

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	B
--	--	----------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 preguntas**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.

CALIFICACIÓN: cada pregunta se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

PREGUNTA 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Esta pregunta no tiene opcionalidad.

Susana dejó su trabajo como CEO de una multinacional cosmética que utiliza productos químicos por discrepancias con el director general de la empresa. Empleó su indemnización para montar una pequeña empresa de fabricación y distribución de cosmética 100% natural.

1.a) (1,5 puntos) Para hacer un preparado de crema hidratante necesita hacer un pedido de aceite de argán, usado en cosmética por sus propiedades hidratantes. Susana trabaja con dos distribuidoras de materia primas, Saviah y Naturaelis. Saviah puede suministrarle como máximo 9 litros de aceite de argán y Naturaelis un máximo de 5 litros. Además, ha firmado un acuerdo con Saviah por el que se compromete a comprar, en cada pedido, como mínimo 2 litros más de aceite que los que compre a Naturaelis. Se ha comprometido a comprar a Naturaelis como mínimo 1 litro de aceite de argán en cada pedido. Susana tiene aceite de argán de un pedido anterior por lo que, en este momento, solo puede comprar como máximo 13 litros de aceite de argán para poder conservarlo en óptimas condiciones. En cada pedido, Saviah le regala 3 litros de agua destilada por cada litro de aceite de argán que compre y Naturaelis 2 litros por cada litro de aceite de argán que compre. Determine la cantidad de aceite de argán que debe comprar a cada una de las distribuidoras de materias primas naturales para obtener como regalo la mayor cantidad de agua destilada.

1.b) (1 punto) Además de aceite de argán necesita un total de 18 litros de aceite de rosa mosqueta, entre el que tiene almacenado y el que comprará a Saviah y Naturaelis. A Naturaelis compra el doble de aceite de rosa mosqueta del que tiene almacenado. El aceite que compra a Saviah es tanto como el que tiene almacenado más el que compra a Naturaelis. Determine la cantidad de aceite de rosa mosqueta que compra a cada una de las distribuidoras de materias primas, así como la cantidad que tiene almacenada.

PREGUNTA 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 2.1 o bien 2.2.

2.1 Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x - a} & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

2.1.a) (1,5 puntos) Para $a = 1$ calcule el dominio y las asíntotas de la función.

2.1.b) (1 punto) Para $a = 2$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

2.2 Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + a$$

2.2.a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva, $F(x)$, que verifique $F(0) = 0$ y $F(2) = 4$.

2.2.b) (1,5 puntos) Para $a = 9$ determine los cortes con los ejes de coordenadas, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

PREGUNTA 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 3.1 o bien 3.2.

3.1 De dos sucesos A y B se sabe que $P(A) = 0.5$, $P(A/B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = 0.9$.

3.1.a) (1 punto) Obtenga la probabilidad de que ocurra el suceso B.

3.1.b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el suceso A

3.1.c) (0,5 puntos) Determine razonadamente si los sucesos A y B son independientes. Justifique si son incompatibles.

3.2 Susana tiene dos cuentas en una red social: una personal y la otra de su marca de cosmética natural. Solo el 20% de las publicaciones las hace en su cuenta personal. En la cuenta de la marca de cosmética solo el 50% de las publicaciones recibe más de 100 likes, mientras que este porcentaje es del 70% en su cuenta personal.

3.2.a) (1,3 puntos) Una clínica estética se ha puesto en contacto con ella para ofrecerle una promoción por el porcentaje de sus publicaciones que obtienen más de 100 likes. Determine cual es dicho porcentaje.

3.2.b) (1,2 puntos) Obtenga la probabilidad de que una publicación que no haya recibido más de 100 likes hubiera sido publicada en su cuenta personal.

PREGUNTA 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 4.1 o bien 4.2.

4.1 La cosmética natural se sitúa como un segmento relevante y en expansión en el mercado cosmético español. Una investigación realizada por Susana sugiere que el 83% de los clientes de una plataforma de comercio electrónico especializada en productos cosméticos, manifiestan preferencia por productos de cosmética natural.

4.1.a) (1,2 puntos) Determine el número mínimo de clientes de la plataforma que Susana debería seleccionar en una muestra aleatoria simple para estimar esta proporción, de manera que, con un nivel de confianza del 98, 8%, el margen de error en la estimación no supere el 4%.

