



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Curso 2025/2026

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES

TIEMPO DE REALIZACIÓN: 1 HORA Y 30 MINUTOS

Cada estudiante deberá resolver cuatro ejercicios.

El Ejercicio 1 será obligatorio y de carácter competencial. Tendrá una puntuación máxima de 3 puntos.

El Ejercicio 2 será obligatorio y de carácter competencial y tendrá una puntuación máxima de 2 puntos.

El Ejercicio 3 tendrá una puntuación máxima de 2 puntos y se podrá elegir entre dos opciones (Opción 1 / Opción 2).

El Ejercicio 4 tendrá una puntuación máxima de 3 puntos y se podrá elegir entre dos opciones (Opción 1 / Opción 2).

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si algún alumnado es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

EJERCICIO 1 (3 PUNTOS)

1. Resuelve los apartados a) y b):

a) **(1 PUNTO)** En un importante evento deportivo, se sabe que el 1% de los participantes consume algún tipo de sustancia prohibida. Para detectar si este consumo ha tenido lugar o no, se puede hacer una determinada prueba. Dicha prueba detecta falsos positivos en un 2%, y falsos negativos, en un 6%. El día del evento, se elige un deportista al azar y se le hace la prueba, se pide:

a.1. Calcula la probabilidad de que haya consumido algún tipo de sustancia prohibida y la prueba haya dado positiva.

a.2. Si el deportista ha dado positivo en la prueba, calcula la probabilidad de que haya consumido algún tipo de sustancia prohibida.

b) **(2 PUNTOS)** Una fábrica de café envasa su producto en paquetes cuyo peso sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica σ . Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 paquetes, cuyo peso medio ha sido 500 gramos, y se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 91% para estimar μ : $(496,6, 503,4)$. Se pide:

b.1. (1,75 PUNTOS) Calcula el valor de la desviación típica (σ).

b.2. (0,25 PUNTOS) Con la misma muestra y la misma σ : si ahora se pretende que el error cometido en la estimación sea a lo sumo de 2,94 gramos, razona si el nivel de confianza ahora sería mayor o menor que 91%.

EJERCICIO 2 (2 PUNTOS)

2. Una empresa fabrica dos tipos de herramientas, A y B. Para su elaboración utiliza madera y acero. Para fabricar una herramienta A se necesitan 300 gramos de madera y 100 gramos de acero; en el caso de B, las cantidades requeridas son 100 y 200 gramos respectivamente. Dispone diariamente de un máximo de 3 kilogramos de madera y 2 kilogramos de acero. Estas herramientas le proporcionan un beneficio de 20 euros por unidad de A y de 15 euros por cada

una de B. Además, se deben fabricar diariamente al menos 2 herramientas de tipo A y al menos 3 de tipo B. Se pide:

- (0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal para maximizar el beneficio de la empresa.
- (0,5 PUNTOS)** Representa la región factible S.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región S.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula el número de herramientas de cada tipo que se deben preparar para que el beneficio sea máximo.

EJERCICIO 3 (2 PUNTOS)

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2):

(Opción 1)

3.1. (2 PUNTOS) Una pareja compra en una tienda especializada tres electrodomésticos: A, B y C, pagando por ellos un total de 1000 euros. Lo que les ha costado A representa el 40% de lo gastado en C; y, además, la suma total del dinero gastado en la compra de B y de C cuadruplica el pagado por A. Calcula cuánto le ha costado a esta pareja cada uno de los tres electrodomésticos.

(Opción 2)

3.2. (2 PUNTOS) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, a, b : números reales, se pide:

- Calcula los valores de “a” y “b” para que se verifique la igualdad: $AB = BA$.
- Calcula una matriz X que cumpla la igualdad: $X \cdot A^4 = I$.

(I representa la matriz identidad de orden 2)

EJERCICIO 4 (3 PUNTOS)

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2):

(Opción 1)

4.1. Una empresa tecnológica de nueva creación estima que su beneficio (en cientos de euros) durante los 10 primeros meses, desde su apertura, vendrá dado por la función:

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 48x + 120 \quad x \in [0, 10]$$

Donde x representa el número de meses transcurridos. Se pide:

- (0,5 PUNTOS)** Calcula el beneficio de la empresa a los 3 meses de su apertura.
- (1,25 PUNTOS)** Calcula los extremos relativos de f. En este periodo de 10 meses, es decir en el intervalo [0, 10], calcula cuál será el beneficio máximo y cuál será el mínimo, determina cuando se alcanzarán.
- (1,25 PUNTOS)** Considera la función $g(x) = f'(x)$: calcula el área limitada por la gráfica de g, el eje X, la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$

(Opción 2)

4.2. Dada la función $f(x) = \frac{x+a}{(x-1)^2}$, a número real, se pide:

- (0,75 PUNTOS)** Halla el valor de “a” para que la gráfica de f pase por el punto (0, 2). Para dicho valor de “a”, calcula el dominio de f, las asíntotas y los puntos de corte de dicha gráfica con los ejes coordenados.
- (1,25 PUNTOS)** Para $a = 1$: Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como los extremos relativos.

