

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos**.
Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- En una Comunidad Autónoma, el 75% de las personas reside en núcleos urbanos, el 10% en núcleos rurales, y, el 15% restante, en núcleos periurbanos. En estos núcleos, las personas que viven de alquiler suponen el 40% en los urbanos, el 10% en los rurales y el 30% en los periurbanos.

- a) Calcula la probabilidad de que una persona, elegida al azar, viva de alquiler. **(1 punto)**
- b) Si una persona, elegida al azar, vive de alquiler, calcula la probabilidad de que lo haga en un núcleo urbano. **(1 punto)**
- c) Si se seleccionan al azar dos personas, calcula la probabilidad de que una de ellas resida en un núcleo rural y la otra en uno periurbano. **(0.5 puntos)**

Solución: Llamando U = “El núcleo es urbano”, R = “El núcleo es rural”, P = “El núcleo es periurbano” y A = “La persona vive de alquiler”, se tiene:

$$P(U) = 0.75 \quad P(A/U) = 0.4$$

$$P(R) = 0.1 \quad P(A/R) = 0.1$$

$$P(P) = 0.15 \quad P(A/P) = 0.3$$

- a) Por el teorema de la probabilidad total, $P(A) = P(A/U)P(U) + P(A/R)P(R) + P(A/P)P(P)$, por lo que $P(A) = 0.4 \cdot 0.75 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.15 = 0.355$ **(0.5 puntos por el planteamiento y 0.5 puntos por la solución correcta)**

- b) Utilizando el teorema de Bayes, $P(U/A) = \frac{P(A/U)P(U)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{0.355} = \frac{0.3}{0.355} \approx 0.845$ **(0.5 puntos por el planteamiento y 0.5 puntos por la solución correcta)**

- c) El suceso “Una persona reside en un núcleo rural y otra en uno periurbano” es la unión de “la primera persona seleccionada reside en un núcleo rural y la segunda en uno periurbano” y “la primera persona seleccionada reside en un núcleo periurbano y la segunda en uno rural”. Al ser disjuntos, la probabilidad de la unión es la suma de probabilidades, es decir, $P(R)P(P) + P(P)P(R) = 2 \cdot 0.1 \cdot 0.15 = 0.03$ **(0.5 puntos)**

Ejercicio 2.- Un grupo de 30 alumnos de 2º de bachillerato realiza una votación a fin de determinar el campus universitario que prefieren visitar: Ciudad Real, Cuenca y Toledo. El número de los que prefieren Ciudad Real triplica al número de los que prefieren Toledo. El 40 % de los que prefieren Cuenca coincide con la quinta parte de la suma de los que prefieren los otros dos lugares. Halla el número de votos que obtuvo cada campus. **(Planteamiento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto)**

Solución:

Llamando x = “número de alumnos y alumnas que prefieren Ciudad Real”, y = “número de alumnos y alumnas que prefieren Cuenca”, z = “número de alumnos y alumnas que prefieren Toledo”.

El sistema que se plantea es:
$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x - 3z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad (0.5 \text{ puntos cada ecuación bien planteada})$$

La solución del sistema es: $(x, y, z) = (15, 10, 5)$ puntos. Por tanto, 15 prefieren ir a Ciudad Real, 10 prefieren ir a Cuenca y 5 quieren ir a Toledo. **(0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.5 puntos por la solución correcta)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leq k \\ -3x^2 + 3 & \text{si } x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = -1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.75 puntos)**

Solución:

a.1) Como en ambas ramas la función es continua, hay que comprobarlo en el punto $x = k$. Si $\lim_{x \rightarrow k^-} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow k^+} -3x^2 + 3$, la ecuación $k^2 + 4k + 3 = -3k^2 + 3 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k = 0$ tiene como soluciones $k = 0$ y $k = -1$. **(0.25 puntos por las condiciones de continuidad, 0.25 por cada límite y 0.25 puntos por la solución correcta)**

a.2) Buscando los extremos relativos de la función y evaluando la segunda derivada,

$$0 = f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ -6x & \text{si } x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 & f''(-2) = 2 > 0 \\ x = 0 & f''(0) = -6 < 0 \end{cases}$$

En el punto $x = -2$ hay un mínimo relativo ($f(-2) = -1$) y en $x = 0$ hay un máximo relativo ($f(0) = 3$). En el punto $x = -1$ no hay extremo. **(0.25 puntos por la derivada de la primera rama, 0.25 puntos por la de la segunda y 0.25 puntos por la solución correcta)**

a.3) Para estudiar el crecimiento o decrecimiento, evaluamos el signo de la primera derivada,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ -6x & \text{si } x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } x < -2 \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Luego la función es decreciente en los intervalos $]-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$, y es creciente en el intervalo $(-2, 0)$. **(0.25 puntos por evaluación de cada rama y 0.25 puntos por la solución correcta)**

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Apartado b) El volumen de agua, en millones de litros, almacenado por el embalse de Alarcón a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t en años viene dado por la función: $V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$ con $0 \leq t \leq 11$.

