

Criteris de correcció globals

- Les respostes a les preguntes o tasques s'han de realitzar expressant de forma raonada el procés seguit per resoldre-les, amb el rigor i la precisió necessaris, usant el llenguatge, la notació i els símbols matemàtics adequats, i utilitzant arguments, justificacions, explicacions i raonaments explícits i coherents. Es valorarà el grau d'acompliment amb un màxim de 0,25 punts cada exercici.
 - Els errors de càlcul es penalitzaran amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes mecàniques o de càlcul no justificades, amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- La simple descripció del plantejament, sense que es dugui a terme la resolució de manera efectiva, no és suficient per obtenir una valoració completa de la pregunta o tasca.
- En les preguntes o tasques en què es demani expressament una deducció raonada, la simple aplicació d'una fórmula no serà suficient per obtenir-ne una valoració completa.
- Els errors comesos en una pregunta o tasca (per exemple, en el càlcul del valor d'un cert paràmetre) no es tindran en compte en la qualificació dels desenvolupaments posteriors que puguin veure's afectats, sempre que resultin d'una complexitat equivalent.
- Els errors en les operacions aritmètiques elementals es penalitzaran amb un màxim de 0,25 punts en cada pregunta o tasca
- Si l'alumne presenta més problemes que els demanats, corriu-ne els que apareixen primer.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta". Si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració.

La prova consta de tres parts: la primera no té diferents opcions, i les altres dues tenen dos possibles problemes, a contestar-ne un. En cas de contestar dos problemes d'una mateixa part, només s'avaluarà el primer. Vegeu la puntuació a cada exercici.

No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació. Es poden usar regles i bolígrafs de colors (excepte vermell i verd).

Part A. Contesta tots els problemes d'aquesta part (total 4 pt).

Problema A1. — En una regió, la probabilitat que un dia determinat s'iniciï un incendi forestal depèn de l'estació de l'any: cada dia durant l'estiu aquesta probabilitat és de 0.09, a la tardor és de 0.05, a l'hivern és de 0.02, i a la primavera és de 0.08. Escollirem un dia a l'atzar i suposarem que la probabilitat que l'estació de l'any sigui una o una altra és la mateixa.

- a) Escollint un dia de l'any a l'atzar, quina és la probabilitat que s'iniciï un incendi forestal?

Criteris: 0.25 pts per identificar els esdeveniments, 0.5 pts per justificar el càlcul, 0.25 pts per indicar el resultat correcte. Penalitzau amb -0.25 pts per cada error d'escriptura. **(Total 1 pt)**

Solució. Considerem els successos:

- A : s'inicia un incendi forestal.
- B_1, B_2, B_3, B_4 : és estiu/tardor/hivern/primavera, respectivament.

Atès que estar en una o altra estació és equiprobable, i totes elles passen amb probabilitat $1/4$, podem calcular:

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + \dots + P(A | B_4)P(B_4) = \frac{0.09 + 0.05 + 0.02 + 0.08}{4} = 0.06.$$

És a dir, la probabilitat que s'iniciï un incendi forestal és de 0.06.

- b) Escollint un dia de l'any a l'atzar, considera els successos següents: A , s'inicia un incendi forestal aquest dia; B , aquest dia és de primavera. Són els successos A i B independents?

Criteris: 0.5 pts per plantejar, 0.5 pts pels càlculs i comprovació. Penalitzau amb -0.25 pts per cada error d'escriptura. **(Total 1 pt)**

Solució. No són independents, ja que la probabilitat que s'iniciï un incendi forestal és diferent quan sabem que és primavera:

$$P(A) = 0.06 \neq 0.08 = P(A | B_4).$$

Problema A2. — En un estudi es va suggerir que el temps que cada jove d'una població dedica al dia a les xarxes socials segueix una distribució normal, de mitjana 116 minuts i desviació típica 42 minuts.

- a) Quina proporció de joves d'aquesta població dedica entre 100 i 200 minuts a les xarxes socials?