- c) (1 PUNTO) Para $a=1$: Calcula la integral definida $\int_2^3 f(x)(x-1)^3 dx$. Interpreta geoméricamente el resultado obtenido.

Tabla. Distribución normal tipificada.

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0,1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0,2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0,3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0,4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0,5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0,6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0,7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0,8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0,9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1,0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1,1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1,2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1,3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1,4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1,5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1,6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1,7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1,8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1,9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2,0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2,1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2,2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2,3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2,4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2,6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2,7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (3 PUNTOS)

a) **(1 PUNTO)** En un importante evento deportivo, se sabe que el 1% de los participantes consume algún tipo de sustancia prohibida. Para detectar si este consumo ha tenido lugar o no, se puede hacer una determinada prueba. Dicha prueba detecta falsos positivos en un 2%, y falsos negativos, en un 6%. El día del evento, se elige un deportista al azar y se le hace la prueba, se pide:

- a.1.** Calcula la probabilidad de que haya consumido algún tipo de sustancia prohibida y la prueba haya dado positiva.
a.2. Si el deportista ha dado positivo en la prueba, calcula la probabilidad de que haya consumido algún tipo de sustancia prohibida.

Llamamos C al suceso “el participante consume algún tipo de sustancia prohibida” $P+$ a “dar positivo en la prueba” y $P-$ a “dar negativo en la prueba”. Por los datos proporcionados sabemos que:

El 1% de los participantes consume algún tipo de sustancia prohibida $\rightarrow P(C) = 0.01$.

Dicha prueba detecta falsos positivos en un 2%, y falsos negativos, en un 6% $\rightarrow$

$$P(P+/C) = 0.02, \quad P(P-/C) = 0.06.$$

- a.1. Nos piden calcular el valor de $P(P+ \cap C)$.

$$P(P+ \cap C) = P(C)P(P+/C) = P(C)[1 - P(P-/C)] = 0.01 \cdot (1 - 0.06) = \boxed{0.0094}$$

- a.2. Nos piden calcular $P(C/P+)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(C/P+) &= \frac{P(C \cap P+)}{P(P+)} = \frac{P(C \cap P+)}{P(C \cap P+) + P(\bar{C} \cap P+)} = \frac{P(C \cap P+)}{P(C \cap P+) + P(\bar{C})P(P+/C)} = \\ &= \frac{P(C \cap P+)}{P(C \cap P+) + [1 - P(C)]P(P+/C)} = \frac{0.0094}{0.0094 + [1 - 0.01] \cdot 0.02} = \boxed{\frac{47}{146} \approx 0.322} \end{aligned}$$

EJERCICIO 1 (3 PUNTOS)

b) (2 PUNTOS) Una fábrica de café envasa su producto en paquetes cuyo peso sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica σ . Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 paquetes, cuyo peso medio ha sido 500 gramos, y se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 91% para estimar μ : (496,6, 503,4). Se pide:

b.1. (1'75 PUNTOS) Calcula el valor de la desviación típica (σ).

b.2. (0'25 PUNTOS) Con la misma muestra y la misma σ : si ahora se pretende que el error cometido en la estimación sea a lo sumo de 2'94 gramos, razona si el nivel de confianza ahora sería mayor o menor que 91%.

b.1. Sea X = Peso de un paquete de café en gramos. $X = N(\mu, \sigma)$

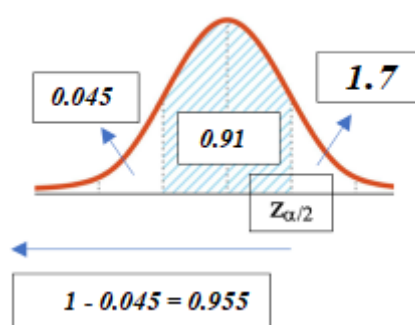
Tamaño de la muestra = $n = 100$. El peso medio de la muestra es 500 gramos

Para calcular la desviación típica empezamos hallando el error que es la mitad de la amplitud

del intervalo. $Error = \frac{503.4 - 496.6}{2} = 3.4$ gramos.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 91%.