- b.1) La cantidad de agua almacenada en el último año. **(0.25 puntos)**
- b.2) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo. **(1 punto)**
- b.3) El volumen máximo que se alcanzó en ese periodo. **(0.25 puntos)**
- b.4) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $AXA^{-1} = B$. **(1 punto)**

Solución:

- b.1) El último año se almacenó $V(11) = 8.407$ millones de litros **(0.25 puntos)**
- b.2) Resolviendo la condición de máximo $V'(t) = 3t^2 - 48t + 180 \Rightarrow V'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6; t = 10$
 $V''(t) = 6t - 48; \begin{cases} V''(6) = -12 < 0 \Rightarrow t = 6 \text{ es máximo} \\ V''(10) = 12 > 0 \Rightarrow t = 10 \text{ es mínimo} \end{cases}$ **(0.25 puntos por la derivada, 0.25 por**

cada extremo y 0.25 por solución correcta)

- b.3) $V(6) = 8.432$ millones de litros de agua. **(0.25 puntos)**
- b.4) $AXA^{-1} = B \Leftrightarrow X = A^{-1}BA$. Como $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 16 & 17 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$
 $X = A^{-1}BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 17 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ -12 & -13 \end{pmatrix}$ **(0.5 puntos por la inversa de A, 0.25 puntos por BA y 0.25 puntos por la solución correcta)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Un fabricante de abanicos dispone de dos modelos, A y B. El modelo A requiere, para su fabricación, 40 cm² de papel, 80 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El modelo B requiere: 60 cm² de papel, 160 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El coste de producción de cada modelo es de 1.20 € el de A y 1.30 € el de B. El precio de venta es de 3 € cada uno, independientemente del modelo. Teniendo en cuenta que las existencias son de 3000 cm² de papel, 7200 cm² de lámina de madera y 70 enganches.

- a.1) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(1.5 puntos)**
- a.2) Determina el número de abanicos que deben fabricarse y venderse para que el beneficio sea máximo y encuentra dicho beneficio máximo. **(1 punto)**

Solución:

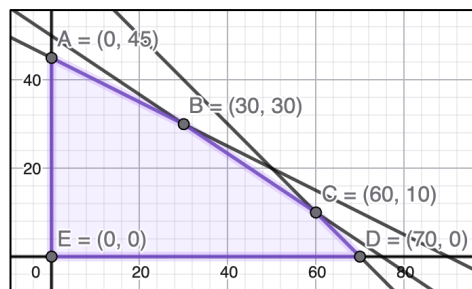
a.1) Sea x = “número de abanicos del tipo A”, y = “número de abanicos del tipo B”.

El programa que hay que resolver es el siguiente:

$$\text{Beneficio}(x, y) = (3 - 1.2)x + (3 - 1.3)y$$

con las restricciones:

$$\text{s.a: } \begin{cases} x + y \leq 70 \\ 40x + 60y \leq 3000 \\ 80x + 160y \leq 7200 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



(0.5 puntos por la función objetivo; 0.5 puntos por las restricciones y 0.5 puntos por la región factible)

a.2) El beneficio en cada uno de los vértices es: Beneficio(A) = 76.50 €; Beneficio(B) = 105 €; Beneficio(C) = 125 €; Beneficio(D) = 126 €; Beneficio(E) = 0 €. Por tanto, el beneficio será máximo cuando se vendan 70 abanicos del tipo A. **(0.5 puntos por evaluar los puntos y 0.5 puntos por la respuesta correcta del máximo)**

Apartado b) Una empresa fitosanitaria afirma que la duración, en días, del efecto de su fungicida sigue una distribución normal con una desviación típica de $\sigma = 6$ días. Se suministra el fungicida a una muestra aleatoria de 16 plantas y se observa que la duración media del efecto es de 16 días. Con un nivel de confianza del 95%,

b.1) Obtén un intervalo de confianza para la duración media poblacional del efecto. **(1 punto)**

b.2) Explica, justificando la respuesta, cuál sería la amplitud del intervalo de confianza anterior si se aumenta la muestra a 64 plantas. **(0.75 puntos)**

b.3) Si se desea que una duración media de 14 días del efecto no esté contenida en el intervalo del apartado b.1), justifique si se debe aumentar o disminuir el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

b.1) $z_{0.975} = 1.96$, $I.C._{0.95} = \left(\bar{x} \pm z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(16 \pm 1.96 \cdot \frac{6}{\sqrt{16}} \right) = (13.06, 18.94)$ **(Obtención del cuantil, 0.25 puntos; planteamiento del intervalo, 0.5 puntos; solución, 0.25)**

b.2) Si aumenta el tamaño muestral cuatro veces (hasta 64), se reduce la desviación típica de la media muestral a la mitad, por lo que la amplitud del intervalo también se reduce a la mitad. **(Referencia al tamaño muestral, 0.25 puntos; justificación, 0.5 puntos)**



Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- b.3) El valor $\mu = 14$ está en el intervalo al 95% de confianza; para que no lo esté, es necesario reducir la amplitud del intervalo de confianza, lo que se puede conseguir disminuyendo el cuantil de la distribución Z, es decir, disminuyendo el nivel de confianza. **(Conclusión, 0.25 puntos; justificación, 0.5 puntos)**