



Universidad
Zaragoza

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2026

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta deberán elegirse solo DOS de las TRES cuestiones planteadas. En caso de responder a las tres, solo se corregirán las dos que aparezcan contestadas en primer lugar.

Cada ejercicio del examen es independiente y se califica sobre 10 puntos. Las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos cada una), que se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Las respuestas deben expresarse de forma razonada, mostrando con rigor y precisión el proceso seguido en la resolución. Se deberá emplear el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, así como argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin llevar a cabo de manera efectiva la resolución, no será suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta.

1.- (10 puntos) Una promotora organiza un festival con dos tipos de actuaciones: grupos internacionales y grupos locales. Cada grupo internacional emplea cuatro horas de actuación en escenario y dos horas para pruebas de sonido, mientras que cada grupo local emplea una hora de actuación en escenario y una hora de pruebas de sonido. En total, la organización dispone de veinticuatro horas de escenario y dieciocho horas de pruebas de sonido. La promotora pretende realizar al menos 6 actuaciones en total (internacionales y locales). La recaudación estimada es de ocho mil euros por cada grupo internacional y de tres mil euros por cada grupo local.

a.- (8 puntos) Determine la combinación óptima de grupos internacionales y locales que maximiza la recaudación cumpliendo todas las restricciones del enunciado. ¿Cuál es la recaudación máxima?

b.- (2 puntos) Si la recaudación por cada grupo local fuese de 4.000 euros, determine todas las soluciones óptimas enteras en la nueva situación. ¿Sería razonable programar solo grupos locales? Justifique la respuesta.

2.- (10 puntos) La promotora que organiza el festival ha estudiado datos de ediciones anteriores y ha construido un modelo matemático que aproxima el comportamiento de los compradores. Según este modelo, el número de entradas vendidas para un concierto $E(p)$, expresado en decenas, depende del precio (p) en euros de la siguiente forma:

$$E(p) = \frac{2000p}{25 + p^2}$$

a.- (6 puntos) Determine el precio al que se deben vender las entradas para que el número vendido sea un máximo relativo, indicando cuántas se venderían en ese caso. Calcule, además, el beneficio neto que obtendría la promotora, en euros, suponiendo que todas las entradas se vendiesen a dicho precio y que cada una tiene un coste fijo de 1 € para la promotora (gastos de organización, personal, etc.).

b.- (4 puntos) Calcule el valor de:

$$\int_5^{15} \frac{2000p}{25 + p^2} dp$$

- 3.- (10 puntos)** La promotora del festival, antes de cerrar la contratación de los grupos que formarán parte del cartel, decide realizar una encuesta entre las personas que ya han reservado su sitio en el evento, con el objetivo de conocer a qué tipos de conciertos asistirán.
- a.- (6 puntos)** En una muestra aleatoria simple de 400 personas, 260 declaran que acudirán a los conciertos de rock. Calcule un intervalo de confianza al 94% para la proporción de asistentes que acudirán a los conciertos de rock. Una revista de eventos afirmó que «el 75% del público acudirá a los conciertos de rock». A partir del intervalo de confianza obtenido, determine si los datos respaldan o ponen en duda esta afirmación.
- b.- (4 puntos)** Determine el tamaño mínimo de muestra necesario para estimar la proporción de asistentes a conciertos de música country, con un nivel de confianza del 94%, un error máximo del 4% y sabiendo que, en una muestra piloto, la proporción estimada fue del 25%.

4.- (10 puntos) Elija únicamente dos opciones de las tres posibles **Q1, Q2 y Q3**.

Q1.- (5 puntos)

La promotora que organiza el festival está ajustando el presupuesto (en decenas de miles de euros) para la iluminación y el sonido de los conciertos. Estos cálculos se representan mediante una ecuación matricial de la forma $AX + B = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. La matriz A representa la planificación inicial, B es la matriz de ajustes adicionales, C es la matriz de presupuesto final y X es la matriz de gastos desconocidos. Resuelva la ecuación despejando previamente X .