$$1 - \alpha = 0.91 \rightarrow \alpha = 0.09 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.045 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.955 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.7$$



z	0
0,0	.5000
0,1	.5398
0,2	.5793
0,3	.6179
0,4	.6554
0,5	.6915
0,6	.7257
0,7	.7580
0,8	.7881
0,9	.8159
1,0	.8413
1,1	.8643
1,2	.8849
1,3	.9032
1,4	.9192
1,5	.9332
1,6	.9452
1,7	.9554
1,8	.9641

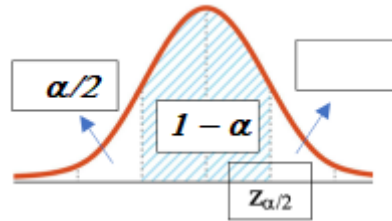
Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de la desviación típica.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3.4 = 1.7 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \Rightarrow \sigma = \frac{3.4 \cdot 10}{1.7} = \frac{34}{1.7} = 20 \text{ gramos}$$

La desviación típica es de 20 gramos.

b.2. El error del intervalo de confianza se calcula con la fórmula $Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Si el error es menor ($2.94 < 3.4$) y mantenemos igual el valor de σ y de n entonces debe ser menor el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$. Para que sea menor $z_{\frac{\alpha}{2}}$ debe ser menor el valor de $1-\alpha$, es decir, debe ser menor el nivel de confianza.



EJERCICIO 2 (2 PUNTOS)

2. Una empresa fabrica dos tipos de herramientas, A y B. Para su elaboración utiliza madera y acero. Para fabricar una herramienta A se necesitan 300 gramos de madera y 100 gramos de acero; en el caso de B, las cantidades requeridas son 100 y 200 gramos respectivamente. Dispone diariamente de un máximo de 3 kilogramos de madera y 2 kilogramos de acero. Estas herramientas le proporcionan un beneficio de 20 euros por unidad de A y de 15 euros por cada una de B. Además, se deben fabricar diariamente al menos 2 herramientas de tipo A y al menos 3 de tipo B. Se pide:
- (0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal para maximizar el beneficio de la empresa.
 - (0,5 PUNTOS)** Representa la región factible S.
 - (0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región S.
 - (0,5 PUNTOS)** Calcula el número de herramientas de cada tipo que se deben preparar para que el beneficio sea máximo.

- a) Llamamos “x” al número de herramientas A que fabrica diariamente e “y” al número de herramientas B que fabrica diariamente. Hacemos una tabla con los datos proporcionados.

	kg de madera	Kg de acero	Beneficio
Nº herramientas A (x)	0.3x	0.1x	20x
Nº herramientas B (y)	0.1y	0.2y	15y
	0.3x+0.1y	0.1x+0.2y	20x+15y

Obtenemos las inecuaciones asociadas al problema de programación lineal que se nos plantea:

“Dispone diariamente de un máximo de 3 kilogramos de madera y 2 kilogramos de acero” $\rightarrow$
 $0.3x + 0.1y \leq 3$; $0.1x + 0.2y \leq 2$.

Se deben fabricar diariamente al menos 2 herramientas de tipo A y al menos 3 de tipo B $\rightarrow$
 $x \geq 2$; $y \geq 3$.

Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 0.3x + 0.1y \leq 3 \\ 0.1x + 0.2y \leq 2 \\ x \geq 2; y \geq 3 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 30 \\ x + 2y \leq 20 \\ x \geq 2 \\ y \geq 3 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 20x + 15y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región S de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

