

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**INDICACIONES**

- El examen consta de 3 apartados. Cada apartado puede contener una o dos opciones. En el caso de aparecer dos opciones, se escogerá una que se deberá realizar íntegramente.
- En caso de resolver más opciones de las establecidas en cada apartado, se corregirá únicamente la que aparezca en primer lugar en el cuadernillo del examen.
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- Se permitirá el uso de reglas y calculadoras que no sean programables, ni gráficas o con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 1. En una tienda de electrónica, se venden tres tipos de dispositivos: teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el de una tablet es de 400 € y el de un ordenador portátil es de 800 €. Durante una semana, se vendieron un total de 110 unidades, generando unos ingresos de 42.000 €. Además, se sabe que la suma de los teléfonos móviles vendidos más el doble de los ordenadores portátiles es igual al doble de las tablets vendidas. Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS]. Plantee el sistema de ecuaciones lineales que modela este problema para calcular las unidades vendidas de cada tipo.

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Analice la compatibilidad de dicho sistema.

Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS]. Si se puede, calcule cuántas unidades de cada tipo (teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles) se vendieron esa semana; y si no se puede, justifique por qué.

Opción 2. Una pastelería artesanal elabora dos tipos de tartas: la tarta de Almendra y la tarta de Queso.

- Para elaborar una tarta de Almendra se necesitan 500 g de harina y 300 g de azúcar.
- Para elaborar una tarta de Queso se necesitan 200 g de harina y 400 g de azúcar.

La pastelería dispone diariamente de 24 kg de harina y 20 kg de azúcar. Por motivos de demanda comercial, deben fabricarse al menos 10 tartas de Queso diarias. El beneficio obtenido por cada tarta de Almendra es de 12 € y por cada tarta de Queso es de 15 €. La intención de la pastelería es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántas tartas de cada tipo deben elaborarse diariamente para maximizar el beneficio?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Apartado 2 [4 puntos]. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1 PUNTO]. Determine el dominio de la función y calcule todas sus asíntotas (verticales, horizontales u oblicuas), indicando las ecuaciones correspondientes.

Tarea 2.1B [2 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ e identifique las coordenadas de los extremos relativos (máximos y mínimos), si existen.

Tarea 2.1C [1 PUNTO]. Calcule los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes coordenados y realice un esbozo de la gráfica con la información obtenida (puntos de corte, extremos y asíntotas).

Apartado 3 [3 puntos].

Opción 1. El consumo mensual de datos móviles de los clientes de una compañía telefónica sigue una distribución normal con una desviación típica de 3 GB. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 clientes y se observa que su consumo medio es de 15 GB. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule un intervalo de confianza al 97% para la media del consumo de datos de todos los clientes de la compañía.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la media con un error menor de 0,5 GB y un nivel de confianza del 95%?

Opción 2. En un congreso médico, el 60% de los asistentes son cardiólogos, el 30% son neurólogos y el 10% restante son pediatras. Se sabe que hablan inglés el 80% de los cardiólogos, el 60% de los neurólogos y el 50% de los pediatras. Se elige un asistente al azar. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el asistente seleccionado hable inglés?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. Si se elige un asistente y resulta que no habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea neurólogo?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Calcule la probabilidad de que el asistente seleccionado sea cardiólogo y no hable inglés.

Tabla de la distribución normal $N(0,1)$

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

SOLUCIONES**Apartado 1 [3 puntos].**

Opción 1. En una tienda de electrónica, se venden tres tipos de dispositivos: teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el de una tablet es de 400 € y el de un ordenador portátil es de 800 €. Durante una semana, se vendieron un total de 110 unidades, generando unos ingresos de 42.000 €. Además, se sabe que la suma de los teléfonos móviles vendidos más el doble de los ordenadores portátiles es igual al doble de las tablets vendidas. Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS]. Plantee el sistema de ecuaciones lineales que modela este problema para calcular las unidades vendidas de cada tipo.

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Analice la compatibilidad de dicho sistema.

Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS]. Si se puede, calcule cuántas unidades de cada tipo (teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles) se vendieron esa semana; y si no se puede, justifique por qué.