Q2.- (5 puntos)

La promotora musical estudia la evolución de la función de beneficios netos (en miles de euros) del festival en función de un indicador (x) que mide la intensidad de la campaña publicitaria ($x \in [0, 3]$). Se propone el modelo $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que sin campaña (intensidad nula) el beneficio es de 8.000 euros, cuando la campaña tiene intensidad 2 el beneficio es de 16.000 euros, y que además en $x = 2$ la función tiene un punto crítico. Calcule los valores de b , c y d , para que se satisfagan las condiciones del enunciado. Justifique si en $x = 2$ la función tiene un máximo o un mínimo relativo.

Q3.- (5 puntos)

Para promocionar el festival se ofrecen tres tipos de tarifas: para estudiantes, para abonados y para el público general. El 30% usa la tarifa de estudiantes, el 50% la de abonados y el resto compra la entrada general. La probabilidad de que un asistente vuelva a otro concierto es del 6% en el caso de los estudiantes, del 80% para los abonados y del 70% para el público general. Si se seleccionan tres asistentes al azar con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que los tres vuelvan a otro concierto.

Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla,

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Una promotora organiza un festival con dos tipos de actuaciones: grupos internacionales y grupos locales. Cada grupo internacional emplea cuatro horas de actuación en escenario y dos horas para pruebas de sonido, mientras que cada grupo local emplea una hora de actuación en escenario y una hora de pruebas de sonido. En total, la organización dispone de veinticuatro horas de escenario y dieciocho horas de pruebas de sonido. La promotora pretende realizar al menos 6 actuaciones en total (internacionales y locales). La recaudación estimada es de ocho mil euros por cada grupo internacional y de tres mil euros por cada grupo local.

a.- (8 puntos) Determine la combinación óptima de grupos internacionales y locales que maximiza la recaudación cumpliendo todas las restricciones del enunciado. ¿Cuál es la recaudación máxima?

b.- (2 puntos) Si la recaudación por cada grupo local fuese de 4.000 euros, determine todas las soluciones óptimas enteras en la nueva situación. ¿Sería razonable programar solo grupos locales? Justifique la respuesta.

a.- Llamamos “x” al número de grupos internacionales e “y” al número de grupos locales. Completamos una tabla con los datos del problema.

	Horas de actuación	Horas de pruebas de sonido	Beneficio
Nº grupos internacionales (x)	$4x$	$2x$	$8000x$
Nº grupos locales (y)	y	y	$3000y$
TOTALES	$4x + y$	$2x + y$	$8000x + 3000y$

Queremos maximizar el beneficio: $B(x, y) = 8000x + 3000y$.

Las restricciones son:

“La organización dispone de veinticuatro horas de escenario y dieciocho horas de pruebas de sonido” $\rightarrow 4x + y \leq 24$; $2x + y \leq 18$.

“La promotora pretende realizar al menos 6 actuaciones en total (internacionales y locales)” $\rightarrow x + y \geq 6$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 24 \\ 2x + y \leq 18 \\ x + y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$4x + y = 24$$

