ \vec{n} = (2, m, 1) \\ \pi \parallel r \rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}_r \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2, -1, 1) \cdot (2, m, 1) = 0 \Rightarrow 4 - m + 1 = 0 \Rightarrow 5 - m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

Para $m = 5$ la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si un punto cualquiera de la recta pertenece o no al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, -1, 1) \in r \\ \pi: 2x + 5y + z - 3 = 0 \\ \text{¿} P_r \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) + 1 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¿} 0 - 5 + 1 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¡NO!}$$

El punto P_r no pertenece al plano y tampoco ningún punto de la recta. La recta es paralela al plano para $m = 5$.

3.1.3 La recta es paralela al plano para $m = 5$. Para el resto de valores de m la recta corta al plano. Hallamos ese punto de intersección en función de m .

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + my + z - 3 = 0 \\ r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 2\lambda + m(-1 - \lambda) + 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda - m - m\lambda + 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow (5 - m)\lambda - m - 2 = 0 \Rightarrow (5 - m)\lambda = m + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{5 - m \neq 0\} \Rightarrow \lambda = \frac{m + 2}{5 - m} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \frac{m + 2}{5 - m} = \frac{2m + 4}{5 - m} \\ y = -1 - \frac{m + 2}{5 - m} = \frac{-5 + m - m - 2}{5 - m} = \frac{-7}{5 - m} \\ z = 1 + \frac{m + 2}{5 - m} = \frac{5 - m + m + 2}{5 - m} = \frac{7}{5 - m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{2m + 4}{5 - m}, \frac{-7}{5 - m}, \frac{7}{5 - m}\right)$$

Para $m \neq 5$ la recta r y el plano π se cortan en el punto $A\left(\frac{2m + 4}{5 - m}, \frac{-7}{5 - m}, \frac{7}{5 - m}\right)$.

3.2 Consideramos la recta s del espacio con ecuación:

$$\frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}.$$

Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s .

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z .

3.2.1 Un plano perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$s: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \vec{v}_s = (0, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1,1,1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_s = (0,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1,1,1) \in \pi \\ \pi: 0 \cdot x + 1 \cdot y + (-1) \cdot z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1,1,1) \in \pi \\ \pi: y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: y - z = 0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi: y - z = 0$.

3.2.2 Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta s .

$$s: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_s(1,1,1) \\ \vec{v}_s = (0,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1-\lambda \end{cases}$$

Un punto Q de la recta s tiene coordenadas $Q(1,1+\lambda,1-\lambda)$. Hallamos la distancia de este punto al origen y la igualamos a 4 para obtener los puntos pedidos.

$$\left. \begin{array}{l} Q(1,1+\lambda,1-\lambda) \\ O(0,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = (1,1+\lambda,1-\lambda) - (0,0,0) = (1,1+\lambda,1-\lambda)$$

$$d(O, Q) = 4 \Rightarrow |\overrightarrow{OQ}| = 4 \Rightarrow \sqrt{1^2 + (1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+1+\lambda^2 + 2\lambda + 1+\lambda^2 - 2\lambda} = 4 \Rightarrow \sqrt{3+2\lambda^2} = 4 \Rightarrow 3+2\lambda^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 = 13 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{13}{2} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{\pm\sqrt{26}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_1 \left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2} \right) \\ Q_2 \left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2} \right) \end{array} \right.$$

Existen dos puntos que cumplen lo pedido: $Q_1\left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right)$ y

$$Q_2\left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right).$$

3.2.3 La recta s tiene como vector director $\vec{v}_s = (0, 1, -1)$ y el eje Z tiene ecuaciones paramétricas

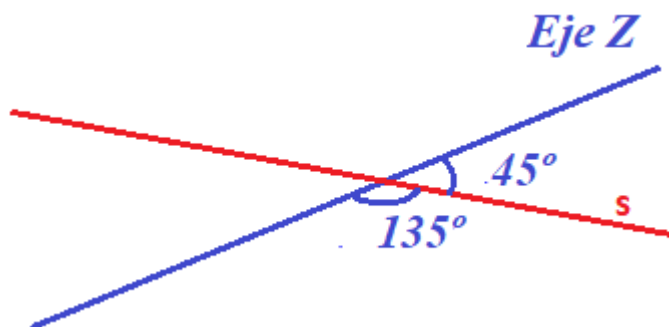
$$\text{Eje } Z : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \text{ y un vector director puede ser } \vec{u} = (0, 0, 1). \text{ Hallamos el ángulo formado}$$

por las dos rectas que será el formado por sus vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (0, 0, 1) \\ \vec{v}_s = (0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}_s) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_s}{|\vec{u}| |\vec{v}_s|} = \frac{(0, 0, 1)(0, 1, -1)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}_s) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ$$

El ángulo formado por la recta s y el eje Z es de $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radianes.