Criteris: 0.5 pts per plantejar, 0.5 pts per calcular. Penalitzau amb -0.25 pts per cada error d'escriptura. Penalitzau amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. No penalitzeu per expressar el resultat en $[0, 1]$. **(Total 1 pt)**

Solució. Escollint un jove d'aquesta població, sigui X la variable aleatòria que indica els minuts que dedica al dia a les xarxes socials. Aleshores,

$$P(100 \leq X \leq 200) = 0.626.$$

És a dir, el 62.6% de joves dedica entre 100 i 200 minuts a les xarxes socials.

- b) En Joan és del 10% de joves que més temps dedica a les xarxes socials. Quants minuts hi dedica?

Criteris: 0.5 pts per plantejar, 0.5 pts per calcular. Penalitzau amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. No penalitzeu si indiquen que són exactament 169.83 minuts. **(Total 1 pt)**

Solució. Amb la notació de l'apartat anterior, cercam la quantitat de minuts m tals que:

$$P(X \leq m) = 0.9,$$

i, calculant, obtenim $m = 169.83$. És a dir, en Joan hi dedica almenys 169.83 minuts.

Part B. Contestau només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — En una sala d'operacions podem dur a terme dos tipus d'operacions:

- Tipus A: Necessita 4 apòsits, 2 catèters, i té una durada de 0.5 hores.
- Tipus B: Necessita 6 apòsits, 1 catèter, i té una durada d'1 hora.

Necessitam fer almenys 10 operacions en total, i disposam només de 60 apòsits i 26 catèters. Quantes operacions de cada tipus hem de fer per maximitzar les hores d'ús de la sala d'operacions?

Criteris: 0.5 pts per indicar funció objectiu, 0.5 pt per determinar rectes (penalitzau amb -0.25 pts si falten les rectes $x, y \geq 0$, penalitzau amb -0.25 per cada una de les altres rectes), 1 pt per traçar rectes i regió factible (penalitzau amb -0.25 pts per cada recta incorrectament traçada, penalitzau amb -0.5 pts si la regió factible és incorrecta), 0.5 pts per identificar els vèrtexs (penalitzau amb -0.25 per cada vèrtex incorrecte), 0.5 pts per calcular el màxim i interpretar. **(Total 3 pt)**

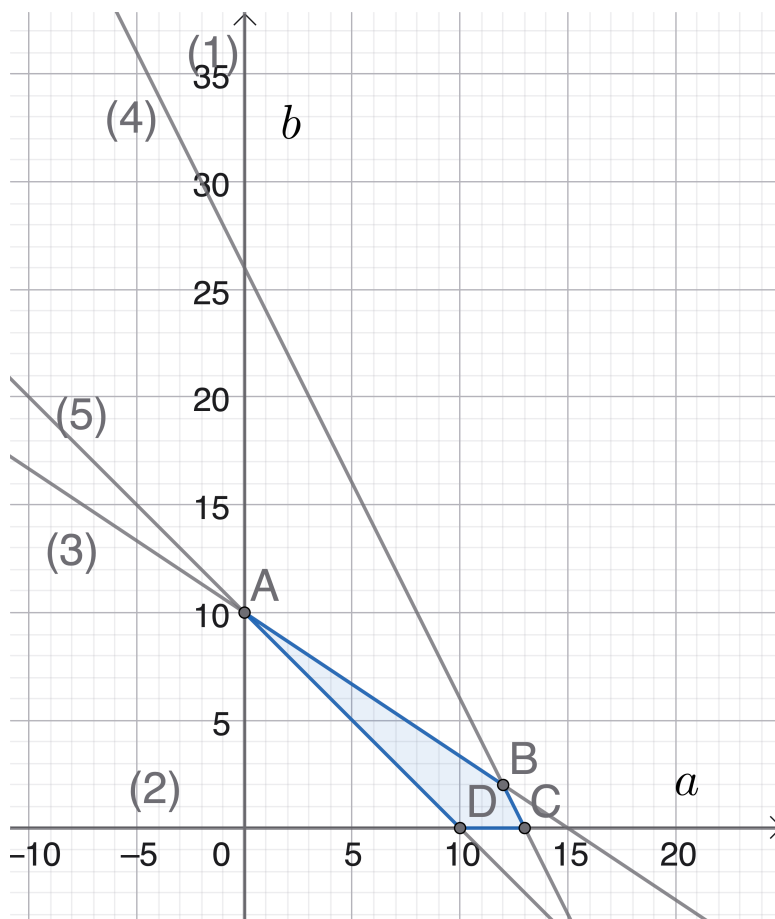
Solució. Plantejarem aquest problema com un problema de programació lineal, on intentarem maximitzar el nombre d'hores que està ocupada la sala d'operacions.