x	y = 24 - 4x
0	24
3	12
6	0

$$2x + y = 18$$

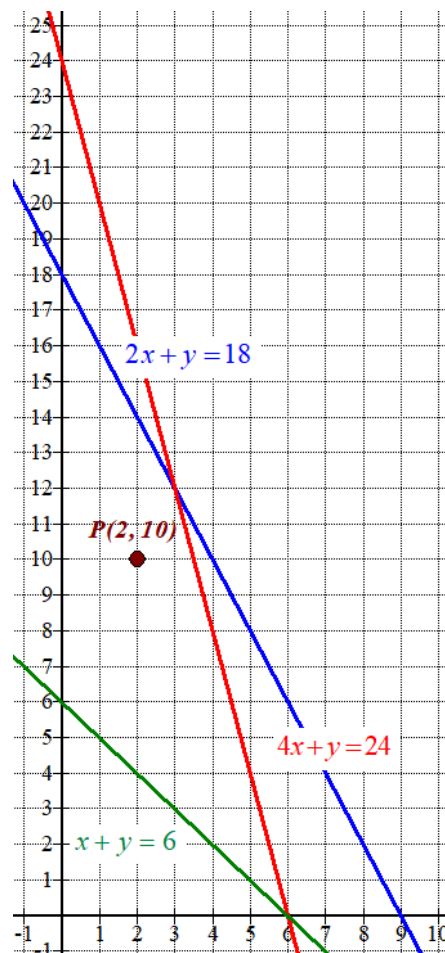
x	y = 18 - 2x
0	18
3	12
6	6

$$x + y = 6$$

x	y = 6 - x
0	6
2	4
6	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer cuadrante



Como las restricciones son

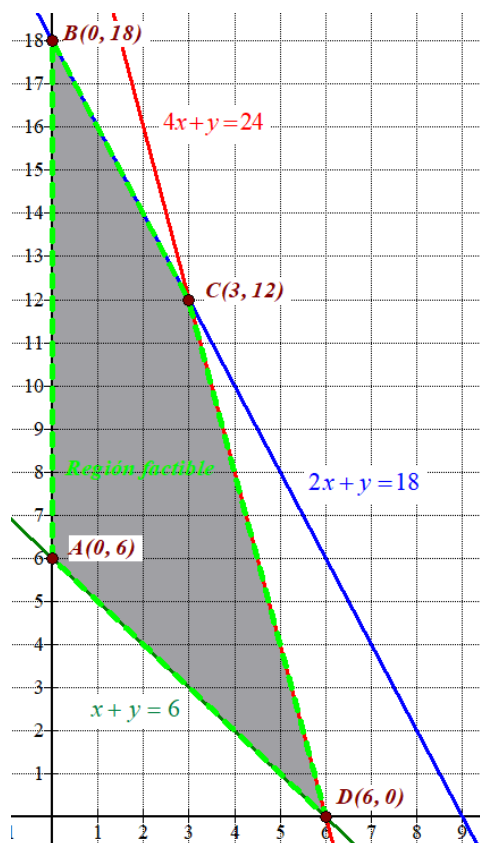
$$\left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 24 \\ 2x + y \leq 18 \\ x + y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto $P(2, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + 10 \leq 24 \\ 2 \cdot 2 + 10 \leq 18 \\ 1 + 10 \geq 6 \\ 2 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 8000x + 3000y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 6) \rightarrow B(0, 6) = 8000 \cdot 0 + 3000 \cdot 6 = 18000$$

$$B(0, 18) \rightarrow B(0, 18) = 8000 \cdot 0 + 3000 \cdot 18 = 54000$$

$$C(3, 12) \rightarrow B(3, 12) = 8000 \cdot 3 + 3000 \cdot 12 = 60000 \text{ Máximo}$$

$$D(6, 0) \rightarrow B(6, 0) = 8000 \cdot 6 + 3000 \cdot 0 = 48000$$

El valor máximo es 60000 y se obtiene en el punto C(3, 12).

Con 3 grupos internacionales y 12 grupos locales se cumplen las restricciones con un beneficio máximo de 60000 €.

b.- Si la recaudación de un grupo local es de 4000 € la función beneficio pasa a ser $B(x, y) = 8000x + 4000y$. Valoramos esta función en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 6) \rightarrow B(0, 6) = 8000 \cdot 0 + 4000 \cdot 6 = 24000$$

$$B(0, 18) \rightarrow B(0, 18) = 8000 \cdot 0 + 4000 \cdot 18 = 72000 \text{ Máximo}$$

$$C(3, 12) \rightarrow B(3, 12) = 8000 \cdot 3 + 4000 \cdot 12 = 72000 \text{ Máximo}$$

$$D(6, 0) \rightarrow B(6, 0) = 8000 \cdot 6 + 4000 \cdot 0 = 48000$$

El valor máximo es 72000 y se obtiene en todos los puntos del segmento BC que tengan coordenadas con valores enteros: B(0, 18), E(1, 16), F(2, 14), C(3, 12).

