



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE
ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones

- Duración: 1 hora y 30 minutos.
- Esta prueba consta de 4 ejercicios.
- En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
- En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
- La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ -1 & m & 2 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- (0.75 puntos)** Calcule los valores de m para que el rango de la matriz A sea 3.
- (1.75 puntos)** Para $m=1$, resuelva la ecuación matricial $A^t \cdot X - B^2 = 2 \cdot X$.
- (0.5 puntos)** ¿Es posible encontrar una matriz D que satisfaga $C^t \cdot A = B \cdot D$?

EJERCICIO 2 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Los ingresos (en miles de euros) de una empresa que opera en mercados financieros en los últimos años vienen dados por la función

$$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 - 30t + 80; \quad 1 \leq t \leq 6$$

siendo t el tiempo medido en años.

- (0.75 puntos)** Determine los intervalos de tiempo en los que los ingresos aumentaron y los intervalos en los que disminuyeron.
- (0.75 puntos)** Calcule los momentos en los que la empresa obtuvo el mayor y el menor ingreso, así como los valores correspondientes.
- (1.5 puntos)** Estudie la evolución de los ingresos de la empresa, obteniendo sus puntos de inflexión, realizando su gráfica e interpretándola.

B) El coste en euros de producción de x toneladas de un determinado producto en una factoría es

$$C(x) = 0.2x^2 + 40x + 5000$$

El ingreso por venta es de 150 euros por tonelada. Se vende todo lo que se produce.

- (0.25 puntos)** Calcule la función $B(x)$ que expresa el beneficio obtenido al vender x toneladas del producto.
- (1 punto)** Halle la cantidad de toneladas de producto que debe venderse para maximizar el beneficio. Obtenga dicho beneficio.
- (1.25 puntos)** Obtenga el beneficio cuando no hay producción y calcule para qué valores de la producción el beneficio es positivo. ¿Para qué producción se obtiene un beneficio de 4000 €?
- (0.5 puntos)** Estudie cuando los beneficios van aumentando y cuándo van disminuyendo.

EJERCICIO 3 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Una urna contiene bolas de tres colores, siendo el 30% rojas, el 20% blancas y el resto azules. Algunas bolas están premiadas: de cada 4 bolas rojas 1 contiene un premio de 20 €, de cada 2 bolas blancas 1 contiene un premio de 10 €, todas las bolas azules tienen premio (de cada 3 bolas azules 2 contienen un premio de 20 € y el resto contiene un premio de 10 €). Si se extrae una bola al azar, calcule la probabilidad de que:

- a) **(0.75 puntos)** La bola contenga 20 € de premio.
- b) **(0.5 puntos)** La bola sea blanca o no contenga premio.
- c) **(0.75 puntos)** La bola no contenga premio, sabiendo que no es azul.

B) Con el propósito de estudiar el precio medio del litro de gasoil en una provincia andaluza un determinado día, se seleccionan al azar 16 estaciones de servicio, obteniéndose que el precio medio del litro de gasoil es 1.458 €. Se sabe que el precio del litro de gasoil en esa provincia sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 0.08 €.

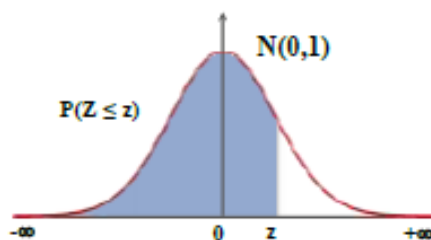
- a) **(1 punto)** Calcule un intervalo con un nivel de confianza del 97.5% para estimar el precio medio del litro de gasoil en dicha provincia. ¿Qué error máximo de estimación se obtiene?
- b) **(1 punto)** Suponiendo que el precio medio del litro de gasoil en esa provincia es de 1.44 € y considerando muestras aleatorias de 7 estaciones de servicio, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria precio medio muestral del litro de gasoil? ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio muestral del litro de gasoil en esa provincia esté comprendido entre 1.383 € y 1.4523 €?

