



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

La prueba consta de tres partes: la primera no tiene diferentes opciones, y las otras dos tienen dos posibles problemas, a contestar uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero. Consultad la puntuación en cada ejercicio.

No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde)

Parte A. Conteste todos los problemas de esta parte (total 4 pt).

Problema A1. – En una región, la probabilidad de que un día determinado se inicie un incendio forestal depende de la estación del año: cada día durante el verano esta probabilidad es de 0.09, en otoño es de 0.05, en invierno es de 0.02, y en primavera es de 0.08. Escogeremos un día al azar y supondremos que la probabilidad de que la estación del año sea una u otra es la misma.

- Escogiendo un día del año al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se inicie un incendio forestal? (1 pt)
- Escogiendo un día del año al azar, considera los siguientes sucesos: A, se inicia un incendio forestal ese día; B, este día es de primavera. ¿Son los sucesos A y B independientes? (1 pt)

Problema A2. – En un estudio se sugirió que el tiempo que cada joven de una población dedica al día en las redes sociales sigue una distribución normal, de media 116 minutos y desviación típica 42 minutos.

- ¿Qué proporción de jóvenes de esta población dedica entre 100 y 200 minutos a las redes sociales? (1 pt)
- Juan es del 10% de jóvenes que más tiempo dedica a las redes sociales. ¿Cuántos minutos dedica? (1 pt)

Parte B. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema B1. – En un quirófano podemos llevar a cabo dos tipos de operaciones:

– Tipo A: Necesita 4 apósitos, 2 catéteres, y tiene una duración de 0.5 horas.

– Tipo B: Necesita 6 apósitos, 1 catéter, y tiene una duración de 1 hora.

Necesitamos realizar al menos 10 operaciones en total, y disponemos sólo de 60 apósitos y 26 catéteres. ¿Cuántas operaciones de cada tipo debemos realizar para maximizar las horas de uso del quirófano? (3 pt)

Problema B2. – Para cualquier valor del parámetro x podemos encontrar tres matrices, A, B, C, de tamaño 3×3 , de manera que siempre se satisfacen las igualdades siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = Id, \quad B \cdot (C + C) = Id$$

- ¿Para qué valores del parámetro x , $A \cdot A = Id$? (1 pt)
- Determina C en función de x . (2 pt)

Parte C. Conteste sólo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema C1.- La altura media en España se ha incrementado en los últimos 200 años por factores como la alimentación y la salud. Hace 200 años, la media en España era de 157 cm. Actualmente es de 169 cm. Aproximaremos la altura media en España con la función $f(t)$, en cm, siguiente:

$$f(t) = 169 + t \cdot m,$$

donde m es una constante desconocida y tiene la variable que indica los años que han pasado desde hoy en día. Es decir, $f(0)$ representa la altura media hoy en día, y $f(-200)$ representa la altura media hace 200 años.

- a) Calcula el valor del parámetro m . (1 pt)
- b) Según nuestra función $f(t)$, ¿cuál será la altura media de aquí a 50 años? (1 pt)
- c) Calcula $f'(0)$. ¿Qué representa este valor? (1 pt)

Problema C2.- Considera la función $f(x) = \ln(2x)$, para $x \in (0, +\infty)$.

- a) Haz una gráfica esquemática de la función $f(x)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica el valor de la función en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos y absolutos. (2 pt)
- b) Sobre la misma gráfica, traza la recta tangente a la función en el punto $x=1$. ¿Cuál es el valor de su pendiente? (1 pt)

SOLUCIONES

Problema A1. – En una región, la probabilidad de que un día determinado se inicie un incendio forestal depende de la estación del año: cada día durante el verano esta probabilidad es de 0.09, en otoño es de 0.05, en invierno es de 0.02, y en primavera es de 0.08. Escogeremos un día al azar y supondremos que la probabilidad de que la estación del año sea una u otra es la misma.