¿Sería razonable programar solo grupos locales?

Si. Con 0 grupos internacionales y 18 grupos locales se consigue el beneficio máximo de 72000 euros.

2.- (10 puntos) La promotora que organiza el festival ha estudiado datos de ediciones anteriores y ha construido un modelo matemático que aproxima el comportamiento de los compradores. Según este modelo, el número de entradas vendidas para un concierto $E(p)$, expresado en decenas, depende del precio (p) en euros de la siguiente forma:

$$E(p) = \frac{2000p}{25 + p^2}$$

a.- (6 puntos) Determine el precio al que se deben vender las entradas para que el número vendido sea un máximo relativo, indicando cuántas se venderían en ese caso. Calcule, además, el beneficio neto que obtendría la promotora, en euros, suponiendo que todas las entradas se vendiesen a dicho precio y que cada una tiene un coste fijo de 1 € para la promotora (gastos de organización, personal, etc.).

b.- (4 puntos) Calcule el valor de:

$$\int_5^{15} \frac{2000p}{25 + p^2} dp$$

a.- Averiguamos si la derivada de la función $E(p)$ se anula.

$$E'(p) = \frac{2000(25 + p^2) - 2000p \cdot 2p}{(25 + p^2)^2} = \frac{50000 + 2000p^2 - 4000p^2}{(25 + p^2)^2} = \frac{50000 - 2000p^2}{(25 + p^2)^2}$$

$$E'(p) = 0 \Rightarrow \frac{50000 - 2000p^2}{(25 + p^2)^2} = 0 \Rightarrow 50000 - 2000p^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2000(25 - p^2) = 0 \Rightarrow 25 - p^2 = 0 \Rightarrow p^2 = 25 \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{25} = 5}$$

La función tiene un punto crítico en $p = 5$. Hemos descartado el valor negativo de la raíz de 25 pues no tiene sentido en el contexto del problema.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $p = 5$.

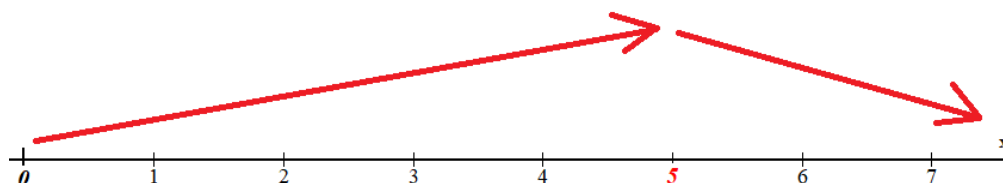
- En el intervalo $[0, 5)$ tomamos $p = 1$ y la derivada vale

$$E'(1) = \frac{50000 - 2000 \cdot 1^2}{(25 + 1^2)^2} = \frac{48000}{26^2} > 0. \text{ La función crece en } [0, 5).$$

- En el intervalo $(5, +\infty)$ tomamos $p = 10$ y la derivada vale

$$E'(10) = \frac{50000 - 2000 \cdot 10^2}{(25 + 10^2)^2} = \frac{-150000}{125^2} < 0. \text{ La función decrece en } (5, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $p = 5$.