4.1.b) (1,3 puntos) Se selecciona una muestra aleatoria de 100 clientes de la plataforma de comercio electrónico para estudiar sus hábitos de compra. Asumiendo que la proporción poblacional es $p = 0,8$, y utilizando la aproximación por la distribución normal, calcule la probabilidad de que al menos el 70%, pero menos de $3/4$ de los clientes seleccionados en dicha muestra tengan preferencia en sus compras por productos de cosmética natural.

4.2 La plataforma de comercio electrónico especializada en productos cosméticos que ha investigado Susana sabe que el gasto anual de sus clientes se puede aproximar por una distribución normal de media μ euros y desviación típica $\sigma = 25$ euros.

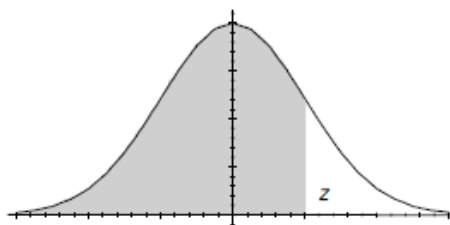
4.2.a) (1,3 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 clientes de la plataforma resultando ser su gasto medio mensual de 310 euros. Obtenga un intervalo de confianza para estimar el gasto medio de todos los clientes con un nivel de confianza del 99, 4%.

4.2.b) (1,2 puntos) Suponiendo que el verdadero valor del parámetro es $\mu = 300$ euros, calcule la probabilidad de que, elegido al azar un cliente de la plataforma, su gasto mensual esté comprendido entre 260 y 330 euros (ambos incluidos).

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

PREGUNTA 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Esta pregunta no tiene opcionalidad.

Susana dejó su trabajo como CEO de una multinacional cosmética que utiliza productos químicos por discrepancias con el director general de la empresa. Empleó su indemnización para montar una pequeña empresa de fabricación y distribución de cosmética 100% natural.

1.a) (1,5 puntos) Para hacer un preparado de crema hidratante necesita hacer un pedido de aceite de argán, usado en cosmética por sus propiedades hidratantes. Susana trabaja con dos distribuidoras de materia primas, Saviah y Naturaelis. Saviah puede suministrarle como máximo 9 litros de aceite de argán y Naturaelis un máximo de 5 litros. Además, ha firmado un acuerdo con Saviah por el que se compromete a comprar, en cada pedido, como mínimo 2 litros más de aceite que los que compre a Naturaelis. Se ha comprometido a comprar a Naturaelis como mínimo 1 litro de aceite de argán en cada pedido. Susana tiene aceite de argán de un pedido anterior por lo que, en este momento, solo puede comprar como máximo 13 litros de aceite de argán para poder conservarlo en óptimas condiciones. En cada pedido, Saviah le regala 3 litros de agua destilada por cada litro de aceite de argán que compre y Naturaelis 2 litros por cada litro de aceite de argán que compre. Determine la cantidad de aceite de argán que debe comprar a cada una de las distribuidoras de materias primas naturales para obtener como regalo la mayor cantidad de agua destilada.

1.b) (1 punto) Además de aceite de argán necesita un total de 18 litros de aceite de rosa mosqueta, entre el que tiene almacenado y el que comprará a Saviah y Naturaelis. A Naturaelis compra el doble de aceite de rosa mosqueta del que tiene almacenado. El aceite que compra a Saviah es tanto como el que tiene almacenado más el que compra a Naturaelis. Determine la cantidad de aceite de rosa mosqueta que compra a cada una de las distribuidoras de materias primas, así como la cantidad que tiene almacenada.

1.a) Llamamos x = número de litros de aceite de argán que compra a Saviah e y = número de litros de aceite de argán que compra a Naturaelis.

La función que deseamos maximizar es el número de litros de agua destilada que nos regalan $R(x, y) = 3x + 2y$ sometidos a las restricciones siguientes:

Saviah puede suministrarle como máximo 9 litros de aceite de argán y Naturaelis un máximo de 5 litros $\rightarrow x \leq 9; y \leq 5$

Ha firmado un acuerdo con Saviah por el que se compromete a comprar, en cada pedido, como mínimo 2 litros más de aceite que los que compre a Naturaelis $\rightarrow x \geq y + 2$

Se ha comprometido a comprar a Naturaelis como mínimo 1 litro de aceite de argán en cada pedido $\rightarrow y \geq 1$.