Siguin a i b el nombre d'operacions de cada tipus respectivament que farem. La funció objectiu per maximitzar serà $f(a, b) = 0.5a + b$.

Les condicions que s'hauran de satisfer són:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & a \geq 0, \\ (2) & b \geq 0, \\ (3) & 4a + 6b \leq 60, \\ (4) & 2a + b \leq 26, \\ (5) & a + b \geq 10, \end{array} \right.$$

Amb aquestes, els vèrtexs de la regió factible són $A = (0, 10)$, $B = (12, 2)$, $C = (13, 0)$, $D = (10, 0)$. El màxim nombre d'hores que es podrà ocupar és de 10 hores, corresponent al vèrtex A .



Problema B2. — Per a qualsevol valor del paràmetre x podem trobar tres matrius, A , B , C , de mida 3×3 , de manera que sempre se satisfan les igualtats següents:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \text{Id}, \quad B \cdot (C + C) = \text{Id}.$$

a) Per a quins valors del paràmetre x , $A \cdot A = \text{Id}$?

Criteris: 0.5 pts per calcular $A \cdot A$, 0.5 pts determinar els valors del paràmetre x . Penalitzau amb -0.25 pts per cada error de càlcul. **(Total 1 pt)**

Solució. Calculant, és suficient trobar un únic valor en què siguin diferents:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} \neq \text{Id}.$$

Per tant, per a cap valor de x no es satisfà la igualtat.

b) Determina C en funció de x .

Criteris: 1 pt per indicar que B o $(C + C)$ són la inversa d' A , 1 pt per expressar $C = \frac{1}{2}A$. Penalitzau amb -0.5 pts per cada error de càlcul. **(Total 2 pt)**

Solució.

$$C + C = B^{-1} = A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \implies C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & x & x \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & x/2 & x/2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Part C. Contestau només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — L'alçada mitjana a Espanya s'ha incrementat els darrers 200 anys per factors com l'alimentació i la salut. Fa 200 anys, l'alçada mitjana a Espanya era de 157 cm. Actualment és de 169 cm. Aproximarem l'alçada mitjana a Espanya amb la funció $f(t)$, en cm, següent:

$$f(t) = 169 + t \cdot m,$$

on m és una constant desconeguda i t és la variable que indica els anys que han passat des d'avui en dia. És a dir, $f(0)$ representa l'alçada mitjana avui en dia, i $f(-200)$ representa l'alçada mitjana fa 200 anys.

- a) Calcula el valor del paràmetre m .

Criteris: 0.5 pts per plantejar la igualtat $f(-200) = 157$, 0.5 pts per calcular. **(Total 1 pt)**

Solució. Per l'enunciat podem deduir dues condicions.

La primera és $169 = f(0) = 169 + 0 \cdot m$. Aquesta és una igualtat certa independentment del paràmetre m i, per tant, no permet calcular el valor de m .

La segona condició és $157 = f(-200) = 169 + (-200) \cdot m$, que implica que $m = \frac{157-169}{-200} = \frac{-12}{-200} = 0.06$.

- b) Segons la nostra funció $f(t)$, quina serà l'alçada mitjana d'aquí a 50 anys?

Criteris: Penalitzau amb -0.5 pts per error de càlcul. **(Total 1 pt)**

Solució. $f(50) = 169 + 50 \cdot 0.06 = 172$ centímetres.

- c) Calcula $f'(0)$. Què representa aquest valor?

