



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Curso 2025/2026

**ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES**

TIEMPO DE REALIZACIÓN: 1 HORA Y 30 MINUTOS

Cada estudiante deberá resolver cuatro ejercicios.

El Ejercicio 1 será obligatorio y de carácter competencial. Tendrá una puntuación máxima de 3 puntos.

El Ejercicio 2 será obligatorio y de carácter competencial y tendrá una puntuación máxima de 2 puntos.

El Ejercicio 3 tendrá una puntuación máxima de 2 puntos y se podrá elegir entre dos opciones (Opción 1 / Opción 2).

El Ejercicio 4 tendrá una puntuación máxima de 3 puntos y se podrá elegir entre dos opciones (Opción 1 / Opción 2).

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si algún alumnado es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

EJERCICIO 1 (3 PUNTOS)

1. Resuelve los apartados a) y b):

a) **(1 PUNTO)** Según los resultados obtenidos en una investigación relativa al ocio digital juvenil, se observa que el 80% de los alumnos de cierta universidad está suscrito a una plataforma musical, el 60% lo está a una de vídeo y, además, el 90% tiene al menos una de las dos suscripciones. Se elige un alumno al azar, se pide:

a.1. Calcula la probabilidad de que esté suscrito a ambos tipos de plataformas.

a.2. Si está suscrito a una plataforma de vídeo, calcula la probabilidad de que no lo esté a una de música.

b) **(2 PUNTOS)** El peso de cierto tipo de quesos producidos en una quesería sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 60 gramos.

b.1. Se toma una muestra aleatoria de 36 quesos obteniéndose una media muestral de 980 gramos. Calcula un intervalo de confianza al 97% para estimar μ .

b.2. Determina cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que al estimar μ con el mismo nivel de confianza, el error cometido sea, a lo sumo, de 10 gramos.

EJERCICIO 2 (2 PUNTOS)

2. En una sastrería se confeccionan dos tipos de prendas A y B. Para fabricarlas se usan dos recursos: horas de corte y horas de costura. Cada prenda A requiere de 3 horas de corte y 2 de costura; cada prenda B, de 1 y 4 horas respectivamente. El taller dispone diariamente de un máximo de 15 horas para el corte y de 20 horas para la costura. Los ingresos obtenidos por cada unidad de A son de 100 € y por cada una de B, 120 €. Se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal para maximizar los ingresos de la sastrería.

b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible S.

c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región S.

d) **(0,5 PUNTOS)** Calcula el número de prendas de cada tipo a confeccionar para que los ingresos sean máximos. Indica el valor de estos ingresos.

EJERCICIO 3 (2 PUNTOS)

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2):

(Opción 1)

3.1. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$, a : número real. Se pide:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “ a ” para que se cumpla: $M^2 = I$. Para ese valor de “ a ”, calcula la matriz inversa de M y halla M^{21} .
- b) **(1 PUNTO)** Para $a=1$: calcula una matriz X que verifique la igualdad: $MX + M^T = 2I$.

(I representa la matriz identidad orden 2 y M^T la matriz traspuesta de M)

(Opción 2)

3.2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) **(0.75 PUNTOS)** Calcula A^2 y calcula el determinante de la matriz inversa de A .
- b) **(1.25 PUNTOS)** Calcula una matriz X que verifique la igualdad: $X \cdot A = B^T + I$.
(B^T : matriz traspuesta de B , I : matriz identidad orden 2)

EJERCICIO 4 (3 PUNTOS)

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2):

(Opción 1)

4.1. Se ha realizado un estudio sobre el comportamiento de cierta sustancia en el organismo. Su concentración en sangre (medida en mg/l) viene modelada por la función:

$$C(x) = \frac{ax}{x^2 + 4} \quad x > 0, \quad (a: \text{número real})$$

siendo “ x ” el tiempo, en horas, transcurrido desde su administración. Se pide:

- a) **(0,75 PUNTOS)** Calcula el valor de “ a ” sabiendo que la concentración de la sustancia en sangre transcurridas 4 horas es de 0.20 mg/l.
Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$ e interpreta el resultado sabiendo lo que representan x y $C(x)$.
- b) **(1,25 PUNTOS)** Para $a=1$: Calcula los intervalos de tiempo en los que la concentración aumenta y aquellos en los que disminuye. Estudia si la función posee o no algún extremo relativo, y en caso afirmativo, razona si se trata de un máximo o de un mínimo.
- c) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “ a ” para que se verifique la igualdad:

$$\int_1^2 (x^2 + 4) C(x) dx = 6$$

(Opción 2)

4.2. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3}$ (a, b : números reales), se pide:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula los valores de “ a ” y “ b ” sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $P=(1, 3)$ y que la recta tangente a esta curva en P es paralela a la recta de ecuación $y = -5x + 2$.