Solo puede comprar como máximo 13 litros de aceite de argán $\rightarrow x + y \leq 13$

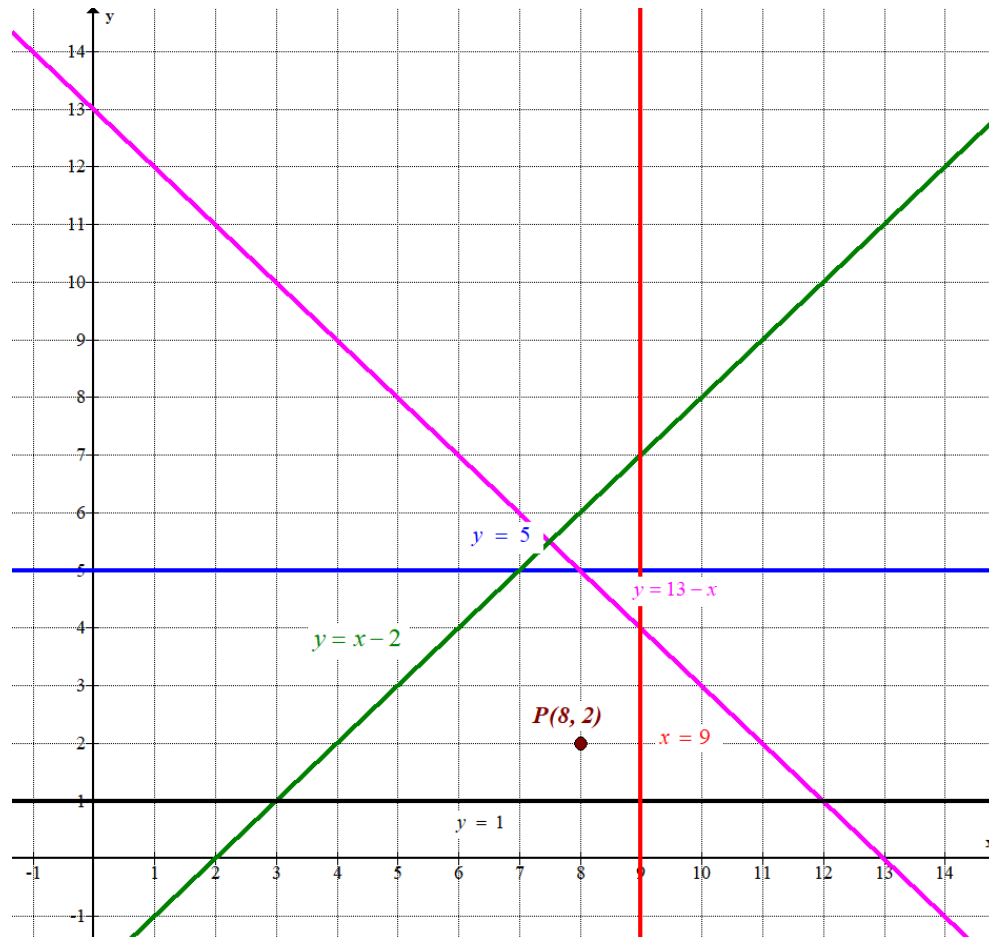
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 9 \\ y \leq 5 \\ x \geq y + 2 \\ y \geq 1 \\ x + y \leq 13 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq 9 \\ y \leq 5 \\ y \leq x - 2 \\ y \geq 1 \\ y \leq 13 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$x=9$	$y=5$	$y=x-2$	$y=1$	$y=13-x$	$x \geq 0; y \geq 0$					
$x=9$	y	x	$y=5$	x	$y=x-2$	x	$y=1$	x	$y=13-x$	Primer cuadrante
9	1	0	5	2	0	0	1	0	13	
9	4	1	5	3	1	3	1	8	5	
9	5	7	5	7	5	9	1	9	4	
9	10	8	5	10	8					