1.1A Llamamos “x” al número de teléfonos móviles vendidos, “y” al número de tablets vendidas y “z” al número de ordenadores portátiles vendidos.

El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el de una tablet es de 400 € y el de un ordenador portátil es de 800 €. Durante una semana, se vendieron un total de 110 unidades, generando unos ingresos de 42.000 € $\rightarrow x + y + z = 110$; $300x + 400y + 800z = 42000$.

La suma de los teléfonos móviles vendidos más el doble de los ordenadores portátiles es igual al doble de las tablets vendidas $\rightarrow x + 2z = 2y$.

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema de ecuaciones lineales.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ 300x + 400y + 800z = 42000 \\ x + 2z = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ 3x + 4y + 8z = 420 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

1.1B El sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 3 & 4 & 8 & 420 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el valor del determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 8 - 6 - 4 - 6 + 16 = 16 \neq 0$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes A es distinto de cero el rango de A es 3. El rango de A/B también es 3. Los rangos de A y A/B son iguales al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

1.1C Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ 3x + 4y + 8z = 420 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ 3x + 4y + 8z = 420 \\ x = 2y - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y - 2z + y + z = 110 \\ 3(2y - 2z) + 4y + 8z = 420 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y - z = 110 \\ 6y - 6z + 4y + 8z = 420 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y - 110 = z \\ 10y + 2z = 420 \rightarrow 5y + z = 210 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y + 3y - 110 = 210 \Rightarrow 8y = 320 \Rightarrow \boxed{y = \frac{320}{8} = 40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 3 \cdot 40 - 110 = 10} \Rightarrow \boxed{x = 2 \cdot 40 - 2 \cdot 10 = 60}$$

Se vendieron 60 teléfonos móviles, 40 tablets y 10 ordenadores portátiles.

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 2. Una pastelería artesanal elabora dos tipos de tartas: la tarta de Almendra y la tarta de Queso.

- Para elaborar una tarta de Almendra se necesitan 500 g de harina y 300 g de azúcar.
- Para elaborar una tarta de Queso se necesitan 200 g de harina y 400 g de azúcar.

La pastelería dispone diariamente de 24 kg de harina y 20 kg de azúcar. Por motivos de demanda comercial, deben fabricarse al menos 10 tartas de Queso diarias. El beneficio obtenido por cada tarta de Almendra es de 12 € y por cada tarta de Queso es de 15 €. La intención de la pastelería es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántas tartas de cada tipo deben elaborarse diariamente para maximizar el beneficio?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

1.2A Llamamos “x” = número de tartas de almendra e “y” = número de tartas de queso. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Gramos de harina	Gramos de azúcar	Beneficio
Nº tartas de almendra (x)	$500x$	$300x$	$12x$
Nº tartas de queso (y)	$200y$	$400y$	$15y$
TOTAL	$500x + 200y$	$300x + 400y$	$12x + 15y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio obtenido con la venta de las tartas que viene expresado como $B(x, y) = 12x + 15y$

Las restricciones son:

“La pastelería dispone diariamente de 24 kg de harina y 20 kg de azúcar” $\rightarrow$
 $500x + 200y \leq 24000$, $300x + 400y \leq 20000$.

“Deben fabricarse al menos 10 tartas de Queso diarias” $\rightarrow y \geq 10$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 500x + 200y \leq 24000 \\ 300x + 400y \leq 20000 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 240 \\ 3x + 4y \leq 200 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