Criteris: 0.25 pts per calcular $f'(t)$, 0.25 pts per calcular $f'(0)$, 0.5 pts per interpretar. Penalitzau amb tota la puntuació per errors en la derivada. **(Total 1 pt)**

Solució. La derivada de la funció és $f'(t) = (169 + t \cdot m)' = m$, és a dir, és constant igual a m . Per tant, en l'origen, la derivada és $f'(0) = m = 0.06$ centímetres per any. Aquest valor representa quin és l'increment en l'actualitat de l'alçada mitjana de la població espanyola, en centímetres per any.

Problema C2. — Considera la funció $f(x) = \ln(2x)$, per a $x \in (0, +\infty)$.

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$. Calcula o justifica, i indica sobre la gràfica el valor de la funció en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims relatius i absoluts.

Criteris: 0.5 pts per indicar els valors en els extrems del domini (penalitzeu -0.125 pts per cada error de llenguatge en els límits), 0.5 pts per calcular la derivada, 0.75 pts per indicar els intervals de creixement/decreixement i identificar els màxims/mínims relatius i absoluts (penalitzau amb -0.25 pts si no indiquen quins són els màxims o mínims absoluts), 0.25 pts per la claredat/correcció de la gràfica i els eixos. Penalitzau amb tota la puntuació les gràfiques basades únicament en una taula de punts. **(Total 2 pt)**

Solució. En els extrems del domini,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(2) + \ln(x)) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2) + \ln(x)) = +\infty.$$

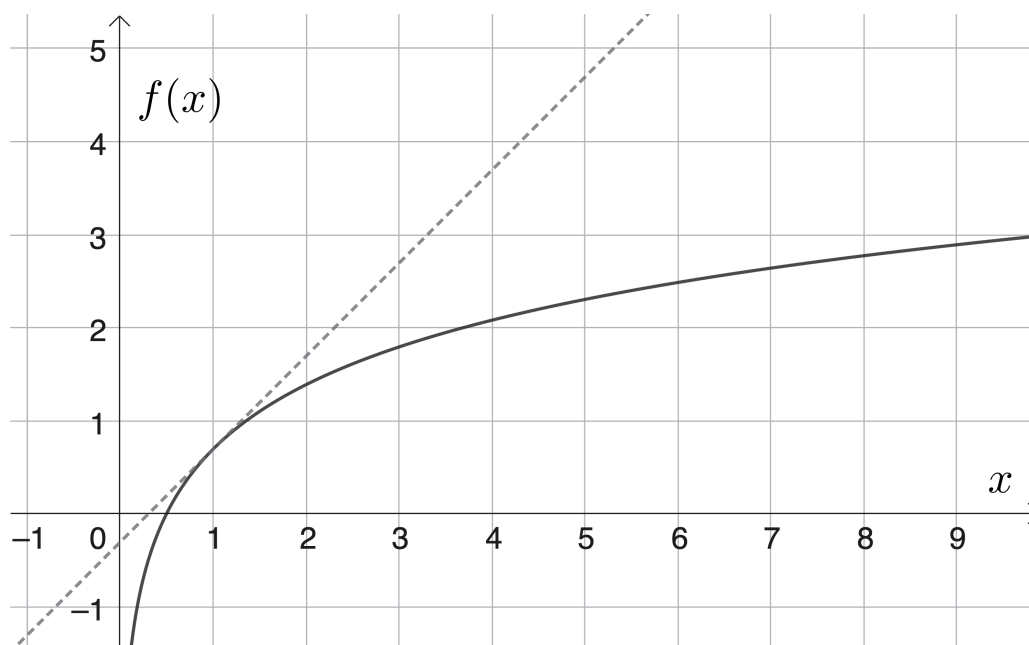
La seva derivada és $f'(x) = \frac{1}{x}$ que, en el domini $x \in (0, +\infty)$ és sempre positiva. Per tant, la funció és creixent en tot l'interval $(0, +\infty)$, no té extrems relatius i no té mínim ni màxim absoluts.

- b) Sobre la mateixa gràfica, traça la recta tangent a la funció en el punt $x = 1$. Quin és el valor del seu pendent?

Criteris: 0.5 pts per calcular el pendent, 0.5 pts per traçar la recta.

(Total 1 pt)

Solució. Per a $x = 1$, el pendent de la recta tangent és $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.