Como las restricciones son

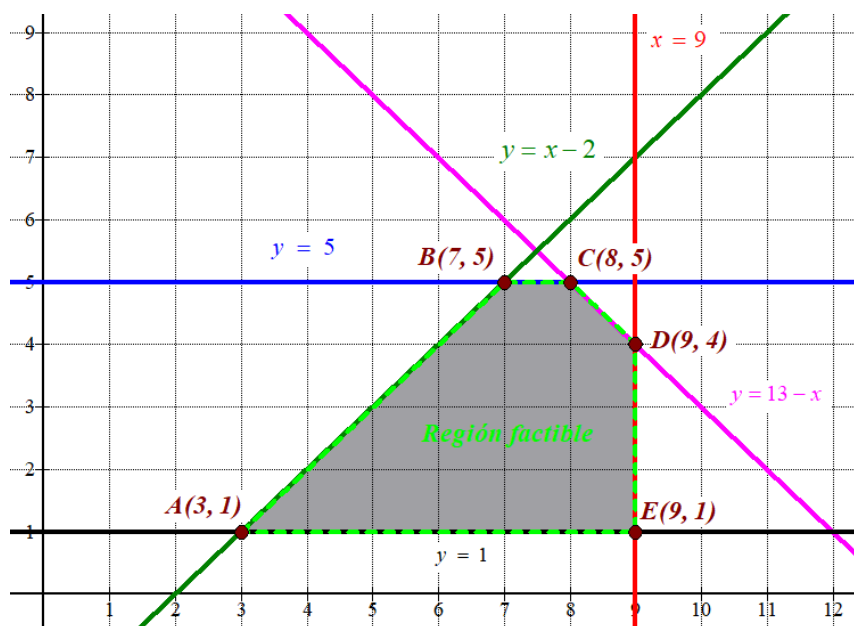
$$\left. \begin{array}{l} x \leq 9 \\ y \leq 5 \\ y \leq x-2 \\ y \geq 1 \\ y \leq 13-x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul, verde y rosa, por encima de la recta horizontal negra y a la izquierda de la recta vertical roja.

Comprobamos que el punto $P(8, 2)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 8 \leq 9 \\ 2 \leq 5 \\ 2 \leq 8-2 \\ 2 \geq 1 \\ 2 \leq 13-8 \\ 8 \geq 0; 2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función $R(x, y) = 3x + 2y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(3, 1) \rightarrow R(3, 1) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$$

$$B(7, 5) \rightarrow R(7, 5) = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 31$$

$$C(8, 5) \rightarrow R(8, 5) = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 5 = 34$$

$$D(9, 4) \rightarrow R(9, 4) = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 35 \text{ Máximo}$$

$$E(9, 1) \rightarrow R(9, 1) = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 1 = 29$$

El máximo es 35 y se consigue en el vértice $D(9, 4)$, que significa que el máximo número de litros de agua destilada que nos pueden regalar es de 35 litros y se consigue con un pedido de 9 litros de aceite de argán a Saviah y 4 litros a Naturaelis.

- 1.b) Llamamos “x” a los litros de aceite de rosa mosqueta que se compra a Saviah, “y” a los litros de aceite de rosa mosqueta que se compra a Naturaelis y “z” a los litros de aceite de rosa mosqueta que se tienen almacenados.

Necesita un total de 18 litros de aceite de rosa mosqueta $\rightarrow x + y + z = 18$

A Naturaelis compra el doble de aceite de rosa mosqueta del que tiene almacenado $\rightarrow y = 2z$

El aceite que compra a Saviah es tanto como el que tiene almacenado más el que compra a Naturaelis $\rightarrow x = y + z$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ y = 2z \\ x = y + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z + z = 18 \\ x = 2z + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 18 \\ x = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow 3z + 3z = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6z = 18 \Rightarrow \boxed{z = 3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 3 \cdot 3 = 9} \\ \boxed{y = 2 \cdot 3 = 6} \end{array} \right.$$

Tiene almacenados 3 litros de aceite de rosa mosqueta y debe hacer un pedido de 9 litros a Saviah y 6 a Naturaelis.