- b) **(1 PUNTO)** Para $b = 4$, calcula el valor de “a” para que la función posea un extremo relativo en $x = 2$. Para este valor de “a”, indica si en $x = 2$ la función alcanza un máximo o un mínimo relativo.
- c) **(1 PUNTO)** Para $a = 2$, calcula el valor de “b” para que se verifique la igualdad:

$$\int_1^3 x^4 f(x) dx = 12$$

Tabla. Distribución normal tipificada.

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0,1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0,2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0,3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0,4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0,5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0,6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0,7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0,8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0,9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1,0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1,1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1,2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1,3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1,4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1,5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1,6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1,7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1,8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1,9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2,0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2,1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2,2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2,3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2,4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2,6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2,7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (3 PUNTOS)

a) **(1 PUNTO)** Según los resultados obtenidos en una investigación relativa al ocio digital juvenil, se observa que el 80% de los alumnos de cierta universidad está suscrito a una plataforma musical, el 60% lo está a una de vídeo y, además, el 90% tiene al menos una de las dos suscripciones. Se elige un alumno al azar, se pide:

a.1. Calcula la probabilidad de que esté suscrito a ambos tipos de plataformas.

a.2. Si está suscrito a una plataforma de vídeo, calcula la probabilidad de que no lo esté a una de música.

Llamamos M al suceso “el alumno está suscrito a una plataforma musical” y V a “el alumno está suscrito a una plataforma de vídeo”. Por los datos proporcionados sabemos que:

El 80% de los alumnos de cierta universidad está suscrito a una plataforma musical y el 60% lo está a una de vídeo $\rightarrow P(M) = 0.80$; $P(V) = 0.60$.

El 90% tiene al menos una de las dos suscripciones $\rightarrow P(M \cup V) = 0.90$.

a.1. Nos piden calcular el valor de $P(M \cap V)$. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(M \cup V) = 0.90 \Rightarrow P(M) + P(V) - P(M \cap V) = 0.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8 + 0.6 - P(M \cap V) = 0.9 \Rightarrow 0.8 + 0.6 - 0.9 = P(M \cap V) \Rightarrow \boxed{P(M \cap V) = 0.5}$$

La probabilidad de que el alumno elegido al azar esté suscrito a ambos tipos de plataformas es de 0.5.

a.2. Nos piden calcular $P(\bar{M} / V)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{M} / V) = \frac{P(\bar{M} \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V) - P(M \cap V)}{P(V)} = \frac{0.6 - 0.5}{0.6} = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.1667}$$

La probabilidad de que un alumno elegido al azar que está suscrito a una plataforma de vídeo no lo esté a una de música vale $\frac{1}{6} \approx 0.1667$.

EJERCICIO 1 (3 PUNTOS)

b) (2 PUNTOS) El peso de cierto tipo de quesos producidos en una quesería sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 60 gramos.

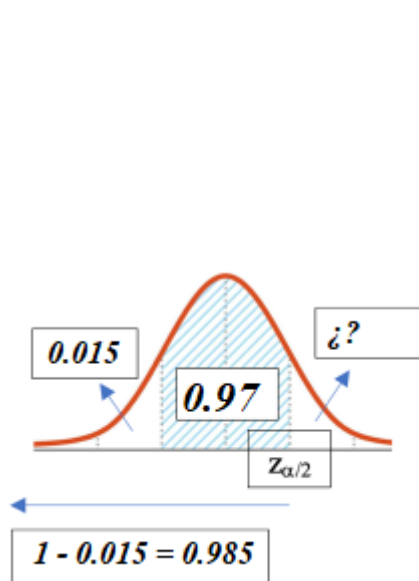
b.1. Se toma una muestra aleatoria de 36 quesos obteniéndose una media muestral de 980 gramos. Calcula un intervalo de confianza al 97% para estimar μ .

b.2. Determina cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que al estimar μ con el mismo nivel de confianza, el error cometido sea, a lo sumo, de 10 gramos.