EJERCICIO 4

Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio de los que se sabe que

$$P(A \cap B^c) = 0.3; \quad P(A^c) = 0.35; \quad P(B) = 0.55$$

- a) Calcule la probabilidad de que;
 - i) **(0.75 puntos)** Suceda al menos uno de ellos.
 - ii) **(0.5 puntos)** Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.
- b) Se realiza este experimento aleatorio 11 veces, calcule:
 - i) **(0.5 puntos)** La probabilidad de que el suceso B ocurra exactamente 8 veces.
 - ii) **(0.25 puntos)** El número esperado de veces que ocurre el suceso B.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$ 

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984
2,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994
3,0	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,2	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,3	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,4	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,6	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ -1 & m & 2 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- a) **(0.75 puntos)** Calcule los valores de m para que el rango de la matriz A sea 3.
 b) **(1.75 puntos)** Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial $A^t \cdot X - B^2 = 2 \cdot X$.
 c) **(0.5 puntos)** ¿Es posible encontrar una matriz D que satisfaga $C^t \cdot A = B \cdot D$?

- a) Para que el rango de la matriz A (cuadrada de orden 3) sea 3 su determinante debe ser distinto de cero. Obtenemos la expresión del determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ -1 & m & 2 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m + 0 + 0 - 0 + m - 4m = -m$$

El rango de la matriz A es 3 cuando m es distinto de 0.

- b) Despejamos X en la ecuación matricial planteada.

$$A^t \cdot X - 2 \cdot X = B^2 \Rightarrow (A^t - 2I)X = B^2 \Rightarrow X = (A^t - 2I)^{-1} B^2$$

Para $m = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallamos la inversa de la matriz $A^t - 2I$.

$$A^t - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A^t - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = -1 \neq 0$$

$$(A^t - 2I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A^t - 2I)^T\right)}{|A^t - 2I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A^t - 2I)^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Terminamos de hallar la matriz X.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0 & 2+2 \\ 1 & 1 & 1+1 \\ 1+1 & 0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^t - 2I)^{-1} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1+2 & 1 & 4+2+3 \\ -3 & 0 & -4 \\ -6-2 & 0 & -8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ -3 & 0 & -4 \\ -8 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ -3 & 0 & -4 \\ -8 & 0 & -11 \end{pmatrix}$.

c) Nos planteamos si es posible realizar los productos indicados en $C^t \cdot A = B \cdot D$.

$$\begin{array}{ccc} C^t \cdot A & = & B \cdot D \\ 1 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 3 & & 3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 \times 3 & \neq & 3 \times 3 \end{array}$$

Si es posible realizar los productos $C^t \cdot A$ y $B \cdot D$, pero las matrices que se obtienen al realizar dichos productos son de distintas dimensiones: la matriz $C^t \cdot A$ tiene 1 fila y la matriz $B \cdot D$ tiene 3 filas. No es posible resolver la igualdad planteada.

EJERCICIO 2

A) Los ingresos (en miles de euros) de una empresa que opera en mercados financieros en los últimos años vienen dados por la función

$$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 - 30t + 80; \quad 1 \leq t \leq 6$$

siendo t el tiempo medido en años.

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de tiempo en los que los ingresos aumentaron y los intervalos en los que disminuyeron.

b) **(0.75 puntos)** Calcule los momentos en los que la empresa obtuvo el mayor y el menor ingreso, así como los valores correspondientes.

c) **(1.5 puntos)** Estudie la evolución de los ingresos de la empresa, obteniendo sus puntos de inflexión, realizando su gráfica e interpretándola.

a) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 - 30t + 80 \Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 21t - 30$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 21t - 30 = 0 \Rightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5=t} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2=t} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos $t = 2$ y $t = 5$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = -3 \cdot 1.5^2 + 21 \cdot 1.5 - 30 = -5.25 < 0. \text{ La función decrece en } [1, 2).$$

- En el intervalo $(2, 5)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = -3 \cdot 3^2 + 21 \cdot 3 - 30 = 6 > 0. \text{ La función crece en } (2, 5).$$

- En el intervalo $(5, 6]$ tomamos $x = 5.5$ y la derivada vale

$$f'(5.5) = -3 \cdot 5.5^2 + 21 \cdot 5.5 - 30 = -5.25 < 0. \text{ La función decrece en } (5, 6].$$

Los ingresos aumentaron del segundo al quinto año. Disminuyeron del primero al segundo y del quinto al sexto año.

b) Por lo estudiado en el apartado anterior podemos afirmar que la función tiene un mínimo relativo en $t = 2$ y un máximo relativo en $t = 5$.