PREGUNTA 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 2.1 o bien 2.2.**2.1** Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x - a} & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

2.1.a) (1,5 puntos) Para $a = 1$ calcule el dominio y las asíntotas de la función.**2.1.b)** (1 punto) Para $a = 2$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

2.1.a) Para $a = 1$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x - 1} & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

La expresión racional $\frac{x^2 + x}{x - 1}$ tiene un denominador que se anula para $x = 1$. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$ ¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x - 1} = \frac{1^2 + 1}{1 - 1} = \frac{2}{0} = \infty$$

 $x = 1$ es asíntota vertical**Asíntota horizontal.** $y = b$ Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{-\infty}}{\frac{1}{-\infty} - \frac{1}{+\infty}} = \frac{1 - 0}{0 - 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 1 = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$ Calculamos el límite cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + x}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{-\infty}}{1 - \frac{1}{-\infty}} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - 1} = 2$$

La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua de la función cuando x tiende a $-\infty$.Calculamos el límite cuando x tiende a $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.

2.1.b) Para $a = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x - 2} & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$. En las proximidades de $x = 0$ la

función tiene la expresión $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 2}$. Calculamos la ecuación de la recta tangente pedida.

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 1)(x - 2) - 1 \cdot (x^2 + x)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 - x}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x - 2)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y - f(0) = f'(0)(x - 0) \\ f(0) = \frac{0^2 + 0}{0 - 2} = 0 \\ f'(0) = \frac{0^2 - 4 \cdot 0 - 2}{(0 - 2)^2} = \frac{-1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = \frac{-1}{2}(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = \frac{-x}{2}}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = \frac{-x}{2}$.

2.2 Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + a$$

2.2.a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva, $F(x)$, que verifique $F(0) = 0$ y $F(2) = 4$.

2.2.b) (1,5 puntos) Para $a = 9$ determine los cortes con los ejes de coordenadas, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

2.2.a) Calculamos la integral de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int -2x^3 + 9x^2 - 12x + a dx = \frac{-2x^4}{4} + \frac{9x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + ax$$

$$F(x) = \frac{-x^4}{2} + 3x^3 - 6x^2 + ax + K$$

Determinamos el valor de K y de a para que $F(0) = 0$ y $F(2) = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{-x^4}{2} + 3x^3 - 6x^2 + ax + K \\ F(0) = 0 \\ F(2) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{-0^4}{2} + 3 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 + a \cdot 0 + K = 0 \\ \frac{-2^4}{2} + 3 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + K = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{K=0} \\ -8 + \cancel{24} + 2a + K = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -8 + 2a = 4 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

El valor buscado es $a = 6$.

2.2.b) Para $a = 9$ la función queda $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 9$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 9 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = -2 \cdot 0^3 + 9 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 \Rightarrow \boxed{A(0,9)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 9 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x^3 + 9x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc} -2 & 9 & -12 & 9 \\ \hline 3 & -6 & 9 & -9 \\ \hline -2 & 3 & -3 & 0 \end{array} \Rightarrow (x-3)(-2x^2+3x-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \rightarrow \boxed{B(3,0)} \\ -2x^2 + 3x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)(-3)}}{2(-2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{-4} = \text{No existe} \end{array} \right.$$

La gráfica de la función corta los ejes coordenados en los puntos $A(0, 9)$ y $B(3, 0)$.

Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 18x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 18x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos puntos críticos obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = -6 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 12 = -12 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 1).$$

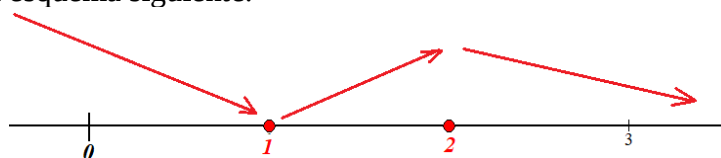
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = -6 \cdot 1.5^2 + 18 \cdot 1.5 - 12 = 3 > 0. \text{ La función crece en } (1, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = -6 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 12 = -12 < 0. \text{ La función decrece en } (2, +\infty).$$