1.2B Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$5x + 2y = 240$$

$$3x + 4y = 200$$

$$y = 10$$

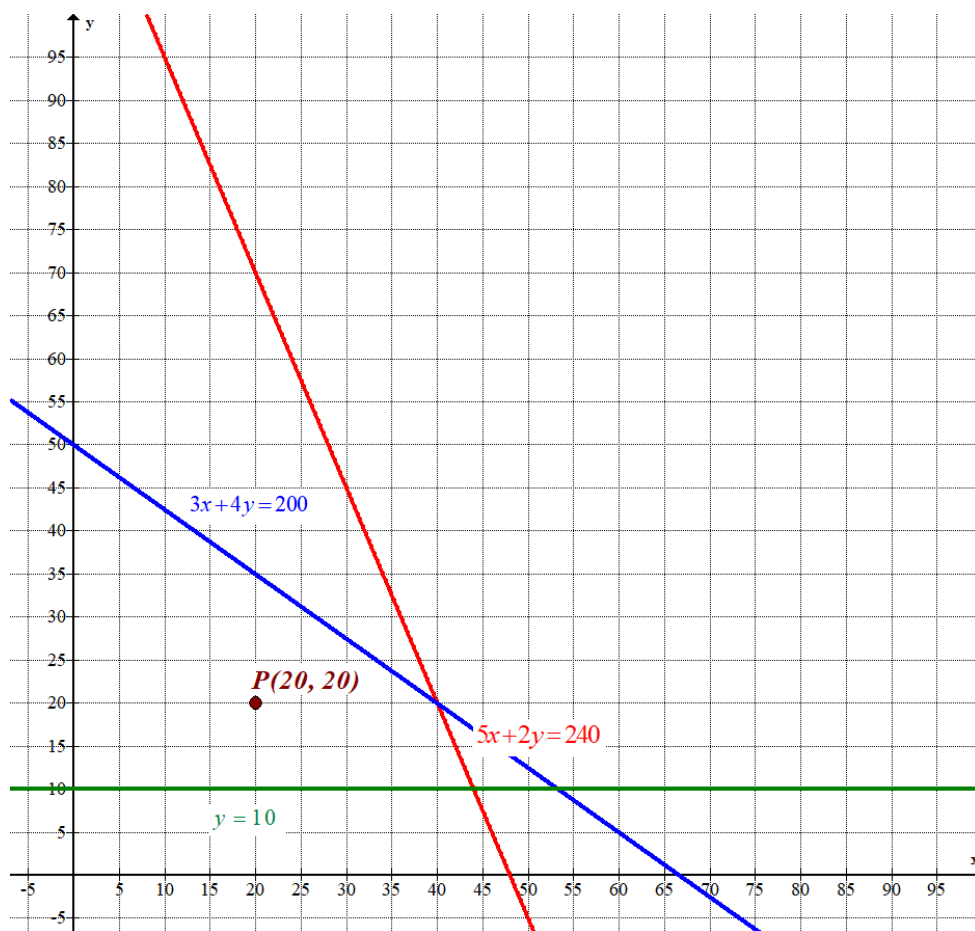
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{240 - 5x}{2}$
0	120
40	20
44	10
48	0

x	$y = \frac{200 - 3x}{4}$
0	50
40	20
60	5

x	y = 10
0	10
45	10

Primer
cuadrante



Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 240 \\ 3x + 4y \leq 200 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de la recta roja y azul, y por encima de la recta horizontal verde. Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \leq 240 \\ 3 \cdot 20 + 4 \cdot 20 \leq 200 \\ 20 \geq 10 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 100 + 40 \leq 240 \\ 60 + 80 \leq 200 \\ 20 \geq 10 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 200 \\ 5x + 2y = 240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15x - 20y = -1000 \\ 15x + 6y = 720 \end{cases}$$

$$\hline -14y = -280 \Rightarrow y = \frac{-280}{-14} = 20 \Rightarrow 3x + 4 \cdot 20 = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{3} = 40 \Rightarrow \boxed{C(40, 20)}$$

$$D \rightarrow \begin{cases} y = 10 \\ 5x + 2y = 240 \end{cases} \Rightarrow 5x + 20 = 240 \Rightarrow 5x = 220 \Rightarrow x = \frac{220}{5} = 44 \Rightarrow \boxed{D(44, 10)}$$

Los vértices son A(0, 10); B(0, 50); C(40, 20) y D(44, 10).

1.2C Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 12x + 15y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 12 \cdot 0 + 15 \cdot 10 = 150$$

$$B(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 12 \cdot 0 + 15 \cdot 50 = 750$$

$$C(40, 20) \rightarrow B(40, 20) = 12 \cdot 40 + 15 \cdot 20 = 780 \text{ Máximo}$$

$$D(44, 10) \rightarrow B(44, 10) = 12 \cdot 44 + 15 \cdot 10 = 678$$

El valor máximo es 780 y se alcanza en el vértice C(40, 20). El máximo beneficio se obtiene con la elaboración de 40 tartas de almendra y 20 de queso.