Valoramos la función en estos valores y en los extremos del intervalo de definición para establecer el máximo y el mínimo absoluto.

$$f(1) = -1^3 + \frac{21}{2} \cdot 1^2 - 30 \cdot 1 + 80 = 59.5$$

$$f(2) = -2^3 + \frac{21}{2} \cdot 2^2 - 30 \cdot 2 + 80 = 54 \text{ Mínimo}$$

$$f(5) = -5^3 + \frac{21}{2} \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 80 = 67.5 \text{ Máximo}$$

$$f(6) = -6^3 + \frac{21}{2} \cdot 6^2 - 30 \cdot 6 + 80 = 62$$

Los ingresos mínimos son de 54000 euros y se obtienen al cabo de los 2 años.

Los ingresos máximos son de 67500 euros y se obtienen al cabo de los 5 años.

c) Hallamos la segunda derivada y averiguamos cuando se anula.

$$f'(t) = -3t^2 + 21t - 30 \Rightarrow f''(t) = -6t + 21$$

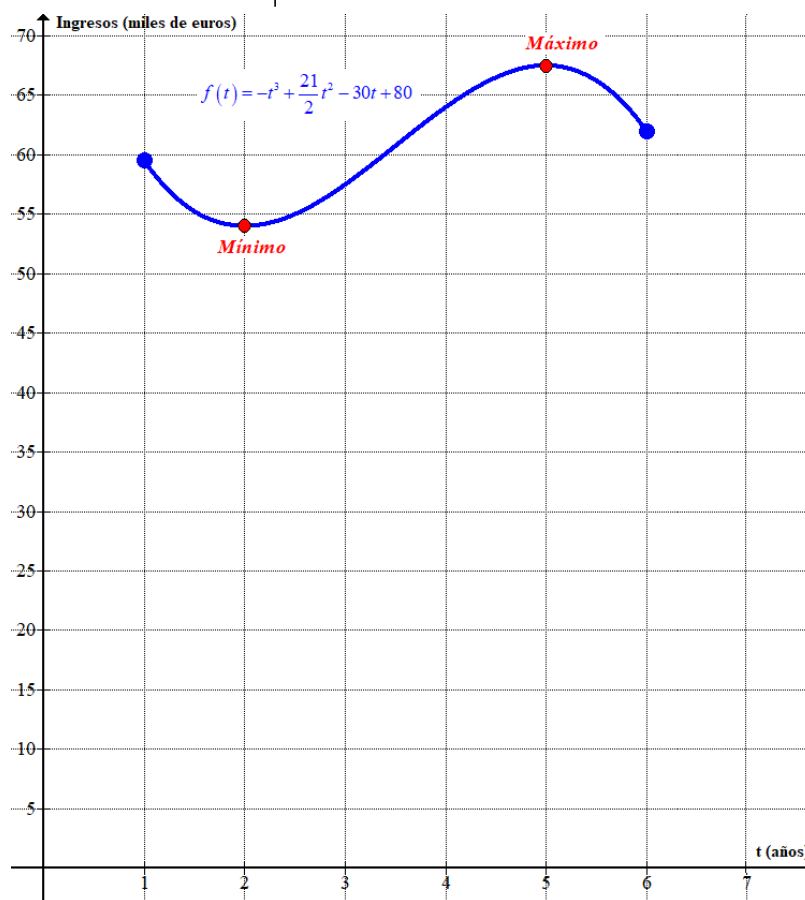
$$f''(t) = 0 \Rightarrow -6t + 21 = 0 \Rightarrow 6t = 21 \Rightarrow t = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$f'''(t) = -6 \Rightarrow f'''(3.5) = -6 \neq 0$$

En $t = 3.5$ la segunda derivada se anula y la tercera toma un valor distinto de cero. La función presenta un punto de inflexión en $t = 3.5$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 - 30t + 80$
1	59.5
2	54
3	57.5
3.5	60.75
5	67.5
6	62



Los ingresos comenzaron disminuyendo los dos primeros años, alcanzando un valor mínimo de 54000 euros. Luego aumentaron hasta alcanzar un valor máximo de 67500 euros en el quinto año, volviendo a disminuir del quinto al sexto año. A los 3 años y medio hubo un cambio de tendencia y el aumento disminuyó de intensidad.