$$3x + y = 30$$

x	y = 30 - 3x
0	30
8	6
9	3

$$x + 2y = 20$$

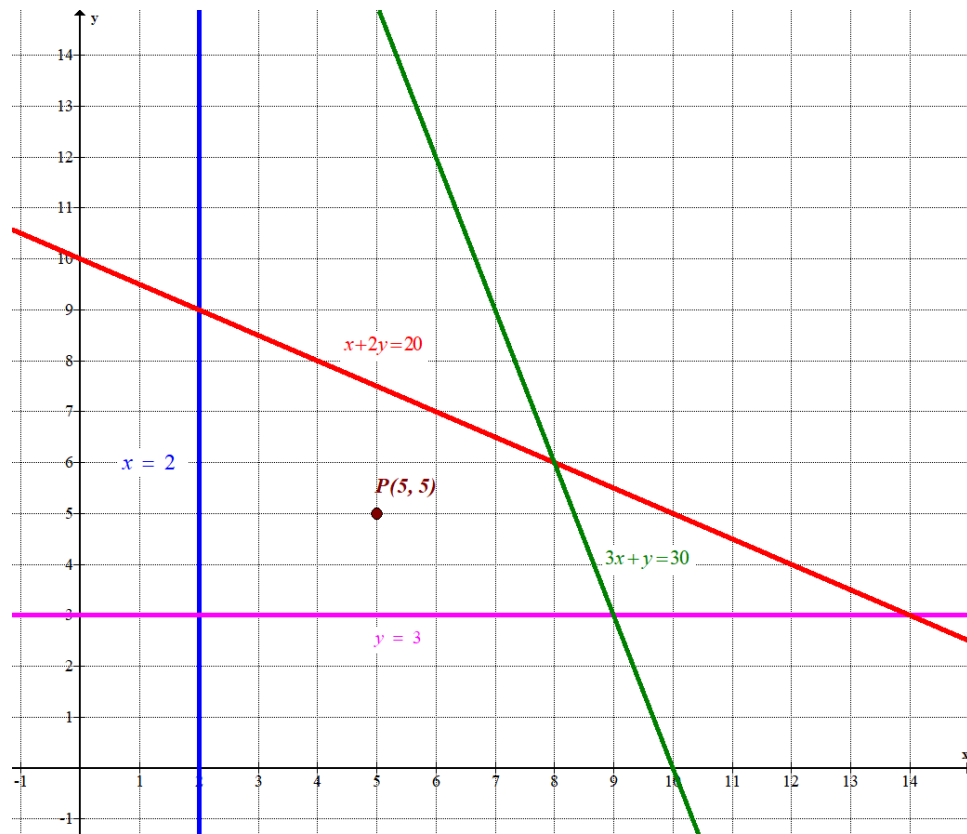
x	y = $\frac{20-x}{2}$
0	10
2	9
8	6

$$x = 2$$

x = 2	y
2	0
2	3
2	9

$$y = 3$$

x	y = 3
0	3
2	3
9	3



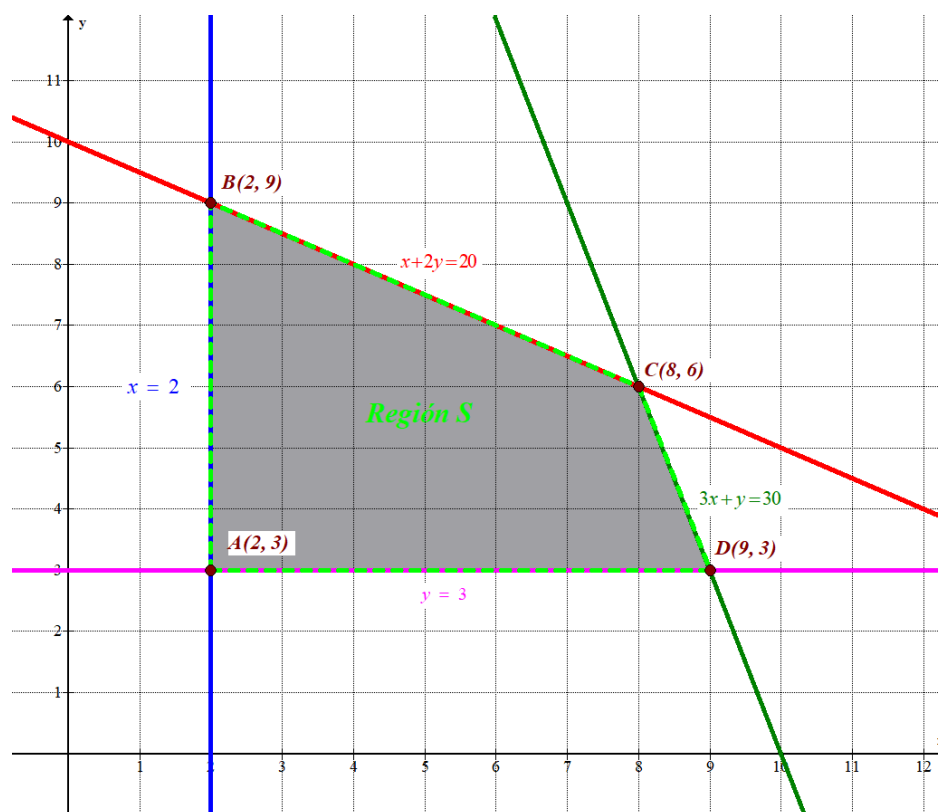
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 30 \\ x + 2y \leq 20 \\ x \geq 2 \\ y \geq 3 \end{array} \right\}$ la región S es la región del primer cuadrante situada

por encima de la recta horizontal rosa, por debajo de las rectas roja y verde, y a la derecha de la recta vertical azul.

Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 5 + 5 \leq 30 \\ 5 + 2 \cdot 5 \leq 20 \\ 5 \geq 2 \\ 5 \geq 3 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de gris la región factible indicando las coordenadas de sus vértices.



c) Los vértices de la región factible son A(2, 3), B(2, 9), C(8, 6) y D(9, 3).

$$A \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow A(2, 3)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 20 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow 2 + 2y = 20 \rightarrow 2y = 18 \rightarrow y = 9 \rightarrow B(2, 9)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 20 \\ y = 30 - 3x \end{cases} \rightarrow x + 60 - 6x = 20 \rightarrow -5x = -40 \rightarrow x = 8 \rightarrow y = 30 - 24 = 6 \rightarrow C(8, 6)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 30 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow 3x + 3 = 30 \rightarrow 3x = 27 \rightarrow x = 9 \rightarrow D(9, 3)$$

d) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 20x + 15y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(2, 3) \rightarrow B(2, 3) = 20 \cdot 2 + 15 \cdot 3 = 85$$

$$B(2, 9) \rightarrow B(2, 9) = 20 \cdot 2 + 15 \cdot 9 = 175$$

$$C(8, 6) \rightarrow B(8, 6) = 20 \cdot 8 + 15 \cdot 6 = 250 \text{ Máximo}$$

$$D(9, 3) \rightarrow B(9, 3) = 20 \cdot 9 + 15 \cdot 3 = 225$$

El beneficio máximo se obtiene en el punto C(8, 6).

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con la elaboración de 8 herramientas tipo A y 6 del tipo B. El beneficio máximo es de 250 € al día.

EJERCICIO 3 (2 PUNTOS)

3.1. (2 PUNTOS) Una pareja compra en una tienda especializada tres electrodomésticos: A, B y C, pagando por ellos un total de 1000 euros. Lo que les ha costado A representa el 40% de lo gastado en C; y, además, la suma total del dinero gastado en la compra de B y de C cuadruplica el pagado por A. Calcula cuánto le ha costado a esta pareja cada uno de los tres electrodomésticos.

Al precio de los electrodomésticos A, B y C lo llamamos a , b y c . Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

“Paga por ellos un total de 1000 euros” $\rightarrow a + b + c = 1000$.

“Lo que les ha costado A representa el 40% de lo gastado en C” $\rightarrow a = 0.40 \cdot c$.

“La suma total del dinero gastado en la compra de B y de C cuadruplica el pagado por A” $\rightarrow b + c = 4a$.

Juntamos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 1000 \\ a = 0.40 \cdot c \\ b + c = 4a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.4c + b + c = 1000 \\ b + c = 4 \cdot 0.4c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + 1.4c = 1000 \\ b + c = 1.6c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 1000 - 1.4c \\ b = 0.6c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1000 - 1.4c = 0.6c \Rightarrow 1000 = 2c \Rightarrow \boxed{c = \frac{1000}{2} = 500} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{a = 0.4 \cdot 500 = 200} \\ \boxed{b = 0.6 \cdot 500 = 300} \end{array} \right.$$

El electrodoméstico A costó 200 €, el B costó 300 € y el C costó 500 €.

EJERCICIO 3 (2 PUNTOS)

3.2. (2 PUNTOS) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, a, b : números reales, se pide:

a) Calcula los valores de “a” y “b” para que se verifique la igualdad: $AB = BA$.

b) Calcula una matriz X que cumpla la igualdad: $X \cdot A^4 = I$.

(I representa la matriz identidad de orden 2)

a) Planteamos la igualdad matricial y la resolvemos.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2a & 5+2b \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 8+5 \\ a & 2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ a & 2a+b \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+2a & 5+2b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ a & 2a+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4+2a=4 \\ 5+2b=13 \\ a=a \\ b=2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=0 \\ 2b=8 \\ 0=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=4 \end{cases}$$

La igualdad es cierta para $a=0$ y $b=4$.

b) La matriz X debe ser una matriz cuadrada de orden 2: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4+4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A^4 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 8a+b \\ c & 8c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ 8a+b=0 \\ c=0 \\ 8c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 \cdot 1 + b = 0 \\ 8 \cdot 0 + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-8 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 4 (3 PUNTOS)

4.1. Una empresa tecnológica de nueva creación estima que su beneficio (en cientos de euros) durante los 10 primeros meses, desde su apertura, vendrá dado por la función:

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 48x + 120 \quad x \in [0, 10]$$

Donde x representa el número de meses transcurridos. Se pide:

- a) **(0,5 PUNTOS)** Calcula el beneficio de la empresa a los 3 meses de su apertura.
 b) **(1,25 PUNTOS)** Calcula los extremos relativos de f . En este periodo de 10 meses, es decir en el intervalo $[0, 10]$, calcula cuál será el beneficio máximo y cuál será el mínimo, determina cuando se alcanzarán.
 c) **(1,25 PUNTOS)** Considera la función $g(x) = f'(x)$: calcula el área limitada por la gráfica de g , el eje X , la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$

a) Como $f(3) = 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 48 \cdot 3 + 120 = 156$ el beneficio de la empresa a los 3 meses de la apertura es de 15600 euros.

b) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 48x + 120 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 30x + 48$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 30x + 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10+6}{2} = \boxed{8=x} \\ \frac{10-6}{2} = \boxed{2=x} \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 30x + 48 \Rightarrow f''(x) = 6x - 30 \Rightarrow \begin{cases} f''(2) = 6 \cdot 2 - 30 = -18 < 0 \\ f''(8) = 6 \cdot 8 - 30 = 18 > 0 \end{cases}$$

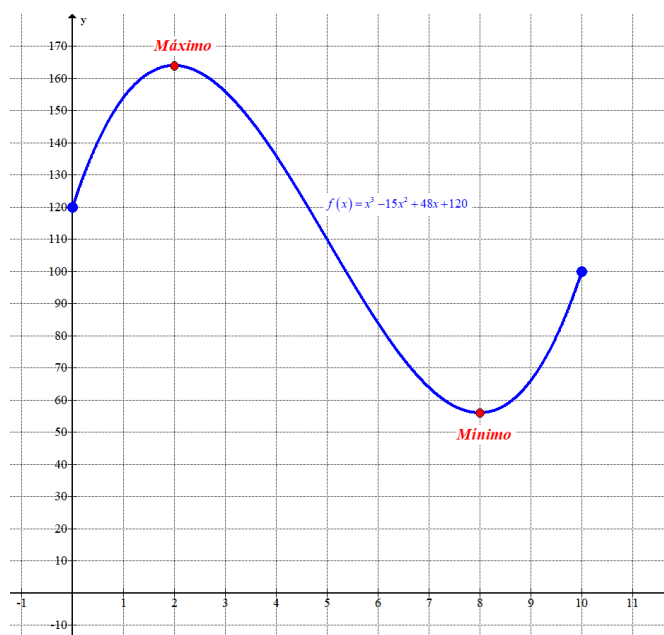
En $x = 2$ se anula la primera derivada y la segunda toma valor negativo. La función tiene un máximo relativo en $x = 2$.

En $x = 8$ se anula la primera derivada y la segunda toma valor positivo. La función tiene un mínimo relativo en $x = 8$.

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos para obtener los máximos y mínimos absolutos.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 15 \cdot 0^2 + 48 \cdot 0 + 120 = 120 \\ f(2) &= 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 48 \cdot 2 + 120 = \mathbf{164 \text{ Máximo}} \\ f(8) &= 8^3 - 15 \cdot 8^2 + 48 \cdot 8 + 120 = \mathbf{56 \text{ Mínimo}} \\ f(10) &= 10^3 - 15 \cdot 10^2 + 48 \cdot 10 + 120 = 100 \end{aligned} \right\}$$

En el intervalo $[0, 10]$ el beneficio máximo es de 16400 € en el segundo mes y el mínimo es de 5600 € en el octavo mes.



c) La función $g(x)$ tiene la expresión $g(x) = f'(x) = 3x^2 - 30x + 48$.

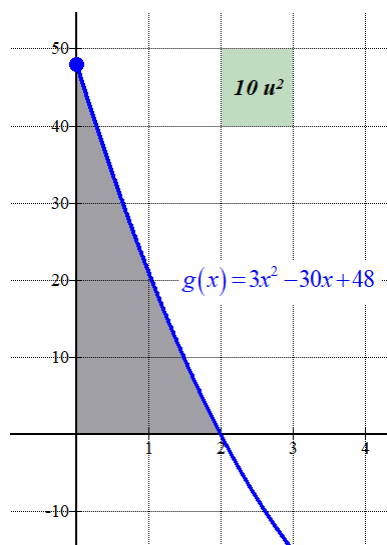
Buscamos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 3x^2 - 30x + 48 \\ \text{Eje X} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 30x + 48 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 8 \end{array} \right.$$

La gráfica de la función en el intervalo $[0, 2]$ solo corta en $x = 2$. El área de la región limitada por la gráfica de g , el eje X, la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$ es el valor absoluto de la integral definida de $g(x)$ de 0 a 2.

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x) dx &= \int_0^2 3x^2 - 30x + 48 dx = \left[x^3 - 15x^2 + 48x \right]_0^2 = \\ &= \left[2^3 - 15 \cdot 2^2 + 48 \cdot 2 \right] - \left[0^3 - 15 \cdot 0^2 + 48 \cdot 0 \right] = 8 - 60 + 96 = 44 \end{aligned}$$

El área de la región limitada por la gráfica de g , el eje X, la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$ vale 44 unidades cuadradas.