- a) Escogiendo un día del año al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se inicie un incendio forestal? (1 pt)
 b) Escogiendo un día del año al azar, considera los siguientes sucesos: A, se inicia un incendio forestal ese día; B, este día es de primavera. ¿Son los sucesos A y B independientes? (1 pt)

- a) Llamamos V a “elegir un día del verano”, O a “elegir un día del otoño”, I a “elegir un día del invierno”, P a “elegir un día de primavera” e IF a “se inicia un incendio forestal”. Con la información proporcionada podemos establecer las siguientes probabilidades:

$$P(I) = P(O) = P(P) = P(V) = \frac{1}{4} = 0.25; \quad P(IF/V) = 0.09; \quad P(IF/O) = 0.05;$$

$$P(IF/I) = 0.02; \quad P(IF/P) = 0.08.$$

Debemos calcular $P(IF)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(IF) = P(I)P(IF/I) + P(P)P(IF/P) + P(V)P(IF/V) + P(O)P(IF/O) =$$

$$= 0.25 \cdot 0.02 + 0.25 \cdot 0.08 + 0.25 \cdot 0.09 + 0.25 \cdot 0.05 = \boxed{0.06}$$

La probabilidad de que se inicie un incendio forestal es de 0.06.

- b) Por los datos proporcionados se aprecia que los sucesos no son independientes ya que hay probabilidades distintas de iniciarse un incendio dependiendo de la estación del año.

Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A/B) = P(A)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A/B) = P(IF/P) = 0.08 \\ P(A) = P(IF) = 0.06 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A/B) = 0.08 \neq 0.06 = P(A)$$

Las probabilidades no coinciden y los sucesos A y B no son independientes.

Problema A2.- En un estudio se sugirió que el tiempo que cada joven de una población dedica al día en las redes sociales sigue una distribución normal, de media 116 minutos y desviación típica 42 minutos.

- a) ¿Qué proporción de jóvenes de esta población dedica entre 100 y 200 minutos a las redes sociales? (1 pt)
- b) Juan es del 10% de jóvenes que más tiempo dedica a las redes sociales. ¿Cuántos minutos dedica? (1 pt)

a) Consideramos X = “el tiempo que cada joven de una población dedica al día en las redes sociales expresado en minutos”. $X = N(116, 42)$.

Determinamos la probabilidad de que un joven de la población dedique entre 100 y 200 minutos a las redes sociales: $P(100 \leq X \leq 200)$.

$$P(100 \leq X \leq 200) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 116}{42} \end{array} \right\} = P\left(\frac{100 - 116}{42} \leq Z \leq \frac{200 - 116}{42}\right) =$$

$$= P(-0.38 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -0.38) = P(Z \leq 2) - P(Z \geq 0.38) =$$

$$= P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 0.38)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.9772 - 1 + 0.648 = \boxed{0.6252}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812

La proporción de jóvenes de esta población que dedica entre 100 y 200 minutos a las redes sociales es del 62.52%.

b) Averiguamos el valor de t para el que $P(X > t) = 0.10$.

$$P(X > t) = 0.10 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 116}{42} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{t - 116}{42}\right) = 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{t-116}{42}\right) = 1 - 0.1 = 0.9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t-116}{42} = 1.28 \Rightarrow \boxed{t = 1.28 \cdot 42 + 116 = 169.76}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997

Juan dedica más de 169.76 minutos al día a las redes sociales.

Problema B1.- En un quirófano podemos llevar a cabo dos tipos de operaciones:

– Tipo A: Necesita 4 apósitos, 2 catéteres, y tiene una duración de 0.5 horas.

– Tipo B: Necesita 6 apósitos, 1 catéter, y tiene una duración de 1 hora.

Necesitamos realizar al menos 10 operaciones en total, y disponemos sólo de 60 apósitos y 26 catéteres. ¿Cuántas operaciones de cada tipo debemos realizar para maximizar las horas de uso del quirófano? (3 pt)

a) Llamamos “x” al número de número de operaciones tipo A que se realizan e “y” al número de operaciones tipo B que se realizan.

Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Apósitos	Catéteres	Horas de duración
Operaciones A (x)	4x	2x	0.5x
Operaciones B (y)	6y	y	y
TOTALES	4x + 6y	2x + y	0.5x + y

La función que deseamos maximizar es el número de horas de uso del quirófano $H(x, y) = 0.5x + y$. Esta función está sometida a las restricciones siguientes:

Necesitamos realizar al menos 10 operaciones en total $\rightarrow x + y \geq 10$

Disponemos sólo de 60 apósitos y 26 catéteres $\rightarrow 4x + 6y \leq 60; 2x + y \leq 26$

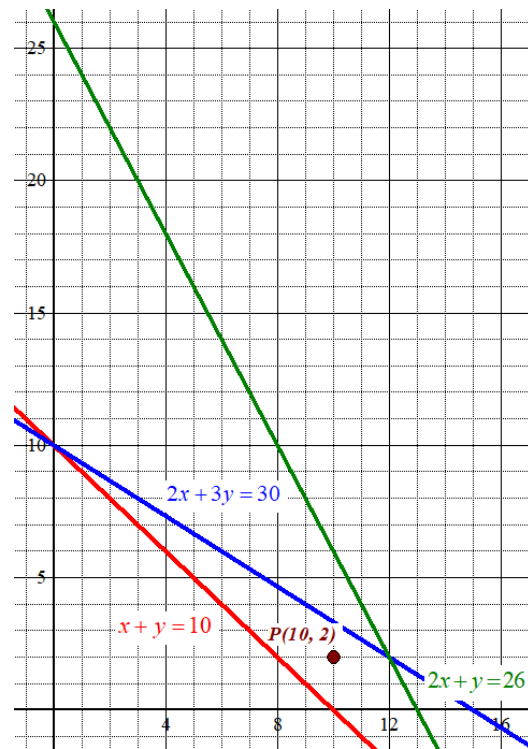
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ 4x + 6y \leq 60 \\ 2x + y \leq 26 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ 2x + 3y \leq 30 \\ 2x + y \leq 26 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$x + y = 10$		$2x + 3y = 30$		$2x + y = 26$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	y = 10 - x	x	y = $\frac{30 - 2x}{3}$	x	y = 26 - 2x	
0	10	0	10	0	26	Primer cuadrante
2	8	6	6	6	14	
5	5	12	2	12	2	
10	0	15	0	13	0	



Como las restricciones son

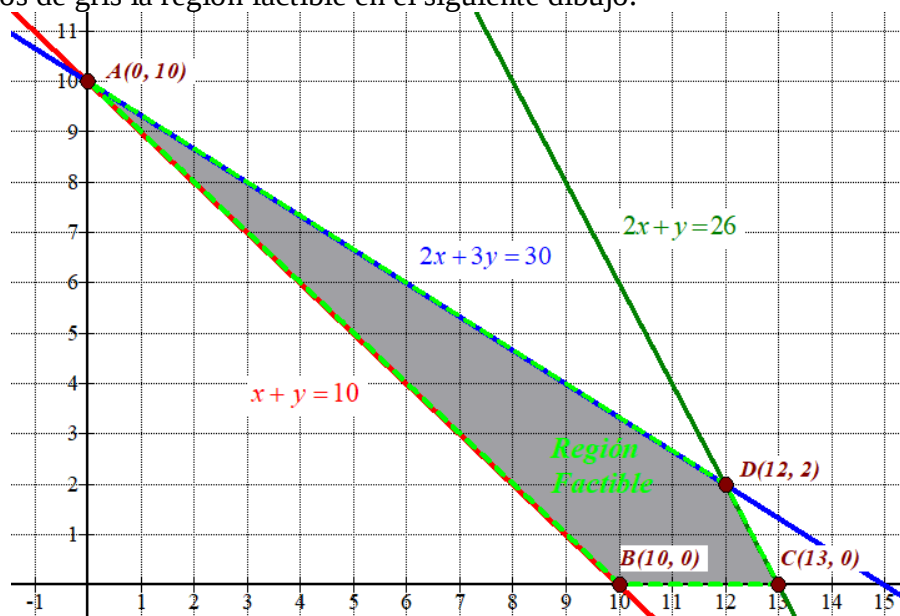
$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ 2x + 3y \leq 30 \\ 2x + y \leq 26 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul y verde, y por encima de la recta roja.