EJERCICIO 2

B) El coste en euros de producción de x toneladas de un determinado producto en una factoría es

$$C(x) = 0.2x^2 + 40x + 5000$$

El ingreso por venta es de 150 euros por tonelada. Se vende todo lo que se produce.

a) **(0.25 puntos)** Calcule la función $B(x)$ que expresa el beneficio obtenido al vender x toneladas del producto.

b) **(1 punto)** Halle la cantidad de toneladas de producto que debe venderse para maximizar el beneficio. Obtenga dicho beneficio.

c) **(1.25 puntos)** Obtenga el beneficio cuando no hay producción y calcule para qué valores de la producción el beneficio es positivo. ¿Para qué producción se obtiene un beneficio de 4000 €?

d) **(0.5 puntos)** Estudie cuando los beneficios van aumentando y cuándo van disminuyendo.

a) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y el coste.

$$B(x) = I(x) - C(x) = 150x - (0.2x^2 + 40x + 5000) = -0.2x^2 + 110x - 5000$$

El beneficio obtenido al vender x toneladas del producto viene dado por la expresión

$$B(x) = -0.2x^2 + 110x - 5000.$$

b) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$B(x) = -0.2x^2 + 110x - 5000 \Rightarrow B'(x) = -0.4x + 110$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -0.4x + 110 = 0 \Rightarrow 0.4x = 110 \Rightarrow x = \frac{110}{0.4} = 275$$

Sustituimos $x = 275$ en la segunda derivada.

$$B'(x) = -0.4x + 110 \Rightarrow B''(x) = -0.4 \Rightarrow B''(275) = -0.4 < 0$$

Para $x = 275$ se anula la derivada de la función y la segunda derivada toma valor negativo. La función tiene un máximo relativo en $x = 275$.

Como $B(275) = -0.2 \cdot 275^2 + 110 \cdot 275 - 5000 = 10125$ el beneficio máximo que se puede obtener es de 10125 euros con la producción de 275 toneladas de producto.

c) Nos piden determinar $B(0)$.

$$B(0) = -0.2 \cdot 0^2 + 110 \cdot 0 - 5000 = -5000$$

Sin producción se producen unas pérdidas de 5000 euros.

Hallamos cuando el beneficio es nulo.

$$\begin{aligned} B(x) = 0 &\Rightarrow -0.2x^2 + 110x - 5000 = 0 \Rightarrow x^2 - 550 + 25000 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{550 \pm \sqrt{(-550)^2 - 4 \cdot 25000}}{2} = \frac{550 \pm 450}{2} = \begin{cases} \frac{550 + 450}{2} = \boxed{500 = x} \\ \frac{550 - 450}{2} = \boxed{50 = x} \end{cases} \end{aligned}$$

El beneficio es nulo para una producción de 50 o de 500 toneladas.

Analizamos que pasa antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(0, 50)$ consideramos $x=10$ y el beneficio es

$$B(10) = -0.2 \cdot 10^2 + 110 \cdot 10 - 5000 = -3920 < 0. \text{ El beneficio es negativo en } (0, 50).$$

- En el intervalo $(50, 500)$ consideramos $x=100$ y el beneficio es

$$B(100) = -0.2 \cdot 100^2 + 110 \cdot 100 - 5000 = 4000 > 0. \text{ El beneficio es positivo en } (50, 500)$$

- En el intervalo $(500, +\infty)$ consideramos $x=1000$ y el beneficio es

$$B(1000) = -0.2 \cdot 1000^2 + 110 \cdot 1000 - 5000 = -95000 < 0. \text{ El beneficio es negativo en } (500, +\infty).$$

El beneficio es positivo para una producción entre 50 y 500 toneladas.

