

Cada estudiante deberá resolver cuatro ejercicios.

El Ejercicio 1 será obligatorio y de carácter competencial. Tendrá una puntuación máxima de 3 puntos.

El Ejercicio 2 será obligatorio y de carácter competencial y tendrá una puntuación máxima de 2 puntos.

El Ejercicio 3 tendrá una puntuación máxima de 2 puntos y se podrá elegir entre dos opciones (*Opción 1 / Opción 2*).

El Ejercicio 4 tendrá una puntuación máxima de 3 puntos y se podrá elegir entre dos opciones (*Opción 1 / Opción 2*).

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si algún alumnado es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

EJERCICIO 1 (3 PUNTOS)

1. Resuelve los apartados a) y b):

a) (1 PUNTO) Según los resultados obtenidos en una investigación relativa al ocio digital juvenil, se observa que el 80% de los alumnos de cierta universidad está suscrito a una plataforma musical, el 60% lo está a una de video y, además, el 90% tiene al menos una de las dos suscripciones. Se elige un alumno al azar, se pide:

a.1. Calcula la probabilidad de que esté suscrito a ambos tipos de plataformas.

a.2. Si está suscrito a una plataforma de video, calcula la probabilidad de que no lo esté a una de música.

b) (2 PUNTOS) El peso de cierto tipo de quesos producidos en una quesería sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 60 gramos.

b.1. Se toma una muestra aleatoria de 36 quesos obteniéndose una media muestral de 980 gramos. Calcula un intervalo de confianza al 97% para estimar μ .

b.2. Determina cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que al estimar μ , con el mismo nivel de confianza, el error cometido sea, a lo sumo, de 10 gramos.

EJERCICIO 2 (2 PUNTOS)

2. En una sastrería se confeccionan dos tipos de prendas A y B. Para fabricarlas se usan dos recursos: horas de corte y horas de costura. Cada prenda A requiere de 3 horas de corte y 2 de costura; cada prenda B, de 1 y 4 horas respectivamente. El taller dispone diariamente de un máximo de 15 horas para el corte y de 20 horas para la costura. Los ingresos obtenidos por cada unidad de A son de 100 € y por cada una de B, 120 €. Se pide:

- a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal para maximizar los ingresos de la sastrería.
- b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible S.
- c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región S.
- d) **(0,5 PUNTOS)** Calcula el número de prendas de cada tipo a confeccionar para que los ingresos sean máximos. Indica el valor de estos ingresos.

EJERCICIO 3 (2 PUNTOS)

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2):

(Opción 1)

3.1. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$, a: número real. Se pide:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de "a" para que se cumpla: $M^2 = I$. Para ese valor de "a", calcula la matriz inversa de M y halla M^{21} .
- b) **(1 PUNTO)** Para $a = 1$: calcula una matriz X que verifique la igualdad: $M \cdot X + M^T = 2I$.

(I representa la matriz identidad orden 2 y M^T la matriz traspuesta de M)

(Opción 2)

3.2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) **(0,75 PUNTOS)** Calcula A^2 y calcula el determinante de la matriz inversa de A.
- b) **(1,25 PUNTOS)** Calcula una matriz X que verifique la igualdad: $X \cdot A = B^T + I$.
(B^T : matriz traspuesta de B, I: matriz identidad orden 3)

EJERCICIO 4 (3 PUNTOS)

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2):

(Opción 1)

4.1. Se ha realizado un estudio sobre el comportamiento de cierta sustancia en el organismo. Su concentración en sangre (medida en mg/l) viene modelada por la función:

$$C(x) = \frac{a x}{x^2 + 4}, \quad x > 0, \quad (a: \text{número real})$$

siendo "x" el tiempo, en horas, transcurrido desde su administración. Se pide:

- a) **(0,75 PUNTOS)** Calcula el valor de "a" sabiendo que la concentración de la sustancia en sangre transcurridas 4 horas es de 0,20 mg/l.

Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$ e interpreta el resultado sabiendo lo que representan x y $C(x)$.

- b) **(1,25 PUNTOS)** Para $a = 1$: Calcula los intervalos de tiempo en los que la concentración aumenta y aquellos en los que disminuye. Estudia si la función posee o no algún extremo relativo, y en caso afirmativo, razona si se trata de un máximo o de un mínimo.