4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f .

4.1.1 La función es racional y su denominador no se anula para ningún valor real. El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

La función es continua en todo su dominio.

4.1.2 Asíntota vertical $x = a$

Su dominio son todos los números reales y no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

Hallamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = \begin{cases} \frac{2+\sqrt{8}}{-2} = \boxed{-1-\sqrt{2} \approx -2.4 = x} \\ \frac{2-\sqrt{8}}{-2} = \boxed{-1+\sqrt{2} \approx 0.4 = x} \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ tomamos el valor $x = -10$ y la derivada vale

$$f'(-10) = \frac{-(-10)^2 - 2(-10) + 1}{((-10)^2 + 1)^2} = \frac{-79}{101^2} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1-\sqrt{2}).$$

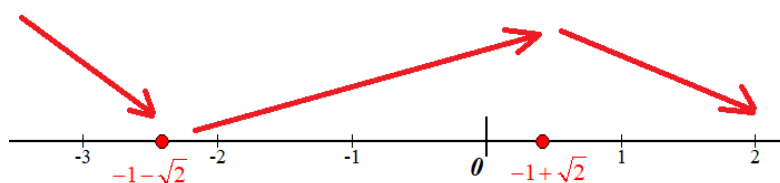
- En el intervalo $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ tomamos el valor $x=0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{-0^2 - 2 \cdot 0 + 1}{(0^2 + 1)^2} = 1 > 0. \text{ La función crece en } (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}).$$

- En el intervalo $(-1+\sqrt{2}, +\infty)$ tomamos el valor $x=10$ y la derivada vale

$$f'(10) = \frac{-10^2 - 2 \cdot 10 + 1}{(10^2 + 1)^2} = \frac{-119}{101^2} < 0. \text{ La función decrece en } (-1+\sqrt{2}, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, +\infty)$ y crece en $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$.

4.1.3 Por el esquema anterior podemos afirmar que la función tiene un mínimo relativo en $x = -1-\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $x = -1+\sqrt{2}$.

Comparamos el valor de la función en $-\infty$, en $x = -1-\sqrt{2}$, $x = -1+\sqrt{2}$ y en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{1+0} = 0 \text{ en los extremos la}$$

función se aproxima a 0.

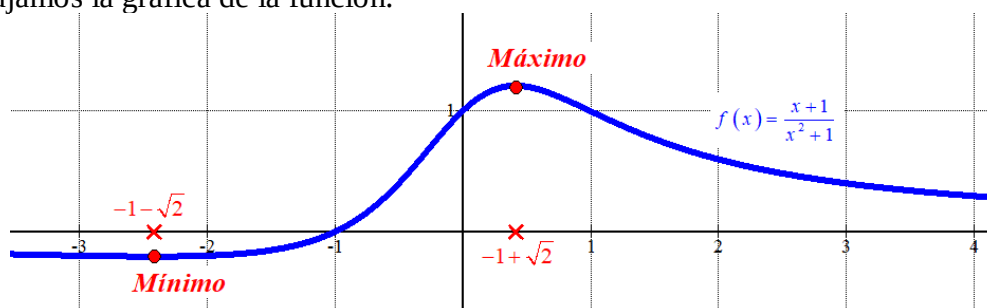
$$f(-1-\sqrt{2}) = \frac{-1-\sqrt{2}+1}{(-1-\sqrt{2})^2+1} = \frac{-\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1} = \frac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \approx -0.2$$

$$f(-1+\sqrt{2}) = \frac{-1+\sqrt{2}+1}{(-1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1.2$$

El mínimo relativo y absoluto de la función tiene coordenadas $\left(-1-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$.

El máximo relativo y absoluto de la función tiene coordenadas $\left(-1+\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

4.1.4 Dibujamos la gráfica de la función.



4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2.$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$.

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la parte verde?

4.2.1 Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \\ \text{Eje } X \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = -2 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \\ \text{Eje } Y \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3$$

La gráfica solo corta el eje Y en el punto A(0, 3).