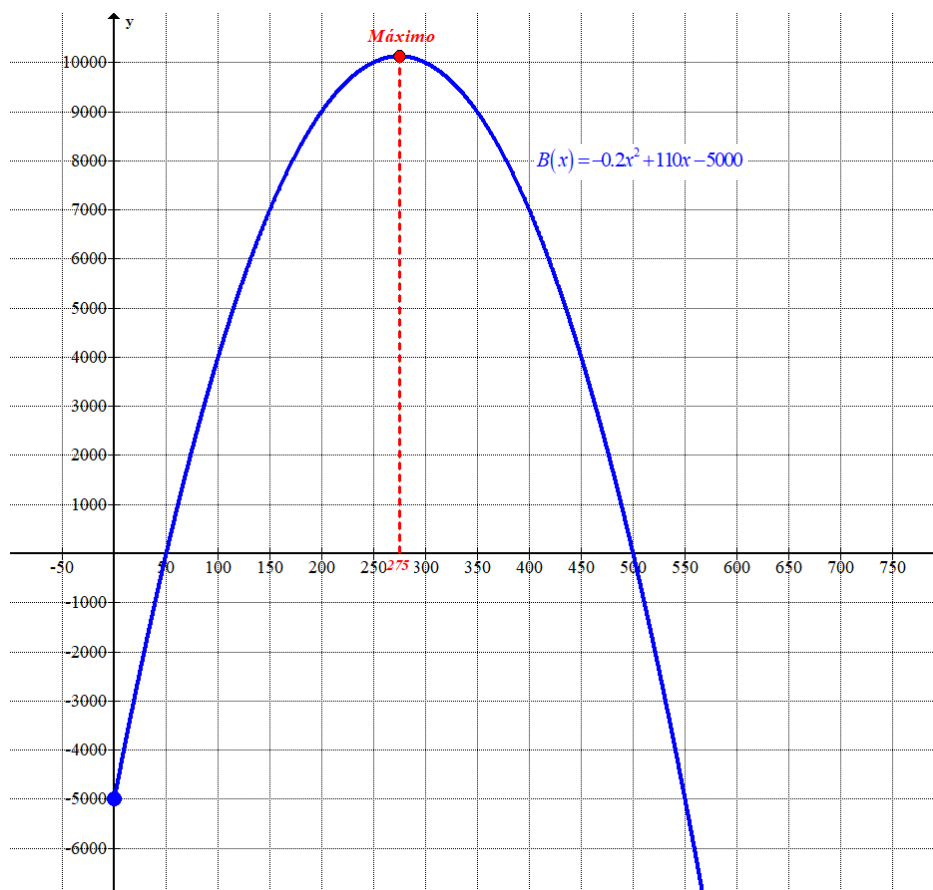
¿Para qué producción se obtiene un beneficio de 4000 €?

$$B(x) = 4000 \Rightarrow -0.2x^2 + 110x - 5000 = 4000 \Rightarrow -0.2x^2 + 110x - 9000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 550x + 45000 = 0 \Rightarrow x = \frac{550 \pm \sqrt{(-550)^2 - 4 \cdot 45000}}{2} = \frac{550 \pm 350}{2} = \begin{cases} \frac{550 + 350}{2} = 450 \\ \frac{550 - 350}{2} = 100 \end{cases}$$

Con una producción de 100 o 450 toneladas se obtiene un beneficio de 4000 €.

- d) Hemos visto en el primer apartado que con la producción de 275 toneladas se obtiene el máximo beneficio. El beneficio aumenta para una producción entre 0 y 275 toneladas y disminuye para una producción superior a 275 toneladas.



EJERCICIO 3

A) Una urna contiene bolas de tres colores, siendo el 30% rojas, el 20% blancas y el resto azules. Algunas bolas están premiadas: de cada 4 bolas rojas 1 contiene un premio de 20 €, de cada 2 bolas blancas 1 contiene un premio de 10 €, todas las bolas azules tienen premio (de cada 3 bolas azules 2 contienen un premio de 20 € y el resto contiene un premio de 10 €). Si se extrae una bola al azar, calcule la probabilidad de que:

- a) **(0.75 puntos)** La bola contenga 20 € de premio.
 b) **(0.5 puntos)** La bola sea blanca o no contenga premio.
 c) **(0.75 puntos)** La bola no contenga premio, sabiendo que no es azul.