b.1. Sea X = El peso de cierto tipo de quesos producidos en una quesería en gramos. $X = N(\mu, 60)$
Tamaño de la muestra = $n = 36$. El peso medio de la muestra es 980 gramos

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 97%.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279
0,1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675
0,2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064
0,3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443
0,4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808
0,5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157
0,6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486
0,7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794
0,8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078
0,9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340
1,0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577
1,1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790
1,2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980
1,3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147
1,4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292
1,5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418
1,6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525
1,7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616
1,8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693
1,9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756
2,0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808
2,1	.9824	.9826	.9828	.9834	.9836	.9842	.9846	.9850

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{60}{\sqrt{36}} = 21.7 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (980 - 21.7, 980 + 21.7) = (958.3, 1001.7)$$

b.2. Utilizamos la fórmula del error y despejamos n .

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 2.17 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10\sqrt{n} = 130.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{130.2}{10} = 13.02 \Rightarrow n = 13.02^2 = 169.5204$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 170 quesos.

2. En una sastrería se confeccionan dos tipos de prendas A y B. Para fabricarlas se usan dos recursos: horas de corte y horas de costura. Cada prenda A requiere de 3 horas de corte y 2 de costura; cada prenda B, de 1 y 4 horas respectivamente. El taller dispone diariamente de un máximo de 15 horas para el corte y de 20 horas para la costura. Los ingresos obtenidos por cada unidad de A son de 100 € y por cada una de B, 120 €. Se pide:
- (0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal para maximizar los ingresos de la sastrería.
 - (0,5 PUNTOS)** Representa la región factible S.
 - (0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región S.
 - (0,5 PUNTOS)** Calcula el número de prendas de cada tipo a confeccionar para que los ingresos sean máximos. Indica el valor de estos ingresos.

- a) Llamamos “x” al número de prendas A que se fabrican diariamente e “y” al número de prendas B que se fabrican diariamente. Hacemos una tabla con los datos proporcionados.

	Horas de corte	Horas de costura	Ingresos
Nº prendas A (x)	3x	2x	100x
Nº prendas B (y)	y	4y	120y
TOTALES	3x + y	2x + 4y	100x + 120y

Obtenemos las inecuaciones asociadas al problema de programación lineal que se nos plantea:

“El taller dispone diariamente de un máximo de 15 horas para el corte y de 20 horas para la costura” $\rightarrow 3x + y \leq 15; 2x + 4y \leq 20$.

Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 15 \\ 2x + 4y \leq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 15 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función que deseamos maximizar son los ingresos que vienen dados por la expresión $I(x, y) = 100x + 120y$.

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región S de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

