



Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2025-2026

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones para realizar el examen: En algunos apartados existe la posibilidad de elegir entre dos preguntas. En caso de responder a más preguntas o tareas de los establecidos en cada bloque sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachado.

Criterios generales: Las respuestas a las preguntas o tareas deben realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución, con el rigor y la precisión necesarios, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, y utilizando argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea. En las preguntas o tareas en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.

Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0.25 puntos en cada pregunta o tarea.

Ortografía y redacción: Con carácter general se penalizará la incorrección gramatical de la siguiente manera: Los 2 primeros errores ortográficos no se penalizarán. Se comenzará a deducir 0.10 puntos por cada falta ortográfica a partir de la tercera, hasta alcanzar la máxima penalización de 1 punto. Cuando se repita la misma falta de ortografía se contará como una sola. Por errores en la sintaxis, el vocabulario y la presentación se podrá deducir un máximo de 0.50 puntos.

Materiales: Se permitirá una calculadora no gráfica, no programable. También se podrá utilizar una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.

APARTADO A (4 puntos)

Resuelve, razonando las respuestas, los dos problemas de este apartado:

A1. Se sabe que el 70% de los turistas de una ciudad visita algún restaurante y el 30% pernocta en la ciudad y visita algún restaurante. Entre los que pernoctan, el 60% visita algún restaurante. Se pide:

- Calcular la probabilidad de que un turista pernocte en la ciudad. ¿Son independientes los sucesos “visitar algún restaurante” y “pernoctar en la ciudad”? **(de 0 a 1.25 puntos)**
- Calcular la probabilidad de que un turista o bien pernocte en la ciudad o bien visite algún restaurante. **(de 0 a 0.75 puntos)**

A2. En el último año pernoctaron en la ciudad 1500 turistas en hoteles, 2500 en apartamentos y 1000 en autocaravanas. Se decide hacer un estudio sobre el gasto medio de estos turistas, realizando una encuesta entre 400 de ellos.

- Si atendemos a criterios de proporcionalidad, determinar a cuántos turistas habrá que seleccionar en cada grupo (hoteles, apartamentos, autocaravanas). **(de 0 a 1 punto)**
- Los turistas de autocaravana tuvieron un gasto medio diario de 40 euros. Considerando la variable gasto con distribución normal y desviación típica 15 euros, calcular un intervalo de confianza al 90% para el gasto medio de este tipo de turistas. **(de 0 a 1 punto)**

APARTADO B (3 puntos)

Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

B1. a) Calcula las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -11 \\ 4 & -6 & -16 \end{pmatrix} \\ 5X + 2Y = \begin{pmatrix} 32 & 26 & 20 \\ 29 & 23 & 17 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(de 0 a 2 puntos)

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & m-1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, determina para qué valores de

m no existe la inversa de $A + B$.

(de 0 a 1 punto)

B2. En una heladería solo venden tres tipos de helados: de nata, de fresa y de chocolate y no se pueden mezclar los sabores. Cierto día, tres amigos se tomaron, cada uno, un solo helado, pero de diferente sabor. Entregaron un billete de 10€ y les devolvieron dos monedas de 1€ y una de 2€. Además, uno de ellos se dio cuenta de que 4 helados de nata y 2 de fresa costaban lo mismo que 4 de chocolate y que cada helado de fresa valía 50 céntimos menos que uno de chocolate. Calcula el precio de cada tipo de helado.

(de 0 a 3 puntos)

APARTADO C (3 puntos)

Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

C1. La sesión bursátil dura 8 horas de forma ininterrumpida. La cotización (en euros) de cada acción de una determinada empresa en bolsa, $C(t)$, depende del tiempo transcurrido desde que se inició la sesión bursátil, t en horas, de acuerdo con la función:

$$C(t) = 200 - 63t + 15t^2 - t^3 \quad 0 \leq t \leq 8$$

Calcular:

a) Los valores de cotización de cada acción al inicio y al término de la sesión bursátil.