EJERCICIO 4 (3 PUNTOS)

4.2. Dada la función $f(x) = \frac{x+a}{(x-1)^2}$, a número real, se pide:

a) **(0,75 PUNTOS)** Halla el valor de “a” para que la gráfica de f pase por el punto $(0, 2)$. Para dicho valor de “a”, calcula el dominio de f , las asíntotas y los puntos de corte de dicha gráfica con los ejes coordenados.

b) **(1,25 PUNTOS)** Para $a=1$: Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como los extremos relativos.

c) **(1 PUNTO)** Para $a=1$: Calcula la integral definida $\int_2^3 f(x)(x-1)^3 dx$. Interpreta geoméricamente el resultado obtenido.

a) Para que la función pase por el punto $(0, 2)$ debe cumplirse $f(0) = 2$.

$$f(0) = 2 \Rightarrow \frac{0+a}{(0-1)^2} = 2 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Para $a=2$ la función pase por el punto $(0, 2)$. La función queda $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}$.

El dominio de esta función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{1+2}{(1-1)^2} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2+1-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{0}{1} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

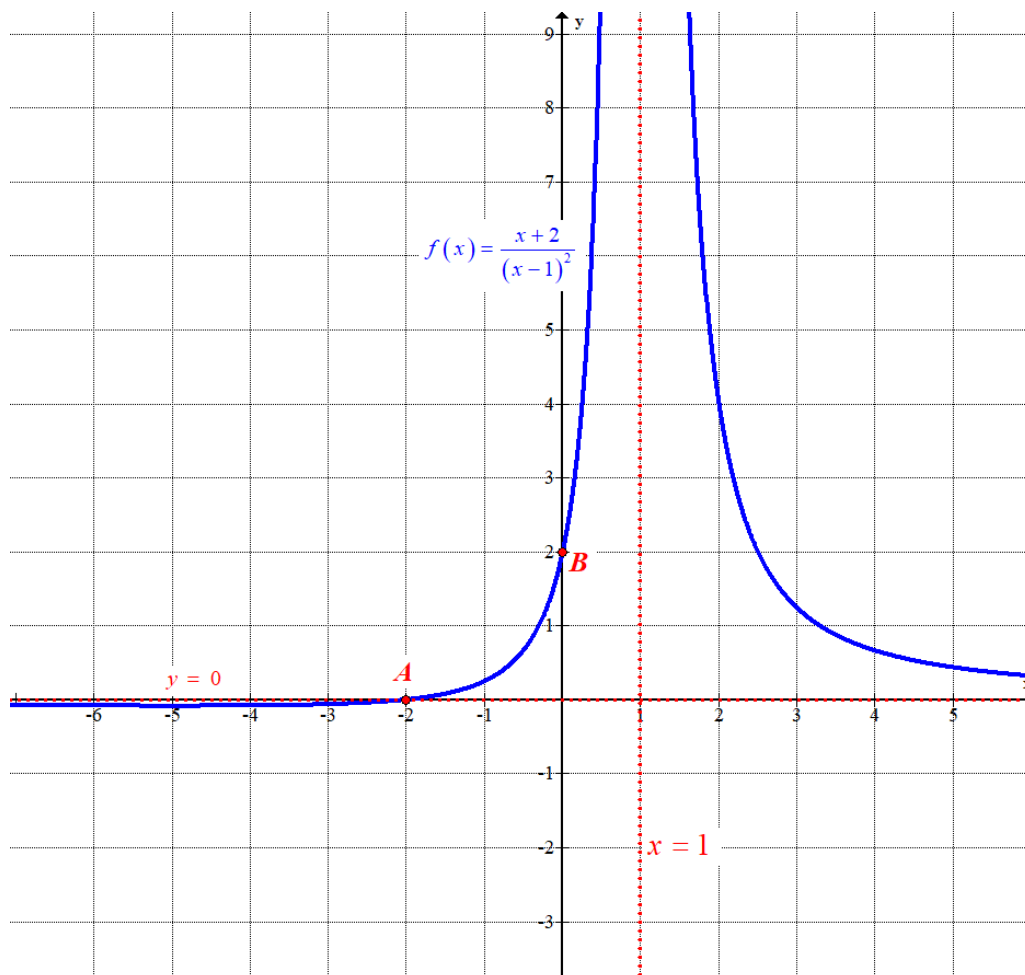
Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x+2}{(x-1)^2} \\ \text{Eje } X \rightarrow y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x+2}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow A(-2, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x+2}{(x-1)^2} \\ \text{Eje } Y \rightarrow x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0+2}{(0-1)^2} = 2 \Rightarrow B(0, 2)$$

La función corta los ejes de coordenadas en $A(-2, 0)$ y $B(0, 2)$.



b) Para $a=1$ la función queda $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$. Calculamos su derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1)^2 - 2(x-1)(x+1)}{(x-1)^4} = \frac{1 \cdot (x-1) - 2(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{x-1-2x-2}{(x-1)^3} = \frac{-3-x}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3-x}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow -3-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=-3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=-3$ (punto crítico) y $x=1$ (excluido del dominio).