1.2D El máximo beneficio que se puede conseguir es de 780 euros.

Apartado 2 [4 puntos]. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1 PUNTO]. Determine el dominio de la función y calcule todas sus asíntotas (verticales, horizontales u oblicuas), indicando las ecuaciones correspondientes.

Tarea 2.1B [2 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ e identifique las coordenadas de los extremos relativos (máximos y mínimos), si existen.

Tarea 2.1C [1 PUNTO]. Calcule los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes coordenados y realice un esbozo de la gráfica con la información obtenida (puntos de corte, extremos y asíntotas).

2.1A El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

El dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = \frac{3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2}{(2-2)^2} = \frac{36}{0} = \infty$$

La recta $x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{12x}{x^2}}{\left(\frac{x}{x} - \frac{2}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{12}{x}}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{3 + \frac{12}{\infty}}{\left(1 - \frac{2}{\infty}\right)^2} = \frac{3 + 0}{(1-0)^2} = 3$$

La recta $y = 3$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como la función tiene asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

2.1B Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(6x+12)(x-2)^2 - 2(x-2)(3x^2+12x)}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{(6x+12)(x-2) - 2(3x^2+12x)}{(x-2)^3} = \frac{\cancel{6x^2} - \cancel{12x} + \cancel{12x} - 24 - \cancel{6x^2} - 24x}{(x-2)^3} = \frac{-24-24x}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-24-24x}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow -24-24x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después del punto crítico $x = -1$ y del valor excluido del dominio $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-24 - 24(-2)}{(-2-2)^3} = \frac{24}{-64} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

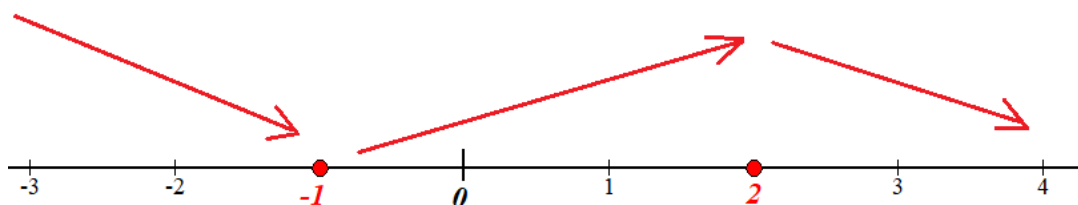
- En el intervalo $(-1, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-24 - 24 \cdot 0}{(0-2)^3} = 3 > 0$. La función crece en $(-1, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-24 - 24 \cdot 3}{(3-2)^3} = -96 < 0$.

La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(-1, 2)$.

La función sigue el esquema siguiente.



En $x = 2$ la función no existe. La función tiene un mínimo relativo en $x = -1$. Como

$$f(-1) = \frac{3(-1)^2 + 12(-1)}{(-1-2)^2} = -1, \text{ las coordenadas del mínimo relativo son } (-1, -1).$$

2.1C Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes coordenados.