(de 0 a 0.5 puntos)

b) Los instantes en los que la acción alcanza su cotización máxima y mínima y los valores máximo y mínimo que alcanza la acción.

(de 0 a 1.75 puntos)

c) Los intervalos de tiempo donde la cotización de la acción crece y en los que decrece.

(de 0 a 0.75 puntos)

C2. En una empresa de mensajería, el coste de envío de un paquete, $C(x)$ en euros, depende de su peso, x en kilogramos, y se determina de la siguiente manera:

$$C(x) = \begin{cases} x^2 + Ax - B & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 5Ax + 4B & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

a) Calcular los valores de A y B para que $C(x)$ sea una función continua y el coste de un paquete de 5 kilogramos sea de 38 euros.

(de 0 a 1.5 puntos)

b) Para $A = -8$ y $B = -15$, determinar el área encerrada por la función $C(x)$ y el eje OX entre $x = 2$ y $x = 4$.

(de 0 a 1.5 puntos)

ANEXO TABLA DISTRIBUCIÓN NORMAL

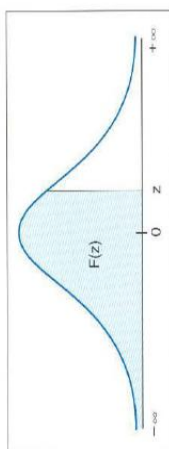


Tabla de distribución

normal $N(0,1)$

$$F(z) = P(Z \leq z)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8706	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

SOLUCIONES

A1. Se sabe que el 70% de los turistas de una ciudad visita algún restaurante y el 30% pernocta en la ciudad y visita algún restaurante. Entre los que pernoctan, el 60% visita algún restaurante. Se pide:

- a) Calcular la probabilidad de que un turista pernocte en la ciudad. ¿Son independientes los sucesos “visitar algún restaurante” y “pernoctar en la ciudad”? **(de 0 a 1.25 puntos)**
 b) Calcular la probabilidad de que un turista o bien pernocte en la ciudad o bien visite algún restaurante. **(de 0 a 0.75 puntos)**

Llamamos R a “el turista visita algún restaurante”, N a “el turista pernocta en la ciudad”. Por los datos proporcionados sabemos que $P(R) = 0.70$; $P(N \cap R) = 0.30$, $P(R/N) = 0.60$.

- a) Nos piden calcular $P(N)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/N) = \frac{P(R \cap N)}{P(N)} \Rightarrow 0.6 = \frac{0.3}{P(N)} \Rightarrow P(N) = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

La probabilidad de que un turista pernocte en la ciudad es de 0.5.

Para que los sucesos R y N sean independientes debe cumplirse que $P(R \cap N) = P(R)P(N)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(R \cap N) = 0.3 \\ P(R)P(N) = 0.7 \cdot 0.5 = 0.35 \end{array} \right\} \Rightarrow P(R \cap N) = 0.3 \neq 0.35 = P(R)P(N)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos R y N no son independientes.

- b) Debemos calcular $P(N \cup R)$. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(N \cup R) = P(N) + P(R) - P(N \cap R) = 0.5 + 0.7 - 0.3 = 0.9$$

La probabilidad de que un turista o bien pernocte en la ciudad o bien visite algún restaurante es de 0.9.

A2. En el último año pernoctaron en la ciudad 1500 turistas en hoteles, 2500 en apartamentos y 1000 en autocaravanas. Se decide hacer un estudio sobre el gasto medio de estos turistas, realizando una encuesta entre 400 de ellos.

a) Si atendemos a criterios de proporcionalidad, determinar a cuántos turistas habrá que seleccionar en cada grupo (hoteles, apartamentos, autocaravanas). **(de 0 a 1 punto)**

b) Los turistas de autocaravana tuvieron un gasto medio diario de 40 euros. Considerando la variable gasto con distribución normal y desviación típica 15 euros, calcular un intervalo de confianza al 90% para el gasto medio de este tipo de turistas. **(de 0 a 1 punto)**

a) La proporción de encuestados es $\frac{400}{1500 + 2500 + 1000} = \frac{400}{5000} = 0.08$.