- En el intervalo $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale

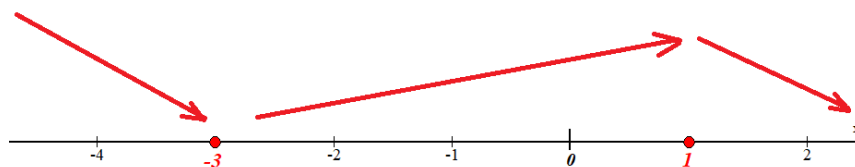
$$f'(-4) = \frac{-3 - (-4)}{(-4-1)^3} = \frac{-1}{125} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -3).$$

- En el intervalo $(-3, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-3-0}{(0-1)^3} = 3 > 0$. La función crece en $(-3, 1)$.

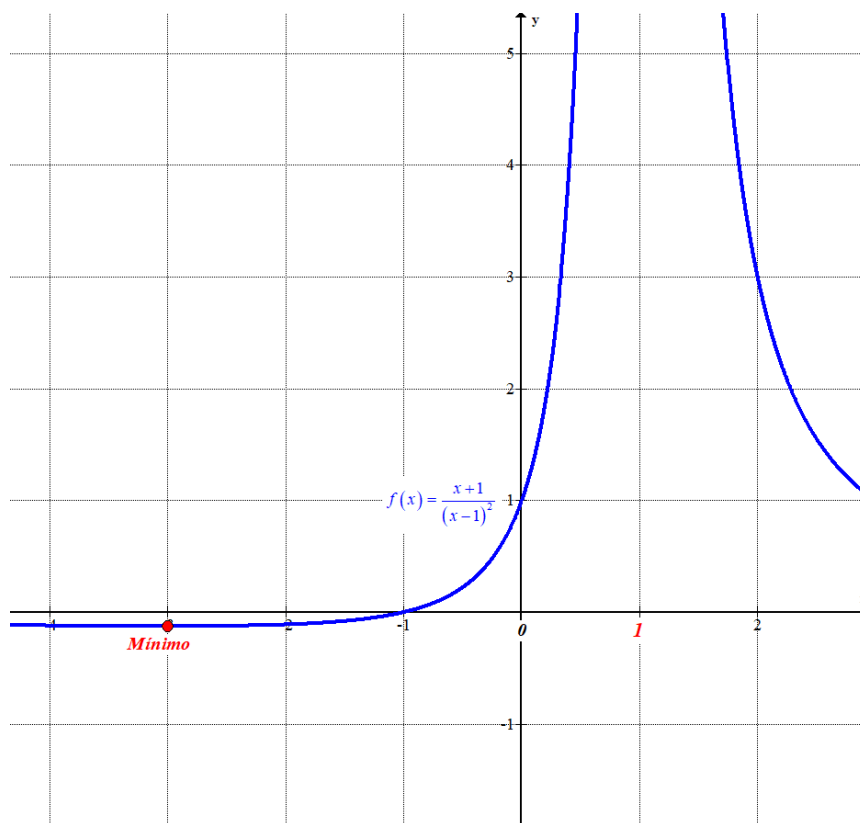
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-3-2}{(2-1)^3} = -5 < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-3, 1)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un mínimo relativo en $x = -3$. Como $f(-3) = \frac{-3+1}{(-3-1)^2} = \frac{-1}{8}$ las coordenadas del mínimo relativo son $(-3, -0.125)$.



b) Para $a=1$ la función queda $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ y la función que vamos a integrar queda

$$f(x)(x-1)^3 = \frac{x+1}{(x-1)^2} (x-1)^3 = (x+1)(x-1) = x^2 - 1. \text{ Calculamos la integral pedida.}$$

$$\int_2^3 f(x)(x-1)^3 dx = \int_2^3 x^2 - 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_2^3 = \left[\frac{3^3}{3} - 3 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2 \right] = 9 - 3 - \frac{8}{3} + 2 = \frac{16}{3} \approx 5.333$$

La interpretación del resultado es el siguiente: El integrando es una función parabólica y hemos hallado el área de la región del plano limitada por la gráfica de $y = x^2 - 1$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