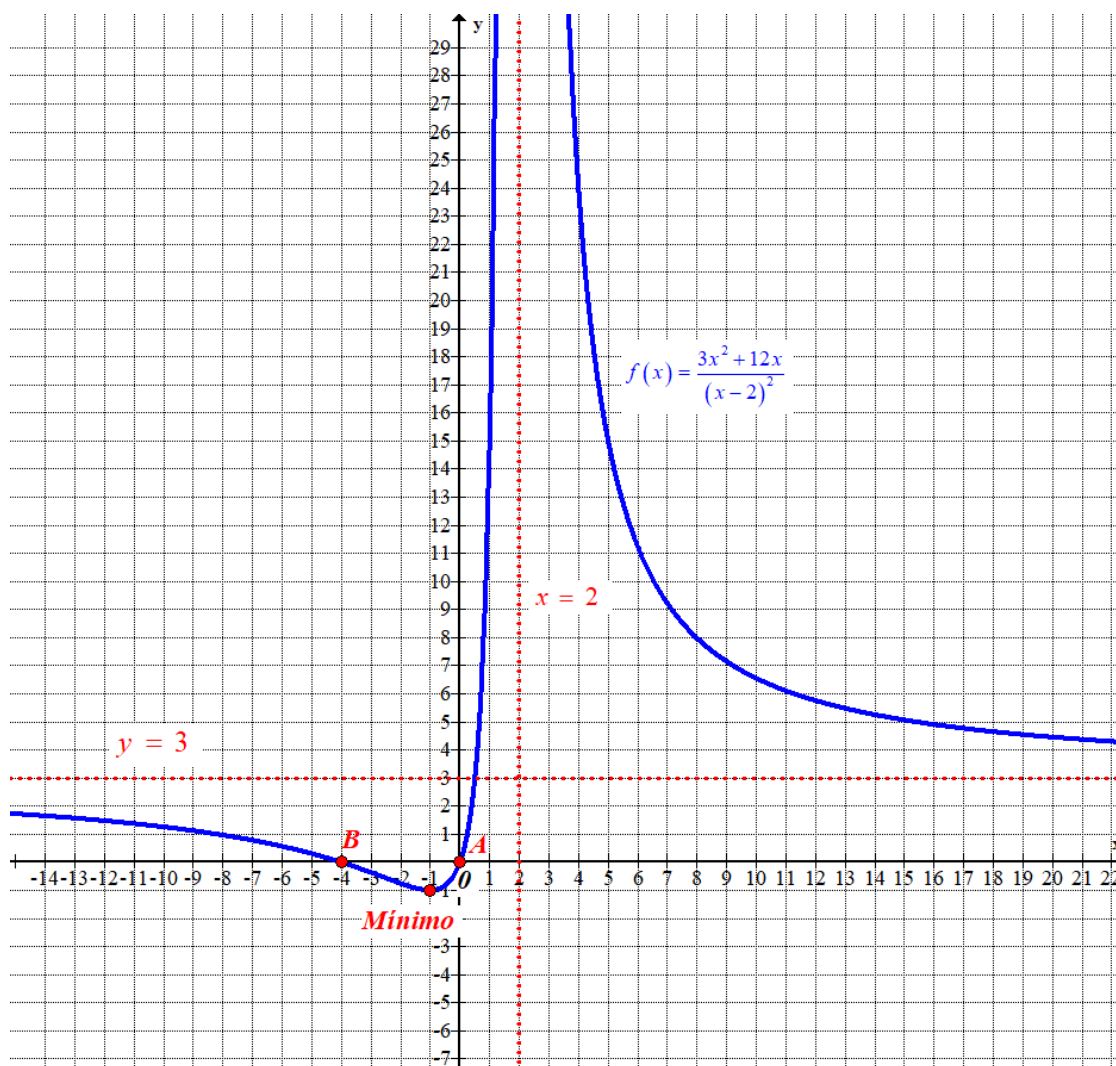
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0}{(0-2)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow \boxed{B(-4,0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son $A(0, 0)$ y $B(-4, 0)$.
Realizamos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2}$
-4	0
-3	-0.36
-1	-1
0	0
1	15
3	63



Apartado 3 [3 puntos].

Opción 1. El consumo mensual de datos móviles de los clientes de una compañía telefónica sigue una distribución normal con una desviación típica de 3 GB. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 clientes y se observa que su consumo medio es de 15 GB. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule un intervalo de confianza al 97% para la media del consumo de datos de todos los clientes de la compañía.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la media con un error menor de 0,5 GB y un nivel de confianza del 95%?

X = El consumo mensual de datos móviles de los clientes de una compañía telefónica (en Gbs).

$X = N(\mu, 3)$

Tamaño de muestra = $n = 64$. Media muestral = $\bar{x} = 15$ GB.

3.1A Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 97%.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \frac{3}{\sqrt{64}} = 0.81375 \text{ GB}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (15 - 0.81375, 15 + 0.81375) = (14.18625, 15.81375)$$

3.1B Con un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Igualamos el error a 0.5 GB.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5\sqrt{n} = 5.88 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{5.88}{0.5} \Rightarrow \boxed{n = 11.76^2 = 138.2976}$$

Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 139 clientes.