Como $E(5) = \frac{2000 \cdot 5}{25 + 5^2} = \frac{10000}{50} = 200$ podemos afirmar que con un precio de 5 € la entrada se venderían un máximo de 2000 entradas.
 La promotora tiene un beneficio de $5 - 1 = 4$ euros por cada entrada, por lo que obtendría un beneficio de $2000 \cdot 4 = 8000$ euros.

b.- Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{2000p}{25 + p^2} dp = 1000 \int \frac{2p}{25 + p^2} dp = 1000 \ln(25 + p^2) + K$$

Calculamos la integral definida planteada.

$$\begin{aligned} \int_5^{15} \frac{2000p}{25 + p^2} dp &= \left[1000 \ln(25 + p^2) \right]_5^{15} = 1000 \ln(25 + 15^2) - 1000 \ln(25 + 5^2) = \\ &= 1000(\ln 250 - \ln 50) = 1000 \ln \frac{250}{50} = 1000 \ln 5 \approx 1609.437912 \end{aligned}$$

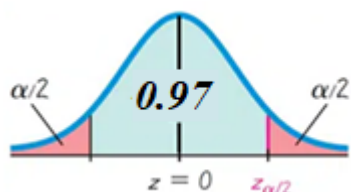
- 3.- (10 puntos)** La promotora del festival, antes de cerrar la contratación de los grupos que formarán parte del cartel, decide realizar una encuesta entre las personas que ya han reservado su sitio en el evento, con el objetivo de conocer a qué tipos de conciertos asistirán.
- a.- (6 puntos)** En una muestra aleatoria simple de 400 personas, 260 declaran que acudirán a los conciertos de rock. Calcule un intervalo de confianza al 94% para la proporción de asistentes que acudirán a los conciertos de rock. Una revista de eventos afirmó que «el 75% del público acudirá a los conciertos de rock». A partir del intervalo de confianza obtenido, determine si los datos respaldan o ponen en duda esta afirmación.
- b.- (4 puntos)** Determine el tamaño mínimo de muestra necesario para estimar la proporción de asistentes a conciertos de música country, con un nivel de confianza del 94%, un error máximo del 4% y sabiendo que, en una muestra piloto, la proporción estimada fue del 25%.

a.- La proporción de clientes que acudirán a los conciertos de rock tiene un valor de

$$p = \frac{260}{400} = 0.65 \text{ y de aquí obtenemos } q = 1 - 0.65 = 0.35.$$

Para un nivel de confianza del 94% obtenemos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$



k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9644	0,9653	0,9661	0,9669	0,9677	0,9685	0,9693	0,9699	0,9706

Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{400}} \approx 0.0448$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.65 - 0.0448, 0.65 + 0.0448) = (0.6052, 0.6948)$$

Una revista de eventos afirmó que «el 75% del público acudirá a los conciertos de rock». Esto significa una proporción de 0.75 que no pertenece al intervalo de confianza obtenido con un nivel de confianza del 94%. Los resultados obtenidos ponen en duda la afirmación.

b.- La proporción muestral de asistentes a conciertos de música country vale 0.25.

Para un nivel de confianza del 94% obtenemos $z_{\alpha/2} = 1.88$.

El error máximo es de 0.04. Utilizamos la fórmula del error para despejar n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.04 = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{1.88} = \sqrt{\frac{0.1875}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.04}{1.88} \right)^2 = \frac{0.1875}{n} \Rightarrow n = \frac{0.1875}{\left(\frac{0.04}{1.88} \right)^2} = 414.1875 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 415 personas.

Q1.- (5 puntos)

La promotora que organiza el festival está ajustando el presupuesto (en decenas de miles de euros) para la iluminación y el sonido de los conciertos. Estos cálculos se representan mediante una ecuación matricial de la forma $AX + B = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. La matriz A representa la planificación inicial, B es la matriz de ajustes adicionales, C es la matriz de presupuesto final y X es la matriz de gastos desconocidos. Resuelva la ecuación despejando previamente X .

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

Comprobamos que el determinante de A es distinto de cero y por tanto tiene matriz inversa y hallamos la expresión de su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X .

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 3 & 12 - 9 \\ 15 + 4 & -15 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 19 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 19 & -3 \end{pmatrix}$.