Aplicamos esta proporción a cada grupo de turistas.

Habrà que encuestar a $0.08 \cdot 1500 = 120$ turistas que han pernoctado en hoteles.

Habrà que encuestar a $0.08 \cdot 2500 = 200$ turistas que han pernoctado en apartamentos.

Habrà que encuestar a $0.08 \cdot 1000 = 80$ turistas que han pernoctado en autocaravanas.

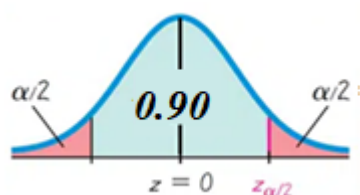
b) Consideramos X la variable que nos da el gasto de los turistas de autocaravana.

$$X = N(\mu, 15)$$

La muestra es de tamaño $n = 80$. La media muestral es $\bar{x} = 40$ euros.

El nivel de confianza del 90% significa que $1 - \alpha = 0.90$. Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{15}{\sqrt{80}} \approx 2.76 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (40 - 2.76, 40 + 2.76) = (37.24, 42.76)$$

B1. a) Calcula las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -11 \\ 4 & -6 & -16 \end{pmatrix} \\ 5X + 2Y = \begin{pmatrix} 32 & 26 & 20 \\ 29 & 23 & 17 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{de 0 a 2 puntos})$$

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & m-1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, determina para qué valores de m no existe la inversa de $A + B$. (de 0 a 1 punto)

a) Resolvemos el sistema matricial.

$$\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -11 \\ 4 & -6 & -16 \end{pmatrix} \\ 5X + 2Y = \begin{pmatrix} 32 & 26 & 20 \\ 29 & 23 & 17 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10X + 15Y = -5 \begin{pmatrix} 9 & -1 & -11 \\ 4 & -6 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & 5 & 55 \\ -20 & 30 & 80 \end{pmatrix} \\ 10X + 4Y = 2 \begin{pmatrix} 32 & 26 & 20 \\ 29 & 23 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 52 & 40 \\ 58 & 46 & 34 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \Rightarrow 19Y = \begin{pmatrix} 19 & 57 & 95 \\ 38 & 76 & 114 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 19 & 57 & 95 \\ 38 & 76 & 114 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 2X = 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -1 & -11 \\ 4 & -6 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -1 & -11 \\ 4 & -6 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 10 & 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 10 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

b) Hallamos la expresión de la matriz $A + B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & m-1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 4 & m \end{pmatrix}$$

Para que no exista la inversa el determinante de la matriz debe ser nulo.

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 4 & m \end{vmatrix} = m^2 + \cancel{8} - 4 + \cancel{2m} - \cancel{2m} - \cancel{8} = m^2 - 4$$

$$|A + B| = 0 \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \sqrt{4} = \pm 2$$

Para $m = -2$ y $m = 2$ no existe la inversa de la matriz $A + B$.

B2. En una heladería solo venden tres tipos de helados: de nata, de fresa y de chocolate y no se pueden mezclar los sabores. Cierta día, tres amigos se tomaron, cada uno, un solo helado, pero de diferente sabor. Entregaron un billete de 10€ y les devolvieron dos monedas de 1€ y una de 2€. Además, uno de ellos se dio cuenta de que 4 helados de nata y 2 de fresa costaban lo mismo que 4 de chocolate y que cada helado de fresa valía 50 céntimos menos que uno de chocolate. Calcula el precio de cada tipo de helado. **(de 0 a 3 puntos)**

Llamamos “x” al precio de un helado de nata, “y” al precio de un helado de fresa y “z” al precio de un helado de chocolate. Usamos la información proporcionada para obtener las ecuaciones que nos permitirán hallar los precios de cada tipo de helado.