Apartado 3 [3 puntos].

Opción 2. En un congreso médico, el 60% de los asistentes son cardiólogos, el 30% son neurólogos y el 10% restante son pediatras. Se sabe que hablan inglés el 80% de los cardiólogos, el 60% de los neurólogos y el 50% de los pediatras. Se elige un asistente al azar. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el asistente seleccionado hable inglés?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. Si se elige un asistente y resulta que no habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea neurólogo?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Calcule la probabilidad de que el asistente seleccionado sea cardiólogo y no hable inglés.

Llamamos C al suceso “el asistente es cardiólogo”, N a “el asistente es neurólogo”, P a “el asistente es pediatra” e I al suceso “el asistente habla inglés”.

Por los datos proporcionados tenemos: $P(C) = 0.60$, $P(N) = 0.30$, $P(P) = 1 - 0.6 - 0.3 = 0.1$,

$P(I/C) = 0.8$, $P(I/N) = 0.60$ y $P(I/P) = 0.5$.

3.2A Debemos calcular $P(I)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(I) &= P(C)P(I/C) + P(N)P(I/N) + P(P)P(I/P) = \\ &= 0.6 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.5 = \boxed{0.71} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el asistente seleccionado hable inglés vale 0.71.

3.2B Debemos calcular $P(N/\bar{I})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(N/\bar{I}) &= \frac{P(N \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{P(N)P(\bar{I}/N)}{1 - P(I)} = \frac{P(N)[1 - P(I/N)]}{1 - P(I)} = \\ &= \frac{0.3 \cdot [1 - 0.6]}{1 - 0.71} = \boxed{\frac{12}{29} \approx 0.4138} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el asistente elegido que no habla inglés sea neurólogo tiene un valor aproximado de 0.4138.

3.2C Debemos calcular $P(C \cap \bar{I})$.

$$P(C \cap \bar{I}) = P(C)P(\bar{I}/C) = P(C)[1 - P(I/C)] = 0.6 \cdot (1 - 0.8) = \boxed{0.12}$$

La probabilidad de que el asistente seleccionado sea cardiólogo y no hable inglés vale 0.12.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL PROBLEMA

Consideramos un número de asistentes de 100 personas.

El 60% son cardiólogos, es decir, hay 60 cardiólogos. El 30% son neurólogos, es decir, hay 30 neurólogos. Los restantes son pediatras, es decir, $100 - 60 - 30 = 10$ son pediatras.

Hablan inglés el 80% de los cardiólogos, es decir, $0.8 \cdot 60 = 48$ cardiólogos hablan inglés.
 Hablan inglés el 60% de los neurólogos, es decir, $0.6 \cdot 30 = 18$ neurólogos hablan inglés.
 Hablan inglés el 50% de los pediatras, es decir, $0.5 \cdot 10 = 5$ pediatras hablan inglés.
 Colocamos todos estos datos en una tabla.

	Cardiólogos	Neurólogos	Pediatras	TOTAL
Hablan inglés	48	18	5	
No hablan inglés				
TOTAL	60	30	10	100

Completamos la tabla.

	Cardiólogos	Neurólogos	Pediatras	TOTAL
Hablan inglés	48	18	5	71
No hablan inglés	12	12	5	29
TOTAL	60	30	10	100

Respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

3.2A De los 100 asistentes son 71 los que hablan inglés. La probabilidad de que el asistente seleccionado hable inglés vale $\frac{71}{100} = 0.71$.

3.2B Hay 29 asistentes que no hablan inglés y son 12 los neurólogos que no hablan inglés. La probabilidad de que el asistente elegido que no habla inglés sea neurólogo tiene un valor aproximado de $\frac{12}{29} \approx 0.4138$.

3.2C De los 100 asistentes son 12 los cardiólogos que no hablan inglés. La probabilidad de que el asistente seleccionado sea cardiólogo y no hable inglés vale $\frac{12}{100} = 0.12$.