Q2.- (5 puntos)

La promotora musical estudia la evolución de la función de beneficios netos (en miles de euros) del festival en función de un indicador (x) que mide la intensidad de la campaña publicitaria ($x \in [0,3]$). Se propone el modelo $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que sin campaña (intensidad nula) el beneficio es de 8.000 euros, cuando la campaña tiene intensidad 2 el beneficio es de 16.000 euros, y que además en $x = 2$ la función tiene un punto crítico. Calcule los valores de b , c y d , para que se satisfagan las condiciones del enunciado. Justifique si en $x = 2$ la función tiene un máximo o un mínimo relativo.

Sin campaña (intensidad nula $\rightarrow x = 0$) el beneficio es de 8.000 euros $\rightarrow f(0) = 8$.

$$f(0) = 8 \Rightarrow 8 = 2 \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d \Rightarrow \boxed{d = 8}$$

La función queda $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + 8$.

Cuando la campaña tiene intensidad 2 el beneficio es de 16.000 euros $\rightarrow f(2) = 16$.

$$f(2) = 16 \Rightarrow 16 = 2 \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + 8 \Rightarrow 16 = 16 + 4b + 2c + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4b + 2c = -8 \Rightarrow 2b + c = -4 \Rightarrow \boxed{c = -4 - 2b}$$

En $x = 2$ la función tiene un punto crítico $\rightarrow f'(2) = 0$.

$$f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + 8 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 2bx + c$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 0 = 6 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c \Rightarrow \boxed{0 = 24 + 4b + c}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} c = -4 - 2b \\ 0 = 24 + 4b + c \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 24 + 4b - 4 - 2b \Rightarrow 0 = 20 + 2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b = -20 \Rightarrow \boxed{b = -10} \Rightarrow \boxed{c = -4 - 2(-10) = 16}$$

Los valores buscados son $b = -10$, $c = 16$ y $d = 8$.

Para estos valores la función queda $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 16x + 8$. Para averiguar si el extremo $x = 2$ es máximo o mínimo relativo sustituimos $x = 2$ en la segunda derivada.

$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 16x + 8 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 20x + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 12x - 20 \Rightarrow f''(2) = 12 \cdot 2 - 20 = 4 > 0$$

En $x = 2$ la primera derivada se anula y la segunda tiene valor positivo. La función tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

Q3.- (5 puntos)

Para promocionar el festival se ofrecen tres tipos de tarifas: para estudiantes, para abonados y para el público general. El 30% usa la tarifa de estudiantes, el 50% la de abonados y el resto compra la entrada general. La probabilidad de que un asistente vuelva a otro concierto es del 6% en el caso de los estudiantes, del 80% para los abonados y del 70% para el público general. Si se seleccionan tres asistentes al azar con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que los tres vuelvan a otro concierto.

Llamamos E a “el asistente al festival es estudiante”, A a “el asistente al festival es abonado”, G a “el asistente al festival es público general” y V a “el asistente vuelve a otro concierto”.

Nos dicen que $P(G) = 0.30$, $P(A) = 0.50$; $P(G) = 1 - 0.3 - 0.5 = 0.2$. También nos dicen

que $P(V/E) = 0.06$; $P(V/A) = 0.80$; $P(V/G) = 0.70$.

Determinamos la probabilidad de que un asistente vuelva a otro concierto, es decir, el valor de $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(V) &= P(E)P(V/E) + P(A)P(V/A) + P(G)P(V/G) = \\ &= 0.3 \cdot 0.06 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.558 \end{aligned}$$

Como la selección de los tres asistentes es con reemplazamiento la selección del primer, segundo y tercer asistente son independientes entre sí y la probabilidad de que los tres vuelvan a otro concierto es el producto de la probabilidad de que el primero vuelva a otro concierto por la probabilidad de que vuelva a otro concierto el segundo asistente elegido y por la probabilidad de que vuelva a otro concierto el tercero: $0.558^3 \approx 0.1737$.