$$3x + y = 15$$

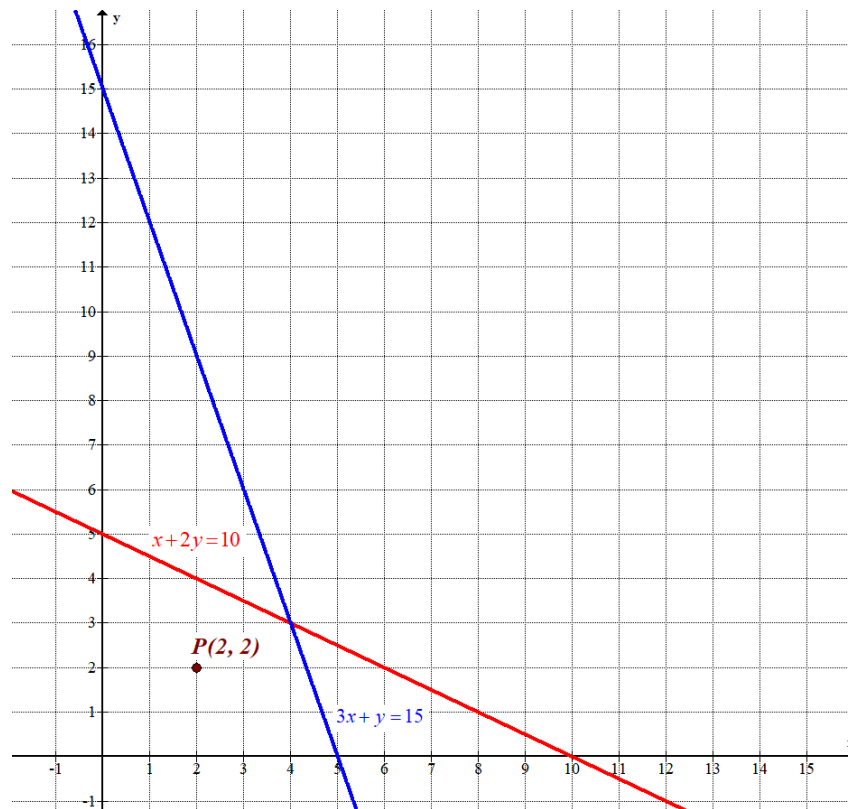
x	y = 15 - 3x
0	15
4	3
5	0

$$x + 2y = 10$$

x	y = $\frac{10 - x}{2}$
0	5
4	3
10	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

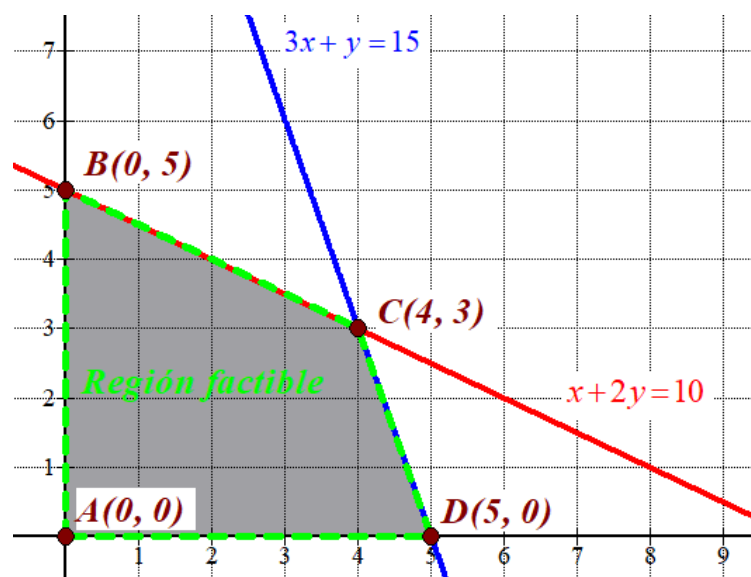


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 15 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región S es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(2, 2)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 2 \leq 15 \\ 2 + 2 \cdot 2 \leq 10 \\ 2 \geq 0; 2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen! }$$

Coloreamos de gris la región factible indicando las coordenadas de sus vértices.



c) Los vértices de la región factible son A(0, 0), B(0, 5), C(4, 3) y D(5, 0).

$$A \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 10 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + 2y = 10 \rightarrow 2y = 10 \rightarrow y = 5 \rightarrow B(0, 5)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 - 2y \\ 3x + y = 15 \end{cases} \rightarrow 30 - 6y + y = 15 \rightarrow -5y = -15 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 3 \rightarrow x = 10 - 2 \cdot 3 = 4 \rightarrow C(4, 3)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 15 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 3x + 0 = 15 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5 \rightarrow D(5, 0)$$

d) Valoramos la función objetivo $I(x, y) = 100x + 120y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 5) \rightarrow I(0, 5) = 100 \cdot 0 + 120 \cdot 5 = 600$$

$$C(4, 3) \rightarrow I(4, 3) = 100 \cdot 4 + 120 \cdot 3 = 760 \text{ Máximo}$$

$$D(5, 0) \rightarrow I(5, 0) = 100 \cdot 5 + 120 \cdot 0 = 500$$

Los ingresos máximos se obtiene en el punto C(4, 3).

El objetivo de maximizar los ingresos se consigue con la elaboración de 4 prendas tipo A y 3 del tipo B.

Los ingresos máximos que se pueden conseguir cumpliendo con las restricciones son de 760 € al día.

3.1. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$, a : número real. Se pide:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “ a ” para que se cumpla: $M^2 = I$. Para ese valor de “ a ”, calcula la matriz inversa de M y halla M^{21} .
- b) **(1 PUNTO)** Para $a=1$: calcula una matriz X que verifique la igualdad: $MX + M^T = 2I$.
(I representa la matriz identidad orden 2 y M^T la matriz traspuesta de M)

a) Buscamos el valor de a para que se cumpla $M^2 = I$.

$$M^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & a-a \\ a-a & 1+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 = 1 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

Se cumple la igualdad para $a=0$.