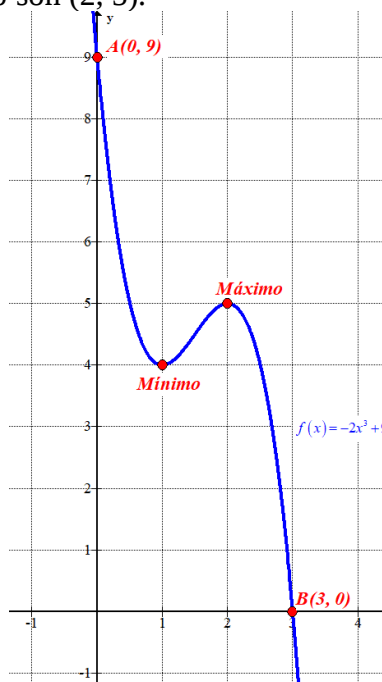
La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(1, 2)$.

La función tiene mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = -2 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 9 = 4$ las coordenadas del mínimo relativo son $(1, 4)$.

La función tiene máximo relativo en $x = 2$. Como $f(2) = -2 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 5$ las coordenadas del máximo relativo son $(2, 5)$.



3.1 De dos sucesos A y B se sabe que $P(A) = 0.5$, $P(A/B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = 0.9$.

3.1.a) (1 punto) Obtenga la probabilidad de que ocurra el suceso B.

3.1.b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el suceso A

3.1.c) (0,5 puntos) Determine razonadamente si los sucesos A y B son independientes. Justifique si son incompatibles.

3.1.a) Debemos determinar el valor de $P(B)$.

$$P(A/B) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{3P(A \cap B) = P(B)}$$

$$P(A \cup B) = 0.9 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 + P(B) - P(A \cap B) = 0.9 \Rightarrow \boxed{P(B) = P(A \cap B) + 0.4}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3P(A \cap B) = P(B) \\ P(B) = P(A \cap B) + 0.4 \end{array} \right\} \Rightarrow 3P(A \cap B) = P(A \cap B) + 0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P(A \cap B) = 0.4 \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{0.4}{2} = 0.2} \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.2 + 0.4 = 0.6}$$

La probabilidad de que ocurra el suceso B vale 0.6.

3.1.b) Debemos calcular $P(B \cap \bar{A})$.

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \Rightarrow 0.6 = 0.2 + P(B \cap \bar{A}) \Rightarrow \boxed{P(B \cap \bar{A}) = 0.4}$$

La probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el suceso A vale 0.4.

3.1.c) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2 \neq 0.3 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

Como $P(A \cap B) = 0.2 \neq 0$ la intersección de los sucesos A y B no es vacía. Los sucesos son compatibles.

3.2 Susana tiene dos cuentas en una red social: una personal y la otra de su marca de cosmética natural. Solo el 20% de las publicaciones las hace en su cuenta personal. En la cuenta de la marca de cosmética solo el 50% de las publicaciones recibe más de 100 likes, mientras que este porcentaje es del 70% en su cuenta personal.

3.2.a) 1,3 puntos) Una clínica estética se ha puesto en contacto con ella para ofrecerle una promoción por el porcentaje de sus publicaciones que obtienen más de 100 likes. Determine cual es dicho porcentaje.

3.2.b) (1,2 puntos) Obtenga la probabilidad de que una publicación que no haya recibido más de 100 likes hubiera sido publicada en su cuenta personal.

3.2.a) El 20% de las publicaciones las hace en su cuenta personal y el 70% de estas publicaciones reciben más de 100 likes. Como $0.20 \cdot 0.70 = 0.14$, podemos decir que hay un 14% del total de sus publicaciones que reciben más de 100 likes.

El 80% de las publicaciones las hace en su cuenta profesional y el 50% de ellas reciben más de 100 likes. Como $0.80 \cdot 0.50 = 0.40$, podemos decir que hay otro 40 % del total de sus publicaciones que reciben más de 100 likes.

En total el porcentaje de publicaciones que reciben más de 100 likes es de $40 + 14 = 54\%$.

3.2.b) Llamamos A a “la publicación es en su cuenta personal”, B a “la publicación es en su cuenta de la marca de cosmética” y L a “la publicación ha recibido más de 100 likes”.

Sabemos que $P(A) = 0.20$; $P(B) = 1 - 0.2 = 0.8$; $P(L/A) = 0.7$ y $P(L/B) = 0.5$.