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{9} = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \in [0,12] \\ \frac{\pi x}{9} = \pi \rightarrow \boxed{x=9} \in [0,12] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $[0,9)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale

$$f'(3) = -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{9}\right) = -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0. \text{ La función decrece en } [0,9).$$

- En el intervalo $(9,12]$ tomamos $x=10$ y la derivada vale $f'(10) = -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{9}\right) > 0$. La función crece en $(9,12]$.

La función decrece en $[0,9)$ y crece en $(9,12]$.

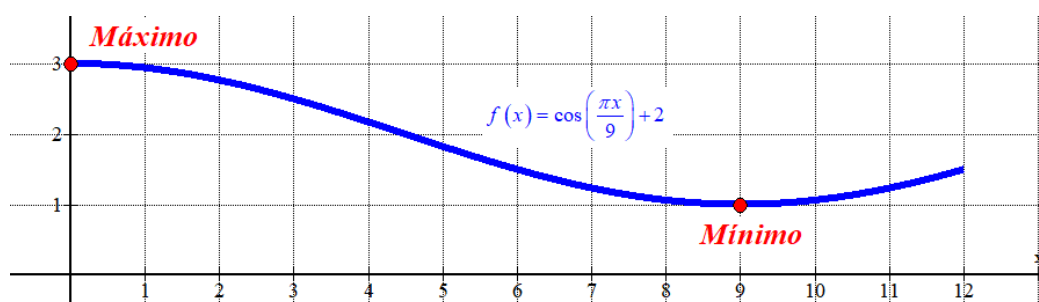
La función tiene un mínimo relativo y absoluto en $x = 9$. Como

$$f(9) = \cos\left(\frac{9\pi}{9}\right) + 2 = \cos(\pi) + 2 = -1 + 2 = 1 \text{ las coordenadas del mínimo son } (9, 1).$$

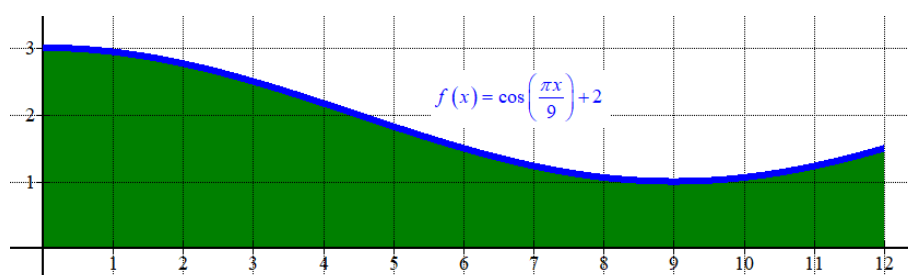
Valoramos la función en sus extremos de definición para establecer su valor máximo.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3 \\ f(12) &= \cos\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2 = 1.5 \end{aligned} \right\}$$

El máximo absoluto de la función tiene coordenadas (0,3).



4.2.2 Hallamos el área de la zona de la pared que se va a pintar de verde.



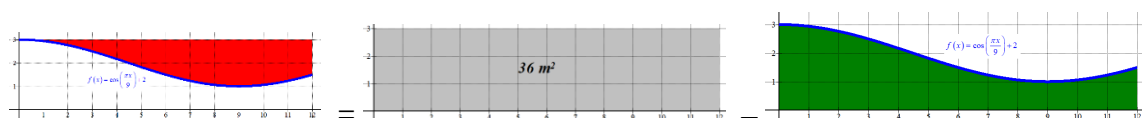
El área es el valor de la integral definida de 0 a 12 de la función.

$$\text{Área verde} = \int_0^{12} f(x) dx = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 dx = \left[\frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x \right]_0^{12} =$$

$$= \left[\frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 24 \right] - \left[\frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 \cdot 0 \right] = \frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 24 = \boxed{24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21.52 \text{ m}^2}$$

De verde se pintan $24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21.52 \text{ m}^2$. Como el área total de la pared es de $3 \cdot 12 = 36$

metros cuadrados, de rojo se pintan $36 - \left(24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}\right) = 12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 14.48 \text{ m}^2$.



4.2.3 La parte verde tiene una superficie de 21.52 metros cuadrados. Con cada bote se pintan 3 metros cuadrados, entonces necesitamos $\frac{21.52}{3} = 7.17$ botes.

Para poder pintar la parte verde hacen falta 8 botes de pintura, sobrando un poco de pintura.