Para $a=0$ tenemos que $M^2 = I$, es decir, $M \cdot M = I$, por lo que la matriz inversa de M es la propia matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hallamos la expresión de M^{21} .

$$M^{21} = M^{20} \cdot M = (M^2)^{10} \cdot M = (I)^{10} \cdot M = I \cdot M = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Para $a=1$ la matriz queda $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallamos la inversa de la matriz M .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la igualdad planteada y determinamos la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} MX + M^T &= 2I \Rightarrow MX = 2I - M^T \Rightarrow X = M^{-1}(2I - M^T) = \\ &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1+1 & 1-3 \\ -1-1 & 1+3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para $a=1$ la matriz X solución de $MX + M^T = 2I$ tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3.2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (0.75 PUNTOS) Calcula A^2 y calcula el determinante de la matriz inversa de A.
 b) (1.25 PUNTOS) Calcula una matriz X que verifique la igualdad: $X \cdot A = B^T + I$.
 (B^T : matriz traspuesta de B, I: matriz identidad orden 2)

a) Obtenemos la expresión de la matriz A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Hemos obtenido que $A^2 = I$. Se cumple que $A \cdot A = I$, por lo que la matriz inversa de A es la propia matriz A. El determinante de la matriz inversa de A es igual que el determinante de A.

$$|A^{-1}| = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 + 0 = -1$$

El determinante de la matriz inversa de A vale -1.

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X \cdot A = B^T + I \Rightarrow X = (B^T + I) A^{-1} \Rightarrow \{A^{-1} = A\} \Rightarrow X = (B^T + I) A$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$B^T + I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (B^T + I) A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.1. Se ha realizado un estudio sobre el comportamiento de cierta sustancia en el organismo. Su concentración en sangre (medida en mg/l) viene modelada por la función:

$$C(x) = \frac{ax}{x^2 + 4} \quad x > 0, \quad (a: \text{número real})$$

siendo “x” el tiempo, en horas, transcurrido desde su administración. Se pide:

a) **(0,75 PUNTOS)** Calcula el valor de “a” sabiendo que la concentración de la sustancia en sangre transcurridas 4 horas es de 0.20 mg/l.

Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$ e interpreta el resultado sabiendo lo que representan x y C(x).

b) **(1,25 PUNTOS)** Para $a=1$: Calcula los intervalos de tiempo en los que la concentración aumenta y aquellos en los que disminuye. Estudia si la función posee o no algún extremo relativo, y en caso afirmativo, razona si se trata de un máximo o de un mínimo.

c) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “a” para que se verifique la igualdad:

$$\int_1^2 (x^2 + 4)C(x) dx = 6$$

a) Nos dicen que $C(4) = 0.2$.

$$\left. \begin{array}{l} C(x) = \frac{ax}{x^2 + 4} \\ C(4) = 0.2 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.2 = \frac{4a}{4^2 + 4} \Rightarrow 0.2 = \frac{4a}{20} \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

El valor buscado es $a=1$. La función queda $C(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \quad x > 0$.

Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{1}{+\infty}}{1 + \frac{4}{+\infty}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

La interpretación de este resultado es que la concentración en sangre de la sustancia tiende a ser cero con el paso de las horas.

b) Para $a=1$ la función queda $C(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \quad x > 0$.

Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$C(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \Rightarrow C'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 4) - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = 2; \quad x > 0}$$

La función presenta un punto crítico en $x = 2$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $C'(1) = \frac{4-1^2}{(1^2+4)^2} = \frac{3}{25} > 0$. La función crece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $C'(3) = \frac{4-3^2}{(3^2+4)^2} = \frac{-5}{169} < 0$.

La función decrece en $(2, +\infty)$.

La concentración en sangre aumenta en las dos primeras horas y va disminuyendo a partir de la segunda hora.

En $x=2$ se anula la primera derivada y la función crece antes y decrece después de este valor. La función tiene un máximo relativo en $x=2$. Este máximo es absoluto pues la función es continua en su intervalo de definición $(0, +\infty)$.

c) Calculamos primero la integral definida.

$$\int_1^2 (x^2 + 4)C(x) dx = \int_1^2 (x^2 + 4) \frac{ax}{x^2 + 4} dx = \int_1^2 ax dx = \left[\frac{ax^2}{2} \right]_1^2 = \frac{a \cdot 2^2}{2} - \frac{a \cdot 1^2}{2} = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$$

Averiguamos cuando esta integral definida vale 6.

$$\int_1^2 (x^2 + 4)C(x) dx = 6 \Rightarrow \frac{3}{2}a = 6 \Rightarrow \boxed{a = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4}$$

Para $a=4$ se cumple la igualdad.