- c) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de " a " para que se verifique la igualdad:

$$\int_1^2 (x^2 + 4) C(x) dx = 6.$$

(Opción 2)

4.2. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3}$ (a, b : números reales), se pide:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula los valores de " a " y " b " sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $P = (1, 3)$ y que la recta tangente a esta curva en P es paralela a la recta de ecuación $y = -5x + 2$.

- b) **(1 PUNTO)** Para $b = 4$, calcula el valor de " a " para que la función posea un extremo relativo en $x = 2$. Para este valor de " a ", indica si en $x = 2$ la función alcanza un máximo o un mínimo relativo.

- c) **(1 PUNTO)** Para $a = 2$, calcula el valor de " b " para que se verifique la igualdad:

$$\int_1^3 x^4 f(x) dx = 12.$$

Tabla. Distribución normal tipificada.

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0,1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0,2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0,3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0,4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0,5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0,6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0,7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0,8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0,9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1,0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1,1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1,2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1,3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1,4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1,5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1,6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1,7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1,8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1,9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2,0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2,1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2,2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2,3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2,4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2,6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2,7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974

PAU. MATEMATICAS CCSS.

EXAMEN 1

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

EJERCICIO 1 (3 PUNTOS)

- a) a.1. Saber las probabilidades que se desprenden del enunciado del problema (0,10 puntos) y la que le piden (0,10 puntos), calcular $P(\bar{M} \cap V)$ (0,30 puntos)
- a.2. Saber que le piden $P(\bar{M} / V)$ (0,10 puntos) y fórmula para calcularla (0,10 puntos), cálculo de $P(\bar{M} \cap V)$ (0,20 puntos), cálculo de $P(\bar{M} / V)$ (0,10 puntos).
- b) b.1. Indicar la fórmula del intervalo de confianza (0,25 puntos); Cálculo de $z_{\alpha/2}$ (0,5 puntos); indicar el intervalo pedido (0,25 puntos).
- b.2. Fórmula del error (0,50 puntos); despejar $\sqrt{n}$ (0,25 puntos); calcular "n" (0,25 puntos)

EJERCICIO 2 (2 PUNTOS)

- a) Plantear las restricciones del problema (0,30 puntos)
Expresión de la función objetivo (0,20 puntos)
- b) Representación gráfica de la región factible (0,50 puntos)
- c) Cálculo de las coordenadas de los vértices de la región factible (0,50 puntos)
- d) Evaluar la función objetivo en los vértices (0,20 puntos)
Calcular el número de prendas de cada tipo a producir (0,20 puntos)
Valor de los ingresos máximos (0,10 puntos)

EJERCICIO 3 (2 PUNTOS)

Opción 1

- 3.1. a) Calcular M^2 (0,35 puntos); plantear el sistema y valor de "a" (0,20 puntos), Matriz inversa de A (0,10 puntos), M^{21} (0,35 puntos).
- b) Para a= 1: cálculo de la matriz X (1 punto).

Opción 2

- 3.2. a) Calcular: A^2 (0,15 puntos), matriz inversa de A (0,30 puntos); $|A|$ (0,30 puntos).
- b) Cálculo de la matriz X (1,25 puntos).

EJERCICIO 4 (3 PUNTOS)

Opción 1

4.1. a) Calcular el valor de "a" (0,25 puntos), límite (0,30 puntos), interpretación del límite (0,20 puntos).

b) Cálculo de la derivada primera de la función (0,50 puntos); estudio de los signos de esta derivada y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento (0,40 puntos); determinar extremos relativos (0,35 puntos).

c) Integrar correctamente (0,40 puntos), regla de Barrow (0,40 puntos), resolver ecuación (0,20 puntos)

Opción 2

4.2. a) Obtener ecuación $f(1) = 3$ (0,15 puntos), calcular la derivada primera de f (0,50 puntos), imponer que $f'(1) = -5$ (0,25 puntos), resolver el sistema (0,10 puntos)

b) Saber $f'(2) = 0$ (0,50 puntos), en $x = 2$ se alcanza un mínimo relativo (0,50 puntos).

c) Integrar bien (0,40 puntos), regla de Barrow (0,40 puntos), resolver ecuación (0,20 puntos)