Pasamos estos datos porcentuales a valores absolutos considerando una cantidad concreta de bolas contenidas en la urna. Los resultados serán independientes de la cifra elegida. Consideramos una cifra que nos dé resultados enteros, por ejemplo 3000 bolas.

Si el 30% rojas, el 20% blancas y el resto azules entonces tendremos en la urna $0.3 \cdot 3000 = 900$ bolas rojas, $0.2 \cdot 3000 = 600$ blancas y $3000 - 900 - 600 = 1500$ azules.

De cada 4 bolas rojas 1 contiene un premio de 20 € $\rightarrow \frac{900}{4} = 225$ bolas rojas contienen un premio de 20 €.

De cada 2 bolas blancas 1 contiene un premio de 10 € $\rightarrow \frac{600}{2} = 300$ bolas blancas contienen un premio de 10 €.

Todas las bolas azules tienen premio (de cada 3 bolas azules 2 contienen un premio de 20 € y el resto contiene un premio de 10 €) $\rightarrow \frac{2}{3} \cdot 1500 = 1000$ bolas azules tienen un premio de 20 € y $1500 - 1000 = 500$ bolas azules tienen un premio de 10 €.

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	Premio de 10 €	Premio de 20 €	Sin premio	TOTALES
Bolas rojas	0	225		900
Bolas blancas	300	0		600
Bolas azules	500	1000		1500
TOTALES				3000

Completamos la tabla.

	Premio de 10 €	Premio de 20 €	Sin premio	TOTALES
Bolas rojas	0	225	675	900
Bolas blancas	300	0	300	600
Bolas azules	500	1000	0	1500
TOTALES	800	1225	975	3000

Respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

- a) De las 3000 bolas de la urna hay 1225 con un premio de 20 €. La probabilidad de que la bola elegida al azar tenga un premio de 20 € vale $\frac{1225}{3000} = \frac{49}{120} \approx 0.4083$.

- b) De las 3000 bolas de la urna hay 600 bolas blancas y 675 rojas sin premio. La probabilidad de que la bola elegida al azar sea blanca o no contenga premio vale $\frac{600 + 675}{3000} = \frac{1275}{3000} = \frac{17}{40} = 0.425$.

- c) En la urna hay 900 bolas rojas y 600 blancas. Hay $900 + 600 = 1500$ bolas que no son azules. Hay 675 bolas rojas sin premio y 300 bolas blancas sin premio. La probabilidad de que la bola elegida al azar que sabemos que no es azul no contenga un premio vale
- $$\frac{675+300}{1500} = \frac{13}{20} = 0.65.$$

EJERCICIO 3

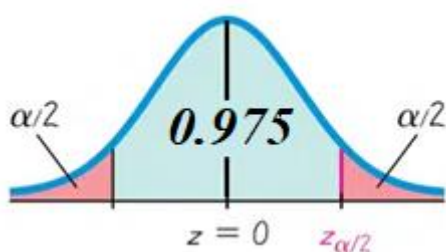
B) Con el propósito de estudiar el precio medio del litro de gasoil en una provincia andaluza un determinado día, se seleccionan al azar 16 estaciones de servicio, obteniéndose que el precio medio del litro de gasoil es 1.458 €. Se sabe que el precio del litro de gasoil en esa provincia sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 0.08 €.

- a) **(1 punto)** Calcule un intervalo con un nivel de confianza del 97.5% para estimar el precio medio del litro de gasoil en dicha provincia. ¿Qué error máximo de estimación se obtiene?
- b) **(1 punto)** Suponiendo que el precio medio del litro de gasoil en esa provincia es de 1.44 € y considerando muestras aleatorias de 7 estaciones de servicio, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria precio medio muestral del litro de gasoil? ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio muestral del litro de gasoil en esa provincia esté comprendido entre 1.383 € y 1.4523 €?

a) Consideramos $X =$ el precio del litro de gasoil en una provincia andaluza. $X = N(\mu, 0.08)$

El tamaño de la muestra es $n = 16$ y la media muestral es $\bar{x} = 1,458$ €/l.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 97.5%.