4.2. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3}$ (a, b : números reales), se pide:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula los valores de “a” y “b” sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $P=(1, 3)$ y que la recta tangente a esta curva en P es paralela a la recta de ecuación $y = -5x + 2$.
- b) **(1 PUNTO)** Para $b = 4$, calcula el valor de “a” para que la función posea un extremo relativo en $x = 2$. Para este valor de “a”, indica si en $x = 2$ la función alcanza un máximo o un mínimo relativo.
- c) **(1 PUNTO)** Para $a = 2$, calcula el valor de “b” para que se verifique la igualdad:

$$\int_1^3 x^4 f(x) dx = 12$$

- a) Para que la función pase por el punto $P(1, 3)$ debe cumplirse $f(1) = 3$.

$$f(1) = 3 \Rightarrow \frac{a \cdot 1^2 + b}{1^3} = 3 \Rightarrow \boxed{a + b = 3}$$

Para que la recta tangente a esta curva en P sea paralela a la recta de ecuación $y = -5x + 2$ la pendiente de la recta tangente debe valer $-5 \Rightarrow f'(1) = -5$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax^2 + b}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax \cdot x^3 - 3x^2(ax^2 + b)}{x^6} = \\ &= \frac{2ax^4 - 3ax^4 - 3bx^2}{x^6} = \frac{-ax^4 - 3bx^2}{x^6} = \frac{-ax^2 - 3b}{x^4} \end{aligned}$$

$$f'(1) = -5 \Rightarrow \frac{-a \cdot 1^2 - 3b}{1^4} = -5 \Rightarrow -a - 3b = -5 \Rightarrow a + 3b = 5 \Rightarrow \boxed{a = 5 - 3b}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 - 3b \\ a + b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 - 3b + b = 3 \Rightarrow 2 - 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1} \Rightarrow \boxed{a = 5 - 3 = 2}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = 1$.

- b) Para $b = 4$ la función queda $f(x) = \frac{ax^2 + 4}{x^3}$. Si la función posee un extremo relativo en $x = 2$ entonces la derivada debe anularse para este valor $\Rightarrow f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{-ax^2 - 3 \cdot 4}{x^4} = \frac{-ax^2 - 12}{x^4} \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{-a \cdot 2^2 - 12}{2^4} \Rightarrow -4a - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Para que se cumpla lo pedido debe ser $a = -3$.

Para este valor la derivada queda $f'(x) = \frac{3x^2 - 12}{x^4}$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 2$.

- Antes de $x = 2$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{3 \cdot 1^2 - 12}{1^4} = -9 < 0$. La función decrece antes de 2.
- Después de $x = 2$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{3 \cdot 3^2 - 12}{3^4} = \frac{15}{81} > 0$. La función crece después de 2.

Como la función decrece antes y crece después podemos afirmar que la función tiene un mínimo en $x = 2$.

c) Para $a = 2$ la función queda $f(x) = \frac{2x^2 + b}{x^3}$. Calculamos la expresión de la integral definida planteada.

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^4 f(x) dx &= \int_1^3 x^4 \frac{2x^2 + b}{x^3} dx = \int_1^3 x(2x^2 + b) dx = \int_1^3 2x^3 + bxdx = \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{bx^2}{2} \right]_1^3 = \\ &= \left[\frac{x^4}{2} + \frac{bx^2}{2} \right]_1^3 = \left[\frac{3^4}{2} + \frac{b \cdot 3^2}{2} \right] - \left[\frac{1^4}{2} + \frac{b \cdot 1^2}{2} \right] = \frac{81}{2} + \frac{9b}{2} - \frac{1}{2} - \frac{b}{2} = \boxed{40 + 4b} \end{aligned}$$

Averiguamos el valor de b para que $\int_1^3 x^4 f(x) dx = 12$.

$$\int_1^3 x^4 f(x) dx = 12 \Rightarrow 40 + 4b = 12 \Rightarrow 4b = -28 \Rightarrow \boxed{b = -7}$$

Se cumple la igualdad para $b = -7$.