Por lo obtenido en el apartado anterior tenemos que $P(L) = 0.54$.

Nos piden calcular $P(A/\bar{L})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\bar{L}) = \frac{P(A \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(A)P(\bar{L}/A)}{1 - P(L)} = \frac{0.2 \cdot (1 - 0.7)}{1 - 0.54} = \boxed{\frac{3}{23} \approx 0.1304}$$

La probabilidad de que una publicación que no haya recibido más de 100 likes hubiera sido publicada en su cuenta personal tiene un valor aproximado de 0.1304.

4.1 La cosmética natural se sitúa como un segmento relevante y en expansión en el mercado cosmético español. Una investigación realizada por Susana sugiere que el 83% de los clientes de una plataforma de comercio electrónico especializada en productos cosméticos, manifiestan preferencia por productos de cosmética natural.

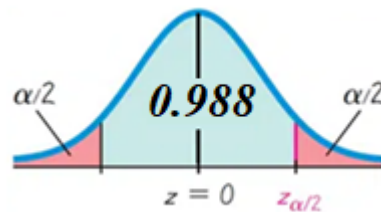
4.1.a) (1,2 puntos) Determine el número mínimo de clientes de la plataforma que Susana debería seleccionar en una muestra aleatoria simple para estimar esta proporción, de manera que, con un nivel de confianza del 98,8%, el margen de error en la estimación no supere el 4%.

4.1.b) (1,3 puntos) Se selecciona una muestra aleatoria de 100 clientes de la plataforma de comercio electrónico para estudiar sus hábitos de compra. Asumiendo que la proporción poblacional es $p = 0,8$, y utilizando la aproximación por la distribución normal, calcule la probabilidad de que al menos el 70%, pero menos de $3/4$ de los clientes seleccionados en dicha muestra tengan preferencia en sus compras por productos de cosmética natural.

4.1.a) La proporción muestral es de $p = 0.83$

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 98.8%.

$$1 - \alpha = 0.988 \rightarrow \alpha = 0.012 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.006 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.994 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.51$$



z	.00	.01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665
1,2	0,8849	0,8869
1,3	0,9032	0,9049
1,4	0,9192	0,9207
1,5	0,9332	0,9345
1,6	0,9452	0,9463
1,7	0,9554	0,9564
1,8	0,9641	0,9649
1,9	0,9713	0,9719
2,0	0,9772	0,9778
2,1	0,9821	0,9826
2,2	0,9861	0,9864
2,3	0,9893	0,9896
2,4	0,9918	0,9920
2,5	0,9938	0,9940

Utilizamos la fórmula del error para despejar n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.04 = 2.51 \sqrt{\frac{0.83 \cdot 0.17}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{2.51} = \sqrt{\frac{0.83 \cdot 0.17}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.04}{2.51} \right)^2 = \frac{0.83 \cdot 0.17}{n} \Rightarrow \boxed{n = \frac{0.83 \cdot 0.17}{\left(\frac{0.04}{2.51} \right)^2} \approx 555.59} \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 556 clientes.

4.1.b) Consideramos la variable aleatoria X = número de clientes de un grupo de 100 que prefieren productos de cosmética natural. X es una variable binomial siendo $n = 100$ el número de repeticiones y p = probabilidad de que un cliente prefiera productos de cosmética natural = 0.8. $X = B(100, 0.8)$.

Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 100 \cdot 0.8 = 80$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 4 \text{ clientes. } Y = N(80, 4).$$

Esta aproximación es buena pues $np = 80 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0.2 = 20 > 5$.

Debemos calcular $P(70 \leq X < 75)$.

$$P(70 \leq X < 75) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(69.5 \leq Y \leq 74.5) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 80}{4} \end{array} \right\} = P\left(\frac{69.5 - 80}{4} \leq Z \leq \frac{74.5 - 80}{4}\right) = P(-2.625 \leq Z \leq -1.375) =$$

$$= P(1.375 \leq Z \leq 2.625) = P(Z \leq 2.625) - P(Z \leq 1.375) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{0.9956 + 0.9957}{2} - \frac{0.9147 + 0.9162}{2} = 0.99565 - 0.91545 = \boxed{0.0802}$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951
2,6	0,9952	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963

4.2 La plataforma de comercio electrónico especializada en productos cosméticos que ha investigado Susana sabe que el gasto anual de sus clientes se puede aproximar por una distribución normal de media μ euros y desviación típica $\sigma = 25$ euros.