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875

$$1 - \alpha = 0.975 \rightarrow \alpha = 0.025 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0125 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9875 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.24$$

Hallamos el error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.24 \cdot \frac{0.08}{\sqrt{16}} = 0.0448$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (1.458 - 0.0448, 1.458 + 0.0448) = (1.4132, 1.5028)$$

- b) La variable aleatoria $X =$ el precio del litro de gasoil en una provincia andaluza sigue una distribución normal: $X = N(1.44, 0.08)$. La variable aleatoria precio medio muestral del

litro de gasoil en muestras de tamaño 7 sigue una distribución normal con la misma media que la variable X y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.08}{\sqrt{7}} \approx 0.03$ euros. $\bar{X}_7 = N(1.44, 0.03)$

Debemos calcular $P(1.383 \leq \bar{X}_7 \leq 1.4523)$.

$$P(1.383 \leq \bar{X}_7 \leq 1.4523) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\bar{X}_7 - 1.44}{0.03} \end{array} \right\} = P\left(\frac{1.383 - 1.44}{0.03} \leq Z \leq \frac{1.4523 - 1.44}{0.03}\right) =$$

$$= P(-1.9 \leq Z \leq 0.41) = P(Z \leq 0.41) - P(Z \leq -1.9) = P(Z \leq 0.41) - P(Z \geq 1.9) =$$

$$= P(Z \leq 0.41) - [1 - P(Z \leq 1.9)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6591 - 1 + 0.9713 = \boxed{0.6304}$$

z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665
1,2	0,8849	0,8869
1,3	0,9032	0,9049
1,4	0,9192	0,9207
1,5	0,9332	0,9345
1,6	0,9452	0,9463
1,7	0,9554	0,9564
1,8	0,9641	0,9649
1,9	0,9713	0,9719

La probabilidad de que el precio medio muestral (en muestras de 7 estaciones de servicio) del litro de gasoil en esa provincia esté comprendido entre 1.383 € y 1.4523 € vale 0.6304.

EJERCICIO 4

Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio de los que se sabe que

$$P(A \cap B^c) = 0.3; \quad P(A^c) = 0.35; \quad P(B) = 0.55$$

a) Calcule la probabilidad de que;

i) **(0.75 puntos)** Suceda al menos uno de ellos.

ii) **(0.5 puntos)** Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.

b) Se realiza este experimento aleatorio 11 veces, calcule:

i) **(0.5 puntos)** La probabilidad de que el suceso B ocurra exactamente 8 veces.

ii) **(0.25 puntos)** El número esperado de veces que ocurre el suceso B.

a.i) Nos piden calcular $P(A \cup B)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.35 = 0.65$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c) = 0.65 - 0.3 = 0.35$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.65 + 0.55 - 0.35 = \boxed{0.85}$$

La probabilidad de que suceda al menos uno de ellos vale 0.85.

a.ii) Debemos calcular $P(B / A^c)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B / A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(A^c)} = \frac{0.55 - 0.35}{0.35} = \boxed{\frac{4}{7} \approx 0.5714}$$

La probabilidad de que ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A vale 0.5714.

b.i) Consideramos la variable X = Número de veces que ocurre el suceso B en 11 repeticiones del experimento. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 11$ y p = probabilidad de que ocurra B = 0.55. $X = B(11, 0.55)$.

Debemos calcular $P(X = 8)$.

$$P(X = 8) = \binom{11}{8} 0.55^8 \cdot 0.45^3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} \cdot 0.55^8 \cdot 0.45^3 = 165 \cdot 0.55^8 \cdot 0.45^3 = \boxed{0.1259}$$

La probabilidad de que en 11 repeticiones del experimento el suceso B ocurra exactamente 8 veces vale 0.1259.

b.ii) El número esperado de veces que ocurre el suceso B es el valor de $n \cdot p = 11 \cdot 0.55 = 6.05$. Se espera que ocurra 6 veces.