Cierta día, tres amigos se tomaron, cada uno, un solo helado, pero de diferente sabor. Entregaron un billete de 10€ y les devolvieron dos monedas de 1€ y una de 2€ →

$$x + y + z = 10 - 4.$$

4 helados de nata y 2 de fresa costaban lo mismo que 4 de chocolate → $4x + 2y = 4z$.

Cada helado de fresa valía 50 céntimos menos que uno de chocolate → $y = z - 0.5$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 - 4 \\ 4x + 2y = 4z \\ y = z - 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x + y = 2z \\ y = z - 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z - 0.5 + z = 6 \\ 2x + z - 0.5 = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z = 6.5 \\ 2x - 0.5 = z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2(2x - 0.5) = 6.5 \Rightarrow x + 4x - 1 = 6.5 \Rightarrow 5x = 7.5 \Rightarrow x = \frac{7.5}{5} = 1.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 2 \cdot 1.5 - 0.5 = 2.5} \Rightarrow \boxed{y = 2.5 - 0.5 = 2}$$

El precio de un helado de nata es 1.5 €, el de uno de fresa es 2 € y el precio de uno de chocolate es 2.5 €.

C1. La sesión bursátil dura 8 horas de forma ininterrumpida. La cotización (en euros) de cada acción de una determinada empresa en bolsa, $C(t)$, depende del tiempo transcurrido desde que se inició la sesión bursátil, t en horas, de acuerdo con la función:

$$C(t) = 200 - 63t + 15t^2 - t^3 \quad 0 \leq t \leq 8$$

Calcular:

- a) Los valores de cotización de cada acción al inicio y al término de la sesión bursátil. **(de 0 a 0.5 puntos)**
- b) Los instantes en los que la acción alcanza su cotización máxima y mínima y los valores máximo y mínimo que alcanza la acción. **(de 0 a 1.75 puntos)**
- c) Los intervalos de tiempo donde la cotización de la acción crece y en los que decrece. **(de 0 a 0.75 puntos)**

a) Determinamos el valor de $C(0)$ y de $C(8)$.

$$C(0) = 200 - 63 \cdot 0 + 15 \cdot 0^2 - 0^3 = 200$$

$$C(8) = 200 - 63 \cdot 8 + 15 \cdot 8^2 - 8^3 = 144$$

Al inicio de la sesión bursátil el precio de cada acción es de 200 € y al término de la sesión es de 144 €.

b) Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$C(t) = 200 - 63t + 15t^2 - t^3 \Rightarrow C'(t) = -63 + 30t - 3t^2$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow -63 + 30t - 3t^2 = 0 \Rightarrow -21 + 10t - t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-21)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-10+4}{-2} = 3 = t \\ \frac{-10-4}{-2} = 7 = t \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos obtenidos.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale

$$C'(1) = -63 + 30 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = -36 < 0. \text{ La función decrece en } [0, 3).$$

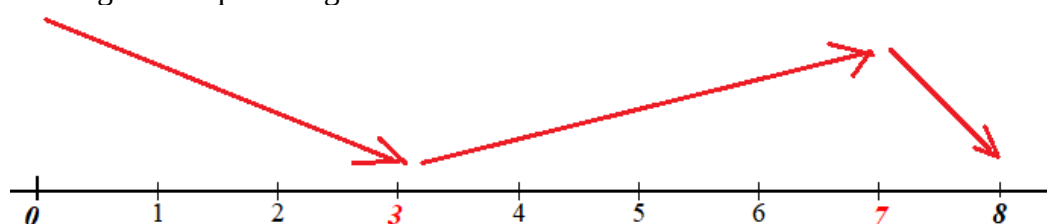
- En el intervalo $(3, 7)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale

$$C'(5) = -63 + 30 \cdot 5 - 3 \cdot 5^2 = 12 > 0. \text{ La función crece en } (3, 7).$$