Comprobamos que el punto $P(10, 2)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 2 \geq 10 \\ 2 \cdot 10 + 3 \cdot 2 \leq 30 \\ 2 \cdot 10 + 2 \leq 26 \\ 10 \geq 0; 2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función $H(x, y) = 0.5x + y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow H(0, 10) = 0.5 \cdot 0 + 10 = 10 \text{ Máximo}$$

$$B(10, 0) \rightarrow H(10, 0) = 0.5 \cdot 10 + 0 = 5$$

$$C(13, 0) \rightarrow H(13, 0) = 0.5 \cdot 13 + 0 = 6.5$$

$$D(12, 2) \rightarrow H(12, 2) = 0.5 \cdot 12 + 2 = 8$$

El valor máximo es 10 y se obtiene en el vértice A(0, 10). El máximo de horas que se puede ocupar el quirófano cumpliendo con las restricciones establecidas es de 10 horas realizando sólo 10 operaciones tipo B.

Problema B2.- Para cualquier valor del parámetro x podemos encontrar tres matrices, A , B , C , de tamaño 3×3 , de manera que siempre se satisfacen las igualdades siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = Id, \quad B \cdot (C + C) = Id$$

a) ¿Para qué valores del parámetro x , $A \cdot A = Id$? (1 pt)

b) Determina C en función de x . (2 pt)

a) Resolvemos la igualdad matricial $A \cdot A = Id$.

$$AA = Id \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 4x+12 & 4x+4 \\ -2x & -8+x^2+6x & -4+x^2+2x \\ -12 & 6x+12 & 6x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -8=1 \\ 4x+12=0 \\ 4x+4=0 \\ -2x=0 \\ x^2+6x-8=1 \\ x^2+2x-4=0 \\ -12=0 \\ 6x+12=0 \\ 6x+4=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡¡Imposible!!}$$

Aparecen dos igualdades imposibles, además no sería posible encontrar un valor x que cumpliera el resto de ecuaciones. No existe ningún valor del parámetro x tal que $A \cdot A = Id$.

b) Resolvemos la igualdad matricial.

$$A \cdot B = Id \Rightarrow B = A^{-1}$$

$$B \cdot (C + C) = Id \Rightarrow B \cdot 2C = Id \Rightarrow 2C = B^{-1} \Rightarrow \{B = A^{-1}\} \Rightarrow 2C = A \Rightarrow C = \frac{1}{2} A$$

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & x/2 & x/2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz C tiene la expresión $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & x/2 & x/2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema C1.- La altura media en España se ha incrementado en los últimos 200 años por factores como la alimentación y la salud. Hace 200 años, la media en España era de 157 cm. Actualmente es de 169 cm. Aproximaremos la altura media en España con la función $f(t)$, en cm, siguiente:

$$f(t) = 169 + t \cdot m,$$

donde m es una constante desconocida y tiene la variable que indica los años que han pasado desde hoy en día. Es decir, $f(0)$ representa la altura media hoy en día, y $f(-200)$ representa la altura media hace 200 años.

- a) Calcula el valor del parámetro m . (1 pt)
- b) Según nuestra función $f(t)$, ¿cuál será la altura media de aquí a 50 años? (1 pt)
- c) Calcula $f'(0)$. ¿Qué representa este valor? (1 pt)

a) Sabemos que $f(0) = 169$ y $f(-200) = 157$.