4.2.a) (1,3 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 clientes de la plataforma resultando ser su gasto medio mensual de 310 euros. Obtenga un intervalo de confianza para estimar el gasto medio de todos los clientes con un nivel de confianza del 99,4%.

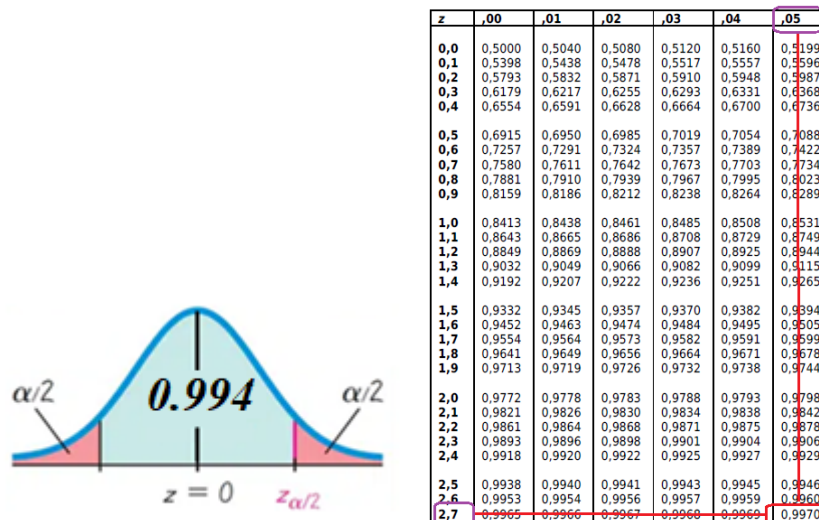
4.2.b) (1,2 puntos) Suponiendo que el verdadero valor del parámetro es $\mu = 300$ euros, calcule la probabilidad de que, elegido al azar un cliente de la plataforma, su gasto mensual esté comprendido entre 260 y 330 euros (ambos incluidos).

4.2.a) Supongo que en el enunciado hay una errata y se refiere a gasto anual y no mensual como pone. Consideramos X la variable aleatoria que da el gasto anual de sus clientes. $X = N(\mu, 25)$

. Tamaño de la muestra $n = 81$ clientes. La media muestral $\bar{x} = 310$ euros de gasto anual.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99,4%.

$$1 - \alpha = 0.994 \rightarrow \alpha = 0.006 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.003 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.997 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.75$$



Utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.75 \cdot \frac{25}{\sqrt{81}} \approx 7.6389$$

El intervalo de confianza para el gasto medio anual de los clientes es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (310 - 7.6389, 310 + 7.6389) = (302.3611, 317.6389)$$

4.2.b) Supongo que en el enunciado hay una errata y se refiere a gasto anual y no mensual como pone. X la variable aleatoria que da el gasto anual de sus clientes. $X = N(300, 25)$.

Nos piden calcular $P(260 \leq X \leq 330)$.

$$P(260 \leq X \leq 330) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 300}{25} \end{array} \right\} = P\left(\frac{260 - 300}{25} \leq Z \leq \frac{330 - 300}{25} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= P(-1.6 \leq Z \leq 1.2) = P(Z \leq 1.2) - P(Z \leq -1.6) = P(Z \leq 1.2) - P(Z \geq 1.6) = \\
 &= P(Z \leq 1.2) - [1 - P(Z \leq 1.6)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8849 - 1 + 0.9452 = \boxed{0.8301}
 \end{aligned}$$

z	,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192
1,5	0,9332
1,6	0,9452

La probabilidad de que, elegido al azar un cliente de la plataforma, su gasto anual esté comprendido entre 260 y 330 euros (ambos incluidos) vale 0.8301.

NOTA: Si no hubiese un error en la redacción y fuese tal y como aparece en el enunciado solo deberíamos cambiar la media muestral del apartado a) $310 \cdot 12 = 3720$. Aunque no parece lógica una desviación típica de 25 para esta media tan grande.