- En el intervalo $(7, 8]$ tomamos $t = 7.5$ y la derivada vale

$$C'(7.5) = -63 + 30 \cdot 7.5 - 3 \cdot 7.5^2 = -6.75 < 0. \text{ La función decrece en } (7, 8].$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $t = 3$ y un máximo relativo en $t = 7$. Valoramos la acción en esos momentos y en los extremos del intervalo para decidir cual es el máximo y el mínimo absoluto.

$$C(0) = 200 \text{ Máximo}$$

$$C(3) = 200 - 63 \cdot 3 + 15 \cdot 3^2 - 3^3 = 119 \text{ Mínimo}$$

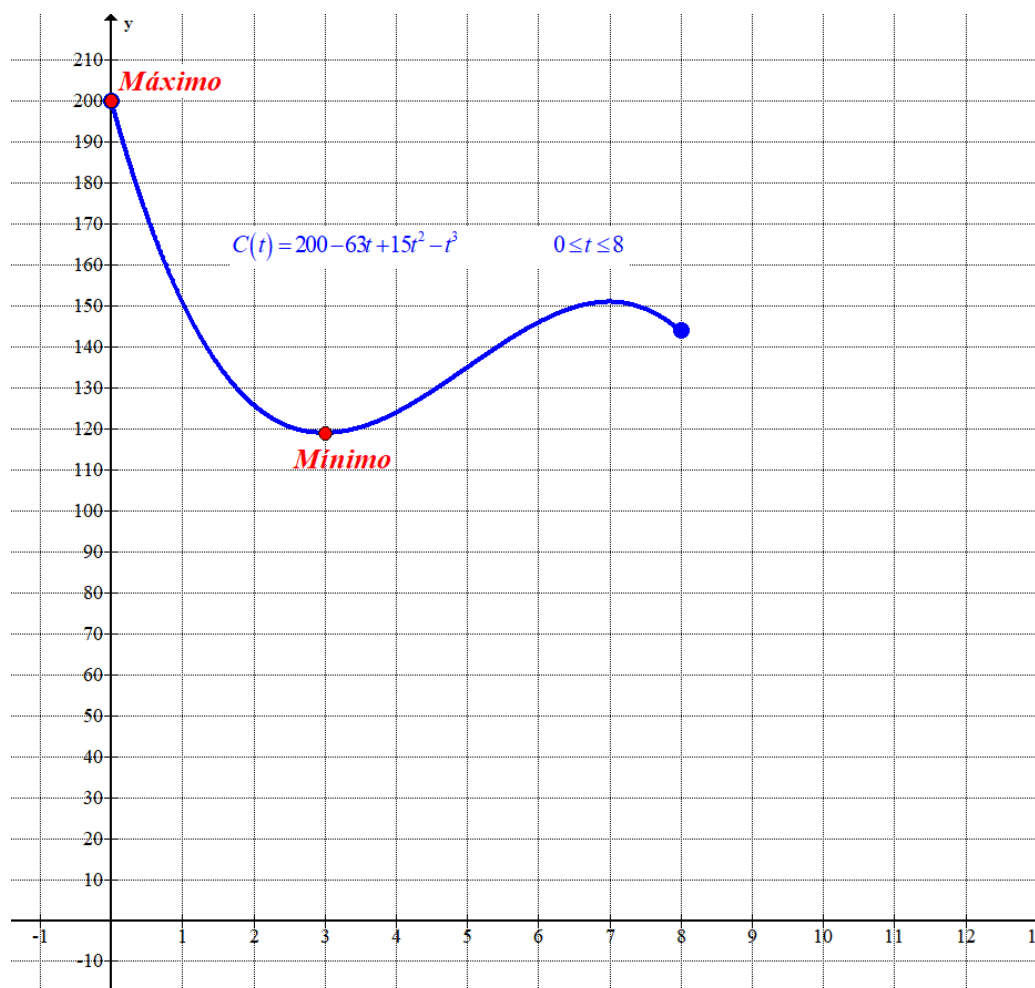
$$C(7) = 200 - 63 \cdot 7 + 15 \cdot 7^2 - 7^3 = 151$$

$$C(8) = 144$$

El precio mínimo de la acción es de 119 euros y se obtiene pasadas 3 horas de la apertura de la sesión bursátil.