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = 169 + t \cdot m \\ f(0) = 169 \\ f(-200) = 157 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 169 = 169 + 0 \cdot m \\ 157 = 169 + (-200)m \end{array} \right\} \Rightarrow 157 = 169 - 200m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200m = 12 \Rightarrow m = \frac{12}{200} = 0.06$$

Para que se cumpla lo pedido debe ser $m = 0.06$.

b) La función tiene la expresión $f(t) = 169 + 0.06t$. Calculamos el valor de $f(50)$.

$$f(50) = 169 + 0.06 \cdot 50 = 172$$

Según el modelo la altura media de los españoles dentro de 50 años será de 172 cm.

c) Obtenemos la expresión de la derivada y luego el valor de $f'(0)$.

$$f(t) = 169 + 0.06t \Rightarrow f'(t) = 0.06 \Rightarrow f'(0) = 0.06$$

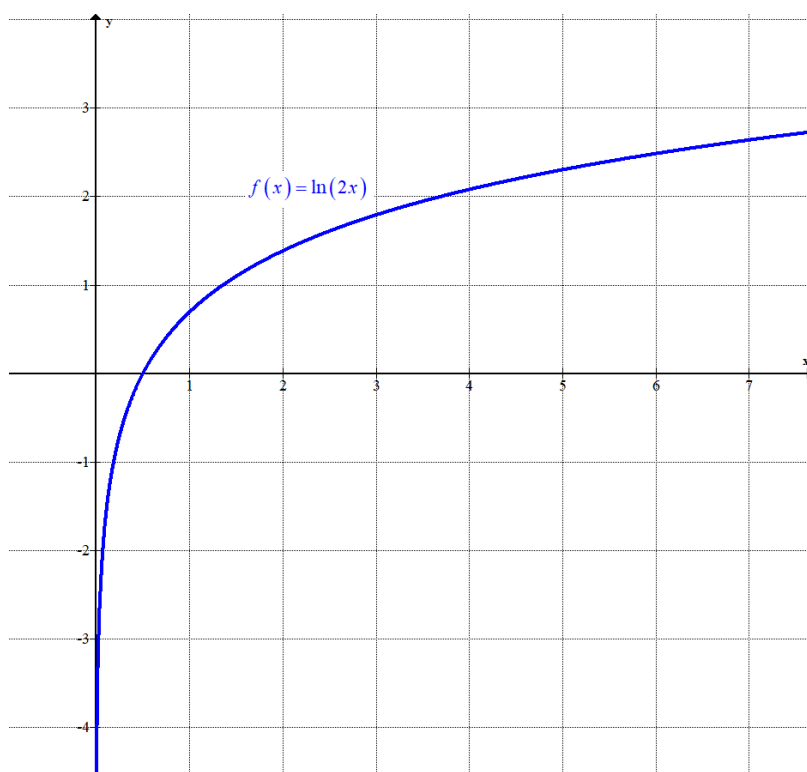
Este resultado significa que la altura media crece a razón de 0.06 cm por año.

Problema C2.- Considera la función $f(x) = \ln(2x)$, para $x \in (0, +\infty)$.

- a) Haz una gráfica esquemática de la función $f(x)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica el valor de la función en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos y absolutos. (2 pt)
- b) Sobre la misma gráfica, traza la recta tangente a la función en el punto $x=1$. ¿Cuál es el valor de su pendiente? (1 pt)

- a) El dominio de la función es $(0, +\infty)$. Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \ln(2x)$
$1/4$	$-\ln 2 \approx -0.7$
$1/2$	0
1	$\ln 2 \approx 0.7$
2	$\ln 4 \approx 1.4$
10	$\ln 20 \approx 3$



Calculamos el límite de la función cuando x tiende a 0 por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x) = \ln(0^+) = -\infty$$

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Hallamos la derivada de la función.

$$f(x) = \ln(2x) \Rightarrow f'(x) = f'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \{x > 0\} \Rightarrow f'(x) > 0$$

La derivada de la función siempre es positiva y la función crece en todo su dominio $(0, +\infty)$.

La función no presenta ni mínimo relativo ni máximo relativo, ni absolutos.

b) La pendiente de la recta tangente en $x=1$ es el valor de $f'(1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

La pendiente de la recta tangente en $x=1$ vale 1.

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \ln(2 \cdot 1) = \ln 2 \\ f'(1) = 1 \\ y - f(1) = f'(1)(x - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \ln 2 = 1(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1 + \ln 2}$$

La recta tangente a la función en el punto $x=1$ tiene ecuación $y = x - 1 + \ln 2$.