El precio máximo de la acción es de 200 euros y se obtiene al inicio de la sesión bursátil.

- b) Utilizamos el estudio del crecimiento y decrecimiento de la función hecho en el apartado anterior. La función decrece desde el inicio de la sesión hasta pasadas 3 horas, crece entre las 3 y las 7 horas, volviendo a decrecer en la última hora de la sesión bursátil.



C2. En una empresa de mensajería, el coste de envío de un paquete, $C(x)$ en euros, depende de su peso, x en kilogramos, y se determina de la siguiente manera:

$$C(x) = \begin{cases} x^2 + Ax - B & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 5Ax + 4B & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

- a) Calcular los valores de A y B para que $C(x)$ sea una función continua y el coste de un paquete de 5 kilogramos sea de 38 euros. **(de 0 a 1.5 puntos)**
- b) Para $A = -8$ y $B = -15$, determinar el área encerrada por la función $C(x)$ y el eje OX entre $x = 2$ y $x = 4$. **(de 0 a 1.5 puntos)**

a) Para ser continua la función debe de serlo en $x = 5$.

$$\left. \begin{aligned} C(5) &= 5A \cdot 5 + 4B = 4B + 25A \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} C(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} 5Ax + 4B = 4B + 25A \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} C(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} x^2 + Ax - B = 25 + 5A - B \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} C(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} C(x) = C(5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4B + 25A = 25 + 5A - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20A + 5B = 25 \Rightarrow \boxed{4A + B = 5}$$

El coste de un paquete de 5 kilogramos es de 38 euros $\rightarrow C(5) = 38$.

$$C(5) = 38 \Rightarrow 5A \cdot 5 + 4B = 38 \Rightarrow \boxed{25A + 4B = 38}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} 25A + 4B &= 38 \\ 4A + B &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 25A + 4B &= 38 \\ B &= 5 - 4A \end{aligned} \right\} \Rightarrow 25A + 4(5 - 4A) = 38 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25A + 20 - 16A = 38 \Rightarrow 9A = 18 \Rightarrow \boxed{A = 2} \Rightarrow \boxed{B = 5 - 4 \cdot 2 = -3}$$

Los valores buscados son $A = 2$ y $B = -3$.

- b) Para $A = -8$ y $B = -15$ la función queda $C(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 15 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ -40x - 60 & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$.

En el intervalo $[2, 4]$ la función tiene la expresión $C(x) = x^2 - 8x + 15$.

Averiguamos si la función corta el eje OX en el intervalo $[2, 4]$.

$$C(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{8+2}{2} = 5 \notin [2, 4] \\ \frac{8-2}{2} = 3 \in [2, 4] \end{cases}$$

Como la gráfica de la función corta el eje en $x = 3 \in [2, 4]$ el área que deseamos calcular la obtenemos como la suma del valor absoluto de la integral definida de 2 a 3 de la función y el valor absoluto de la integral definida de 3 a 4 de la función.

$$\int_2^3 x^2 - 8x + 15 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x \right]_2^3 = \left[\frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 \right] =$$

$$= 9 - 36 + 45 - \frac{8}{3} + 16 - 30 = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$\int_3^4 x^2 - 8x + 15 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x \right]_3^4 = \left[\frac{4^3}{3} - 4 \cdot 4^2 + 15 \cdot 4 \right] - \left[\frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 \right] =$$

$$= \frac{64}{3} - 64 + 60 - 9 + 36 - 45 = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

El área encerrada por la función $C(x)$ y el eje OX entre $x = 2$ y $x = 4$ es la suma de los valores absolutos de las integrales definidas calculadas: $\frac{4}{3} + \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$ unidades cuadradas.

